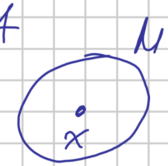
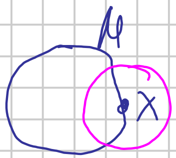
Def. 2.4 Sei (X, τ) ein top. Raum (TR) und $M \subset X$.

- M heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus M$ offen ist (d.h., $X \setminus M \in \tau$)
- M heißt (offene) **Umgebung** von $x \in X$, wenn M offen ist und $x \in M$.

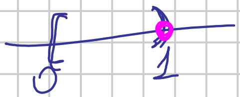




- $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von M, wenn $\forall$ Umg. von x einen Punkt aus M enthält, d.h.,
  $$U \text{ offen}, x \in U \Rightarrow U \cap M \neq \emptyset.$$
- $\overline{M} := \{\text{Berührungspunkte von } M\}$ heißt **Abschluss** von M.

Bsp 2.5 1) $x \in M \Rightarrow x$ ist B'Punkt von M, d.h., $\boxed{M \subset \overline{M}}$

2) $\mathbb{R}$ (mit natürlicher Top., induziert vom $|\cdot|$):
$M = [0, 1)$ – weder offen noch abg., $\overline{M} = [0, 1]$ (Warum?)



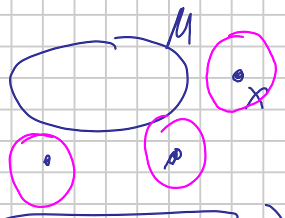
Satz 2.6 Sei X ein TR und $M \subset X$. Dann gilt:

$\boxed{M \text{ abg.} \Leftrightarrow M = \overline{M}}$, d.h., $M \supset$ alle B'Punkte von M.

Beweis M abg. $\Leftrightarrow$ $X \setminus M$ offen $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X \setminus M$ ist kein B'Punkt von M

$\Rightarrow$ klar ($X\setminus M$ ist eine Umg.)

$\Leftarrow$ $X \setminus M$ ist eine Verein. offener Mengen, also offen

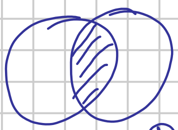


$\Leftrightarrow \overline{M} \subset M \Leftrightarrow \overline{M} = M.$ ∎

$\boxed{\text{Bem. 2.7}}$ 1) Abg. Mengen erfüllen:

(a) $\emptyset$, X abg.

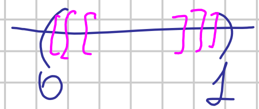
(b) Beliebige Durchschnitte von abg. Mengen sind abg.



(c) Endliche Vereinigungen —"— (Warum?)

Dabei brauchen unendl. Vereinigungen nicht abg. zu sein

$$(0,1) = \bigcup_{x \in (0,1)} \{x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}\right]$$

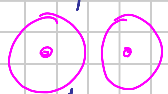


Warum ist $\{x\}$ abg.?

2) (X,d) MR (metr. Raum). Dann ist $\{x\}$ $\forall x \in X$ abg.

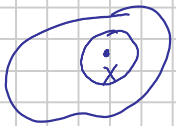
– Wahr in allen Hausdorffräumen

$\forall x, y,\ x \neq y\ \exists U, V$ offen: $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$



Insbesondere ist $\forall$ endliche Menge in solchen Räumen abg.

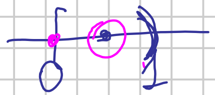
Def. 2.8 Sei X ein TR und $M \subset X$.



- Das <u>Innere</u> von M ist $\mathring{M} := \{x \in M : \exists$ Umgebung U von x mit $U \subset M\}$. Elemente von $\mathring{M}$ heißen <u>innere Punkte</u>
- Der <u>Rand</u> von M ist $\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$. Elemente von ∂M heißen <u>Randpunkte</u>

Bem. 2.9
1) $\boxed{\mathring{M} \subset M}$
2) $x \in \partial M \iff \forall$ Umg. von x enthält sowohl einen Punkt aus M als auch aus $X \setminus M$.

Bsp 2.9 $\mathbb{R}$, $M = [0,1)$: $\underbrace{\mathring{M} = (0,1),\ \overline{M} = [0,1],\ \partial M = \{0,1\}}_{\text{gilt auch für } M=(0,1),\ [0,1],\ (0,1]}$



(warum?)

