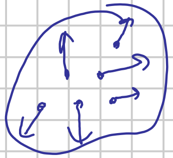
Note Title 24.05.2019

**Beweis** (von Bem. 1.7: Produktregel für $\nabla$): Ü

**Bem. 1.8** Für $f: U \underset{\subset \mathbb{R}^d}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ part. diff'bar ist $\nabla f$ ein Vektorfeld, d.h.,



eine Abb. $v: U \to \mathbb{R}^d$ ($\forall x \in U$ wird ein Vektor aus $\mathbb{R}^d$ zugeordnet).

$\boxed{\text{Def. 1.9}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und

$$v = (v_1, \dots, v_d) : U \to \mathbb{R}^d$$

ein partiell diff'bares Vektorfeld (d.h., jede Komponente $v_j : U \to \mathbb{R}$ ist part. diff'bar)

Dann heißt die Fkt div $v : U \to \mathbb{R}$ def. durch

$$\operatorname{div} v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_d}{\partial x_d}$$

die Divergenz des Vektorfeldes $v$. (hat nichts mit Konvergenz zu tun :-))

Formal kann man

$$\boxed{\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j}$$

schreiben.

$\boxed{\text{Def. 1.10}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ part. diff'bar. Sind alle part. Ableitungen $f_{x_j}: U \to \mathbb{R}$ part. diff'bar, so heißt $f$ zweimal partiell diff'bar.
Induktiv heißt $f$ (n+1)-mal partiell diff'bar, wenn sie n-mal part. diff'bar ist und alle part. Ableitungen n-ter Ordnung

$$D_{j_n} \cdots D_{j_2} D_{j_1} f = \frac{\partial}{\partial x_{j_n}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} f : U \to \mathbb{R}$$

partiell diff'bar sind. Schreibe auch $\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n} \cdots \partial x_{j_1}}$ oder $f_{x_{j_1} \cdots x_{j_n}}$.

kommt zuerst

kommt als letzte Ableitung.

Die Fkt $f$ heißt n-mal stetig diff'bar, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq n$ existieren und stetig sind. Schreibe $f \in C^n(U)$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 y$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy, \qquad f_y(x,y) = x^2$$

$$f_{xx}(x,y) = 2y, \quad f_{xy}(x,y) = (f_x)_y (x,y) = 2x, \quad f_{yy}(x,y) = 0,$$

$$f_{yx}(x,y) = (f_y)_x (x,y) = 2x.$$

Wir sehen: $f_{xy} = f_{yx}$.

Das ist kein Zufall:

**Satz 1.11** (Schwarz) — Spezialfall $d=2$: Euler 1734

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $a \in U$, $i,j \in \{1,\dots,d\}$ und $f: U \to \mathbb{R}$. Wenn die partiellen Ableitungen $\partial_{x_i x_j}$ und $\partial_{x_j x_i}$ in einer Umgebung von $a$ existieren und stetig in $a$ sind, dann gilt

$$\boxed{\partial_{x_i x_j} f(a) = \partial_{x_j x_i} f(a)}$$

Allgemein gilt: $f \in C^n(U) \Rightarrow$ die part. Ableitungen der Ordnung $\leq n$ sind unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

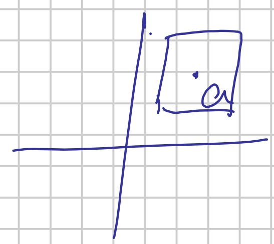
**Beweis** „Allgemein…" folgt nach Induktion: (ii) / (iii).

Für den ersten Teil sei OBdA $d=2$ (sonst nimm alle $x_k$ mit $k \notin \{i,j\}$ fest).

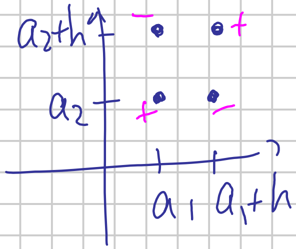
ZZ: $f_{xy}(a) = f_{yx}(a)$

Nach Vorauss. $\exists \delta > 0$ s.d. $f_{xy}, f_{yx}$ stetig in

$\underbrace{[a_1-\delta, a_1+\delta] \times [a_2-\delta, a_2+\delta]}_{= U_\delta(a) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty}$ sind.