<u>Bem.</u> Es gilt: $\mathring{M} \subset M \subset \overline{M}$ und

- $\overline{M}$ die kleinste <u>abg.</u> Menge $\supset M$
- $\mathring{M}$ die größte <u>offene</u> Menge $\subset M$

HÜ

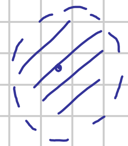
Bsp 2.10 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $M := U_r(x_0)$.

$$\mathring{M} = U_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$$

$$\overline{M} = \{x : \|x - x_0\| \le r\}$$

$$\partial M = \{x : \|x - x_0\| = r\}$$

Ü



<u>Achtung</u>: in MR kann z.B. $\{x : d(x, x_0) = r\}$ leer sein:

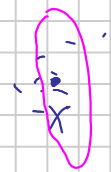
Bsp: $(X, \underbrace{\text{diskrete Metrik}}_{d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}})$, $M = U_{1/2}(x_0) = \{x_0\}$

$\overline{M} = \{x_0\}$, $\partial M = \emptyset$.

3. Konvergenz von Folgen und Stetigkeit

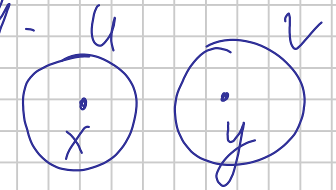
Def. 3.1 Sei (X, τ) ein TR, $x \in X$ und $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in X.
Dann heißt (x_n) <u>konvergent</u> gegen x, schreibe
$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, wenn:

$$\forall \text{ Umg. } U \text{ von } x \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N \ \ x_n \in U$$



Dabei heißt x **Grenzwert** von $(x_n$

Satz 3.2 In metr. Räumen ist der Grenzwert eindeutig.



__Beweis__ Ang.: $x_n \to x$, $x_n \to y$ mit $x \neq y$

Trennungseigenschaft (Satz 1.13): $\exists$ Umg. U von x, Umg. V von y mit $U \cap V = \emptyset$

Nach Vorauss. $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \; x_n \in U$

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \; x_n \in V$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \; x_n \in U \cap V = \emptyset$ ↯

__Bem.__ in TR i.A. falsch: für die $\underbrace{\text{indiskrete Top.}}_{\{\emptyset, X\}}$ konv. $\forall$ Folge gegen $\forall$ Punkt

Aber richtig in Hausdorffräumen

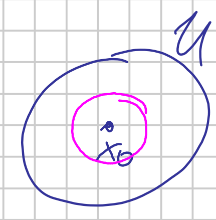
Bem. 3.3 Sei (X, d) ein $\boxed{MR}$. Dann gilt:

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \iff d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

__Beweis__ $\Rightarrow$ folgt, da $U_\varepsilon(x)$ eine Umg. von x ist:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n \geq N \; \underbrace{x_n \in U_\varepsilon(x)}_{d(x_n, x) < \varepsilon}$

$\Leftarrow$ Sei U eine Umg. von x. Da U offen, $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset U$.

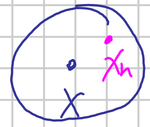


Nach Vorauss.: $\exists N : \forall n \geq N \; \underbrace{d(x_n, x) < \varepsilon}_{x_n \in U_\varepsilon(x) \subset U}$, d.h., $x_n \to x$.

Satz 3.4 (Charakterisierung abg. Mengen in MR)
Sei X ein $\boxed{MR}$ und $M \subset X$. Dann gilt:

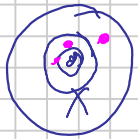
$$\boxed{M \text{ abg.} \iff \forall \text{ Grenzwerte von Folgen aus } M \text{ liegen in } M, \text{ d.h., } (x_n \to x,\ \forall x_n \in M \Rightarrow x \in M)}$$

<u>Beweis</u> "$\Rightarrow$" Sei $x_n \to x$, $\forall x_n \in M$. Zz: $x \in M$.



Nach Def. ist x ein Berührungspunkt von M, also gilt
$x \in \overline{M} = M$
(da M abg., Satz 2.6.)

"$\Leftarrow$" Sei x ein B'Punkt von M. Zz.: $x \in M$.
Nach Def. haben wir $\forall n \in \mathbb{N}$ (und $\varepsilon := \frac{1}{n}$) $\exists x_n \in M$ mit $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$



D.h., $\exists (x_n) \subset M$ mit $x_n \to x$ (da $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$)
Nach Voraus. gilt: $x \in M$. Damit haben wir $\overline{M} \subset M$, also ist M abg. (Satz 2.6)

Def. 3.5 Seien X, Y TR. Eine Abb. $f: X \to Y$ heißt <u>stetig</u>, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist!

$U \subset Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(U) \subset X$ offen.

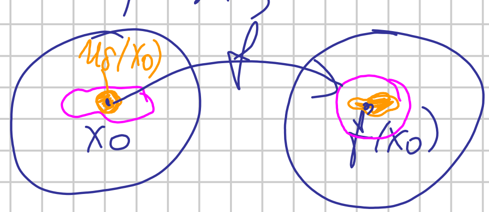
Satz 3.6 (ε-δ-Charakterisierung von Stetigkeit in MR)

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metr. Räume und $f: X \to Y$. Dann gilt:

$$\boxed{f \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \underbrace{x \in U_\delta(x_0)}_{d_X(x, x_0) < \delta}\ \underbrace{f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))}_{d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon}}$$

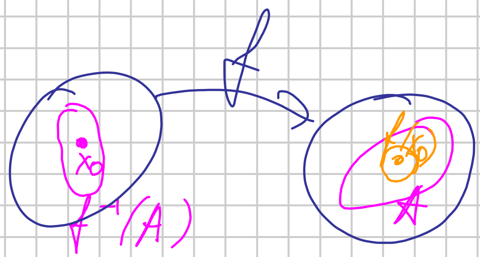
D.h., wir bekommen die Def. der Stetigkeit aus Ana I!

Beweis "$\Rightarrow$" Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Da $U_\varepsilon(f(x_0))$ offen in Y ist, ist $\underbrace{f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))}_{\ni x_0}$ offen. Also $\exists \delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$, d.h., $\forall x \in U_\delta(x_0)$ $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.



"$\Leftarrow$" Sei $A \subset Y$ offen. Zz: $f^{-1}(A)$ offen.

Sei $x_0 \in f^{-1}(A)$. Wir zeigen: $\exists U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$.



Wir wissen: $y_0 := f(x_0) \in A$. Da A offen ist, $\exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y_0) \subset A$. Nach Vorauss. $\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0)$ $f(x) \in U_\varepsilon(y_0) \subset A$.

Also gilt: $f(U_\delta(x_0)) \subset A$, d.h., $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$. ∎

Bem. 3.7 1) Seien X, Y TR. Dann heißt $f: X \to Y$ stetig in $x_0 \in X$, wenn

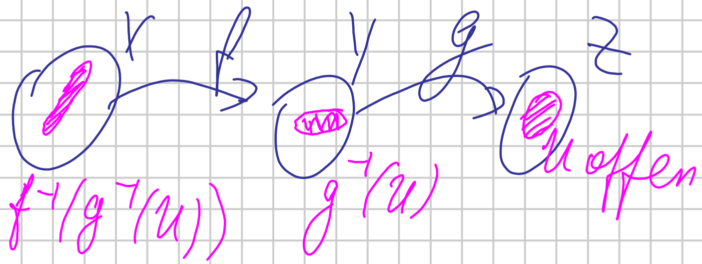
$$\forall \text{ off. Umg. } U \text{ von } f(x_0) \ \exists \text{ off. Umg. } V \text{ von } x_0 \text{ mit } f(V) \subset U.$$

Ü
- $f: X \to Y$ stetig $\Longleftrightarrow$ stetig in $\forall x_0 \in X$
- Für metr. Räume gilt:

f stetig in $x_0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

2) $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ $\underbrace{\text{stetig}}_{\text{beide}}$

$\Rightarrow g \circ f: X \to Z$ stetig (warum?)



3) Seien $f, g: X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind

$|f|$, $f+g$, $c \cdot f$ ($c \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$, $\frac{1}{f}$ sobald $f(x) \neq 0 \ \forall x$

stetig Ü / HÜ

4) Für <u>MR</u> $(X, d_X), (Y, d_Y)$ heißt $f: X \to Y$

- <u>gleichmäßig stetig</u>, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X\ \left(d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \right)$$

- <u>Lipschitz-stetig</u>, wenn:

$$\exists C > 0 \text{ mit } d_Y(f(x), f(y)) \leq C\, d_X(x,y)$$

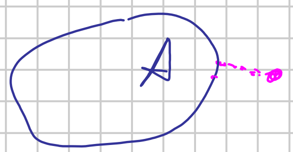
Wie in Ana I: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ gl. stet. $\Rightarrow$ stet. (Warum?)

$\nexists$ keine analog. Begriffe in TR.

$\boxed{\text{Bsp. 3.8}}$ Sei (X, d) ein MR, $x_0 \in X$, $A \subset X$.

Dann sind die Fkt'en

$$d(\cdot, x_0) : X \to \mathbb{R}$$
$$d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$$



Lipschitz-stetig (und insb. stetig), wobei

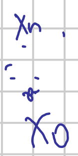
$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$

Ü (basiert auf der Δ-Ungl.)