Sei $h \in (0, \delta)$ zunächst fest und betrachte



$$F(h) := f(a_1+h, a_2+h) - f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2+h) + f(a_1, a_2).$$

Beobachtung:

$$F(h) = \varphi(a_1+h) - \varphi(a_1),$$

wobei

$$\begin{cases} \varphi(t) := f(t, a_2+h) - f(t, a_2) \\ \varphi : [a_1, a_1+h] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

Mittelwertsatz

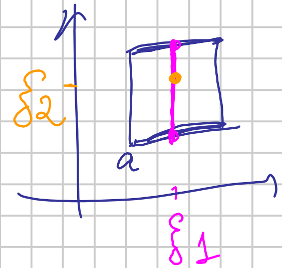
Nach Vorauss. ist $\varphi$ diff'bar. Der MWS aus Ana 1 impliziert:

$$F(h) = h \cdot \varphi'(\xi_1) = $$

für ein $\xi_1 \in [a_1, a_1+h]$

Def. von $\varphi$

$$= h\left[f_x(\xi_1, a_2+h) - f_x(\xi_1, a_2)\right]$$



MWS angew. auf $f_x(\xi_1, \cdot) : [a_2, a_2+h] \longrightarrow \mathbb{R}$

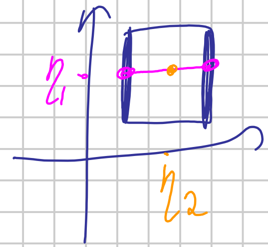
$$= h^2 f_{xy}(\xi_1, \xi_2)$$

für ein $\xi_2 \in [a_2, a_2+h]$.

Analog (warum?) gilt

$$F(h) = h^2 f_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$

für ein $(\eta_1, \eta_2) \in [a_1, a_1+h] \times [a_2, a_2+h]$




Wir haben also:

$\forall h \in (0, \delta)$ $\exists (\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2) \in [a_1, a_1+h] \times [a_2, a_2+h]$ mit

$$f_{xy}(\xi_1, \xi_2) = f_{yx}(\eta_1, \eta_2) \quad (\text{da } h^2 \neq 0)$$

$$f_{xy}(\xi_1,\xi_2) \xrightarrow{h \downarrow 0} f_{xy}(a), \qquad f_{yx}(\eta_1,\eta_2) \xrightarrow{h \downarrow 0} f_{yx}(a),$$

da $f_{xy}, f_{yx}$ stetig in $a$ sind $\left( h \downarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} (\xi_1, \xi_2) \to a \\ (\eta_1, \eta_2) \to a \end{cases} \right)$ $\boxdot$

$\boxed{\text{Bsp 1.12}}$ Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v: U \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld.

Frage: wann gilt $v = \operatorname{grad} f$ für eine Fkt $f: U \to \mathbb{R}$?

Sei $v$ ist part. diff'bar (d.h., $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\forall v_j: U \to \mathbb{R}$ ist part. diff'bar)

Def. die Rotation von $v$ durch

$$\operatorname{rot} v := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right).$$

Ang., $v = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$ für ein $f \in C^2(U)$.

Wir zeigen:

$$\operatorname{rot} v = \boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0}$$

Nach Satz 1.11 gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)$$

$$\underset{\text{Satz 1.11}}{=} (0, 0, 0).$$

D.h., $\operatorname{rot} v = 0$ ist eine notwendige Bedingung für $v = \operatorname{grad} f$ für ein $f \in C^2(U)$.

Bem. 1) Erinnere: Das Vektorprodukt von $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ aus $\mathbb{R}^3$ ist def. durch

$$x \times y := (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt formal: $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$

und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \iff \nabla \times \nabla f = 0$. (Analogie zu $x \times x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$).

2) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^2(U)$, $f: U \to \mathbb{R}$. Bezeichne

Delta

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d^2}$$

$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ist eine Abkürzung für $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\Big)$

Man nennt

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

franz. Mathematiker und Astronom

<u>Laplace-Operator</u> $\Big(\text{Fkt}: U \to \mathbb{R} \overset{\Delta}{\longmapsto} \text{Fkt}: U \to \mathbb{R}\Big)$

in der mathematischen Physik heißt die Gleichung

$$\Delta f = 0$$

(d.h. $f_{x_1 x_1} + \dots + f_{x_d x_d} = 0$) <u>Potential-</u> oder <u>Laplace-Gleichung</u> und ihre $C^2$-Lösungen heißen <u>harmonische Funktionen</u>.

Für $f: U_{\subset \mathbb{R}^3} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\underset{\text{Zeit}}{t}, \underbrace{x, y}_{\text{Raumkoordinaten}}) \longmapsto f(t, x, y)$, $f \in C^2$ bzgl. $x$ und $y$, $f \in C^1$ bzgl. $t$

heißt

$$f_t = c\,(f_{xx} + f_{yy})$$

homogene Wärmeleitungsgleichung. Sie beschreibt die Änderung der Temperatur im Punkt $(x, y)$ zum Zeitpunkt $t$.

Die 3-dim. Version lautet

$$f_t = c\,(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}), \quad f : \underset{\subset \mathbb{R}^4}{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x, y, z) \longmapsto f(t, x, y, z)$$

Zeit, Raumkoord.

$\boxed{\text{Def. 1.13}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$.

heißt $f$

- (n-mal) partiell diff'bar, wenn jede Komponentenfkt $f_j$ (n-mal) part. diff'bar ist
- (n-mal) stetig partiell diff'bar, wenn —"— stetig part. diff'bar ist

(schreibe $f \in C^n(U)$).