Satz 3.9 (Stetigkeit = Folgenstetigkeit in MR)

Für metr. Räume X, Y, eine Abb. $f: X \to Y$ und $x_0 \in X$ gilt:

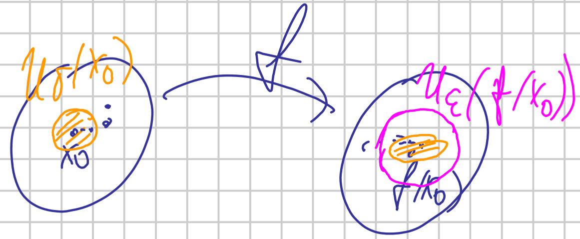
$$\boxed{f \text{ stetig in } x_0 \iff f \text{ folgenstetig in } x_0, \text{ d.h., } \forall (x_n) \subset X \ (x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0))}$$



Beweis $\Rightarrow$ sei f stetig in x_0 und sei $x_n \to x_0$. ZZ: $f(x_n) \to f(x_0)$

sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig in x_0 ist, $\exists \delta > 0$:

$$f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$$

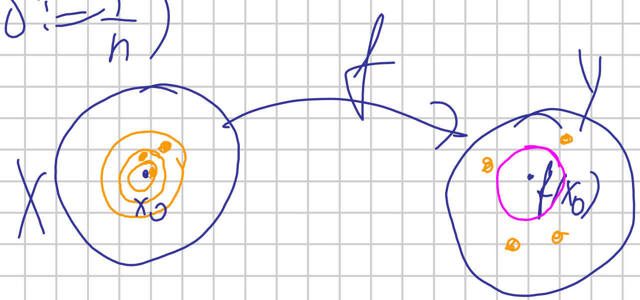


Da $x_n \to x_0$, $\exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U_\delta(x_0)$, also

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

$\Leftarrow$ Ang., f wäre nicht stetig, d.h., $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in U_\delta(x_0)$ mit $f(x) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$. Insb. gilt für $\forall n \in \mathbb{N}$ (mit $\delta := \frac{1}{n}$)

$$\exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) \text{ aber } f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$$



Die Folge $(x_n) \subset X$ erfüllt:

- $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d.h., $x_n \to x_0$
- $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon \quad \forall n$, d.h., $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Also ist f nicht folgenstetig.

<u>Bem.</u> i.A. falsch in TR. Man braucht eine Verallgemeinerung von Folgen, sog. Netze (ohne Details hier, kurz: NÜ)

4. Kompaktheit

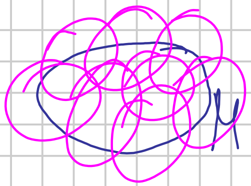
Erinnerung: $[a,b]$ hat wichtige Eigenschaften:

- $\forall$ Folge hat eine in $[a,b]$ konv. TF. (Bolzano-Weierstraß)
- $\forall$ stet. Fkt ist gl. stetig
- — " — nimmt das Max. und das Min. an.

Verallg. auf MR / TR ?

Zentrale Eigenschaft in Analysis!

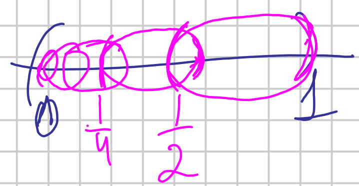
$\boxed{\text{Def. 4.1}}$ Sei X ein TR und $M \subset X$.



- Eine offene Überdeckung von M ist eine Familie $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ off. Mengen von X mit $M \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$
- M heißt kompakt (oder: überdeckungskompakt), wenn $\forall$ offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h.,

$$M \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha,\ \forall U_\alpha \text{ offen} \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : M \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$$

$\boxed{\text{Bsp 4.2}}$ 1) $(0,1)$ nicht komp., z.B., $U_1 = (\frac{1}{2}, 1)$, $U_2 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $U_3 = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ …

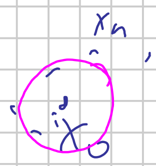


2) Endliche Mengen sind kompakt (warum?)

3) Sei $x_n \to x_0$. Dann ist die Menge

$$M := \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$$

kompakt.



Beweisidee: Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine offene Überd. von M.

$\exists \alpha_0 : x_0 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$. Es liegen höchstens <u>endl. viele</u> Punkte außerhalb $\mathcal{U}_{\alpha_0}$. Zu $\forall$ solcher Punkt wähle ein $\mathcal{U}_{\alpha_i}$ dazu. $\blacksquare$

4) Sei X eine Menge mit diskr. Top, $M \subset X$

M komp. $\Leftrightarrow$ endl.

$\Leftarrow$ siehe 2)

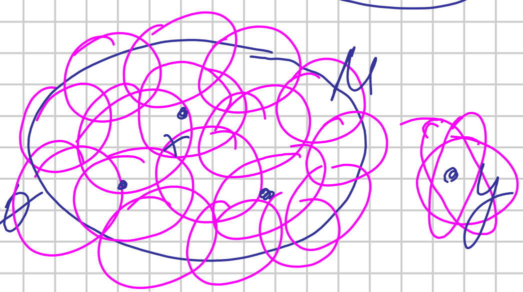
$\Rightarrow$)

$\boxed{\text{Satz 4.3}}$ In metr. Räumen sind komp. Mengen immer abg.

<u>Beweis</u> Sei $M \subset X$ komp., X MR, $y \in X \setminus M$.

zz: $\exists$ off. Umg. V von y mit $V \subset X \setminus M$.

Trennungssatz 1.13: $\forall x \in M$ $\exists$ $\mathcal{U}(x)$ Umg. von x $\exists V(x)$ Umg. von y mit $\mathcal{U}(x) \cap V(x) = \emptyset$



M komp. $\Rightarrow$ $\exists x_1, \dots, x_n \in M$ s.d.

$$M \subset \mathcal{U}(x_1) \cup \dots \cup \mathcal{U}(x_n)$$

Dann ist $V := V(x_1) \cap \dots \cap V(x_n)$ offen, $y \in V$ und

$$V \cap \mathcal{U}(x_j) = \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Insb. gilt: $V \subset X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}(x_j) \right) \subset X \setminus M$. $\blacksquare$

Bem. Wahr für Hausdorff-Räume.

Def. 4.4 Eine Teilmenge M eines TR X heißt folgenkompakt, wenn $\forall$ Folge aus M eine gegen einen Punkt aus M konv. Teilfolge besitzt, d.h.,

$$\forall (x_n) \subset M \ \exists \text{ Teilf. } (x_{n_k}) \text{ von } (x_n) \ \exists x \in \underline{\underline{M}} : x_{n_k} \to x.$$

Bsp 4.5 Nach B.-W. ist $[a,b]$ folgenkompakt in $\mathbb{R}$

Bem. 4.6 Es gilt: $A \subset X$ folgenkompakt, $B \subset A$ abg. $\Rightarrow$ B folgenkompakt Ü

Damit gilt: $\boxed{B \subset \mathbb{R} \text{ abg., beschr.} \Rightarrow B \text{ folgenkomp.}}$

(da $B \subset [-R,R]$ für ein $R>0$, B abg. und $[-R,R]$ folgenkomp.)

Satz 4.7 (Komp. = Folgenkomp. in MR)

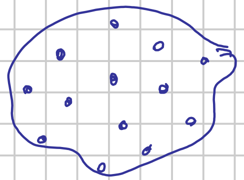
Sei X MR und $M \subset X$. Betrachte folgende Aussagen:

(i) M ist kompakt

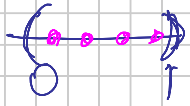
(ii) M ist folgenkompakt

(iii) $\forall \varepsilon > 0$ besitzt M ein endliches ε-Netz, d.h.,

$\exists x_1, \dots, x_n$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)$



Dann gilt: $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$

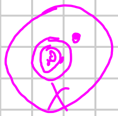


Bem. 1) $(ii) \not\Leftarrow (iii)$ i. A.: Bsp: $M = (0,1)$ erfüllt (iii), aber weder komp. noch folgenkomp. ($(\frac{1}{n})$ hat keine in $(0,1)$ konv. TF).

~~2) $(iii) \Leftrightarrow \overline{M}$ komp. (ohne Beweis)~~ ~~(vielleicht HÜ)~~

Beweis von 4.7 $(i) \Rightarrow (ii)$ Ang., M komp., aber nicht folgenkomp., d.h., $\exists (x_n) \subset M$ ohne konv. TF (mit Limes in M)

D.h., $\forall x \in M$ $\exists$ Umg. $U(x)$ von x, die nur endl. viele x_n enth.

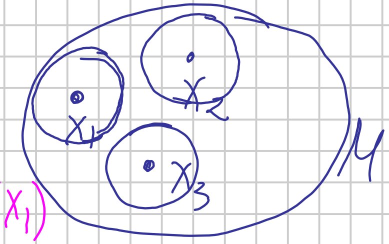


(warum?)

Da M komp., $\exists$ endl. Teilüberd. $U(x_1), \dots, U(x_n)$

Also enhält M nur endlich viele x_n ↯

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ang., (iii) gilt nicht, d.h., $\exists \varepsilon > 0$ s.d. M nicht mit endl. vielen ε-Kugeln überdeckbar ist.



Sei $x_1 \in M$. Nach Annahme $\exists x_2 \in M$ mit $\underbrace{d(x_1, x_2) \geq \varepsilon}_{\text{d.h., } x_2 \notin U_\varepsilon(x_1)}$,

$\exists x_3 \in M$ mit $\underbrace{d(x_1, x_3) \geq \varepsilon,\ d(x_2, x_3) \geq \varepsilon}_{\text{d.h., } x_3 \notin U_\varepsilon(x_1) \cup U_\varepsilon(x_2)}$

induktiv konstr. man eine Folge $(x_n) \subset M$ mit $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon \quad \forall n \neq m$.

Zz: (x_n) hat keine konv. TF.

Ang., $\exists\, x_{n_k} \to x_0 \in M$, d.h., $d(x_{n_k}, x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Δ-Ungl.: $\varepsilon \underset{\text{nach konstr.}}{\leq} d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \underbrace{d(x_{n_k}, x_0)}_{\to 0} + \underbrace{d(x_0, x_{n_j})}_{\to 0}$ ↯

(Ab einem N_0 gilt: $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(x_{n_j}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$)

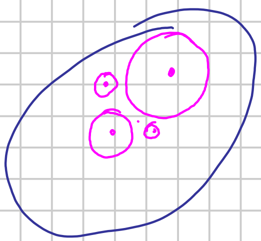
Alternativ: Zeige: $\forall$ konv. Folge ist Cauchy. Aber (x_n) hat keine Cauchy-TF.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0: \forall n, m \geq N_0\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von M.

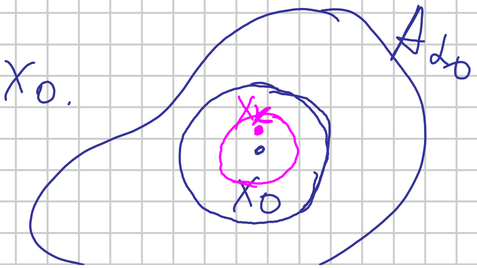
Ang., $\nexists$ endl. Teilüberdeckung.

Da (ii) $\Rightarrow$ (iii) schon bewiesen ist, $\forall n$ $\exists$ endl. viele Kugeln $U_{\frac{1}{n}}(x)$, $x \in M$, die M überdecken. Nach Voraus. $\exists\, x_n \in M$ s.d. $U_{\frac{1}{n}}(x_n)$ nicht mit endl. vielen A_α überdeckbar ist.



Nach (ii) hat (x_n) eine konv. TF: $x_{n_k} \to x_0$.

Def. einer Überdeckung: $\exists \alpha_0: x_0 \in A_{\alpha_0}$.



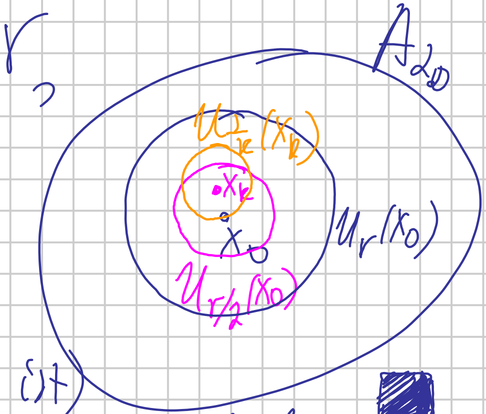
Da A_{α_0} offen, $\exists\, r>0$ mit $U_r(x_0) \subset A_{\alpha_0}$

Sei $N \geq \frac{2}{r}$. Def. des Grenzwertes: $\exists\, k \geq N$ mit $d(x_k, x_0) < \frac{r}{2}$.

Damit gilt $\forall\, x \in U_{\frac{1}{k}}(x_k)$

$$d(x,x_0) \leq \underbrace{d(x,x_k)}_{<\frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} \leq \frac{r}{2}} + \underbrace{d(x_k,x_0)}_{<\frac{r}{2}} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

d.h., $U_{\frac{1}{k}}(x_k) \subset U_r(x_0) \subset A_{\alpha_0}$ $\lightning$ (da $U_{\frac{1}{k}}(x_k)$ nicht endlich überdeckbar ist)



$\blacksquare$

$\boxed{\text{Bem. 4.8}}$ Mengen mit Eigenschaft (iii) aus Satz 4.7 heißen total beschränkt (oder präkompakt). Man kann zeigen: Für $M \subset X$, X MR, gilt

WH

M total beschr. $\Longleftrightarrow$ $\forall$ Folge aus M besitzt eine TF, die Cauchy ist

insbesondere gilt:

M kompakt $\Longleftrightarrow$ M total beschr. und vollständig

$\forall$ CF aus M konv. in M.

Folgerung 4.9 1) Sei X ein MR, $B \subset X$ komp. und $A \subset B$ abg.

Dann ist A komp., d.h., abg. Teilmengen von komp. Mengen sind komp.

2) $\boxed{A \subset \mathbb{R} \text{ abg., beschr.} \Rightarrow A \text{ komp.}}$

__Beweis__ 1) folgt aus $\underbrace{\text{Bem. 4.6}}_{\text{Aussage für Folgenkomp.}}$ und $\underbrace{\text{Satz 4.7}}_{\text{Folgenkomp.} = \text{Komp.}}$

2) folgt aus 1) für $\underbrace{B := [-R, R]}_{\text{folgenkomp. nach B.-W.}}$ mit $A \subset [-R, R]$ abg.

$\Rightarrow$ komp. (Satz 4.7)

Rückrichtung in 2) gilt immer:

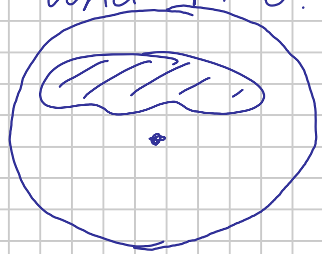
Satz 4.10 Seien X ein MR und $A \subset X$. Dann gilt:

$$\boxed{A \text{ komp.} \Rightarrow A \text{ abg. und beschränkt}}$$

Dabei heißt A beschränkt, wenn $A \subset U_r(x_0)$ für ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$.

__Beweis__ __Abg.__: Satz 4.3

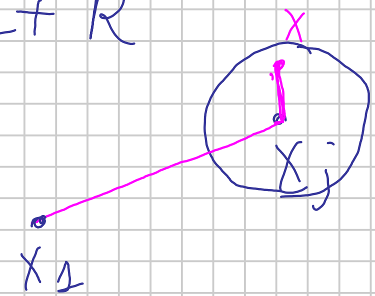
__Beschr.__: Die Kugeln $U_1(x)$, $x \in A$ bilden eine offene



Überdeckung von A $\underset{\text{kompl.}}{\Longrightarrow}$ $\exists x_1, \dots, x_n : \forall x \in A \ \exists j \in \{1, \dots, n\} : \underbrace{d(x, x_j) < 1}_{x \in U_1(x_j)}$

Damit gilt $\forall x \in A$:

$$d(x, x_1) \leq \underbrace{d(x, x_j)}_{< 1 \text{ für ein } j} + d(x_j, x_1) \leq 1 + R$$



für $R := \max\limits_{j \in \{1, \dots, n\}} d(x_j, x_1)$

$\Rightarrow M \subset U_{1+R}(x_1)$. $\blacksquare$

Insbesondere gilt:

$$\boxed{A \subset \underline{\underline{\mathbb{R}}} \text{ komp.} \Longleftrightarrow \text{abg. und beschr.}}$$

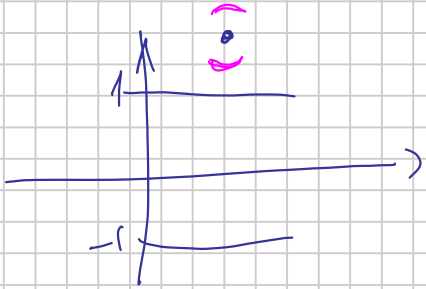
Achtung: Richtig in $\mathbb{R}^d$ (kommt bald), falsch i. A.! ($\Leftarrow$ i. A.)

$\boxed{\text{Bsp 4.11}}$ $X := C[0,1]$ mit Sup-Norm $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$

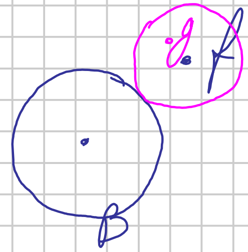
Betrachte $B := \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$ – die abg. Einheitskugel

- B ist beschr. $(B \subset \mathcal{U}_2(0))$

- B ist abg.:



Sei $f \in X \setminus B$, d.h., $\|f\|_\infty =: d > 1$.

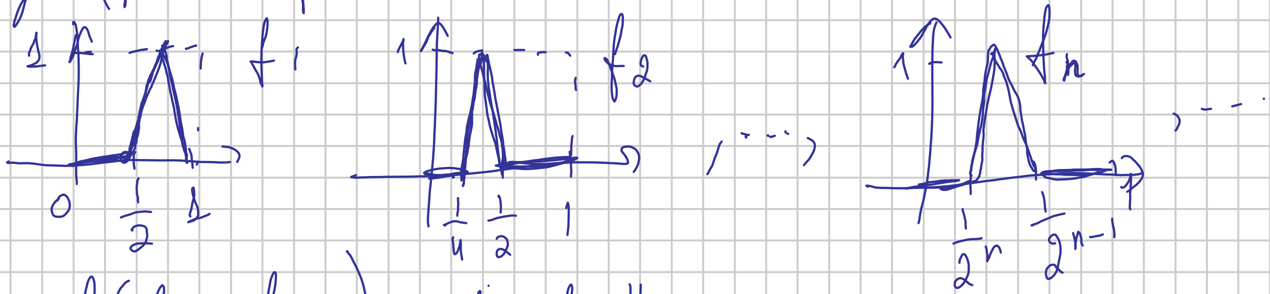


Dann gilt: $\mathcal{U}_{d-1}(f) \subset X \setminus B$:

$\forall g \in \mathcal{U}_{d-1}(f)$ $\quad \|g\|_\infty \underset{\text{Δ-Ungl.}}{\geq} \underbrace{\|f\|_\infty}_{=d} - \underbrace{\|f-g\|_\infty}_{<d-1} > d-(d-1) = 1$

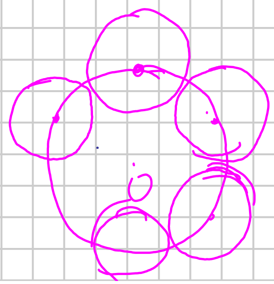
- $\underline{\underline{\text{Aber}}}$: B nicht folgenkompakt (damit nicht komp. nach 4.7)

Die Folge (f_n) def. durch



erfüllt: $d(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\|_\infty = 1 \quad \forall n \neq m$,

d.h., (f_n) hat keine konv. TF (Warum?)



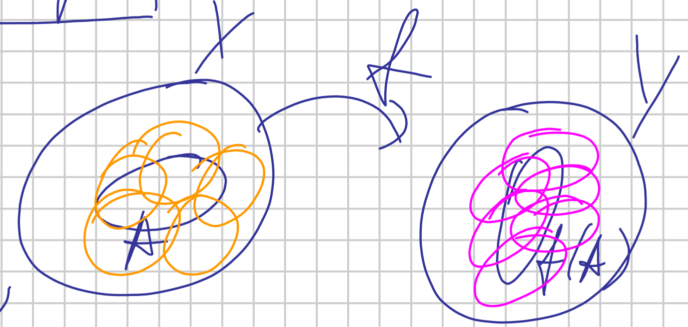
ii / HÜ Präsentieren Sie eine off. Überdeckung von B ohne endl. Teilüberd.

Eigenschaften von stetigen Fkt'en auf komp. Mengen

Satz 4.12 Seien X, Y TR, $f: X \to Y$ stetig, $A \subset X$. Dann gilt:

$$\boxed{A \text{ komp.} \Rightarrow f(A) \text{ komp.}}$$

(Stetige Bilder komp. Mengen sind komp.)



Beweis Sei A komp. und sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine off. Überdeckung von $f(A)$. Da f stetig ist, ist $(f^{-1}(U_\alpha))_{\alpha \in I}$ eine offene Überd. von A.
warum?

A komp. $\Rightarrow \exists\, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_j})$,

d.h., $\forall x \in A\ \exists j$ mit $\underbrace{x \in f^{-1}(U_{\alpha_j})}_{f(x) \in U_{\alpha_j}}$, d.h., $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$ ∎

$\boxed{\text{Folgerung 4.13}}$ Seien X, Y MR, $f: X \to Y$ bij., stetig.

Wenn X komp. ist, ist $f^{-1}: Y \to X$ automatisch stetig.

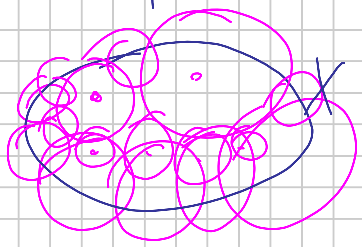
Beweis: Ü

$\boxed{\text{Satz 4.14}}$ Seien X, Y MR, X komp. und $f: X \to Y$ stetig.

Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Z.z.: $\exists \delta > 0: \forall x, y \in X \ (d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$.

Für alle $x \in X$ gilt, da f stetig in x:



$$\exists \delta(x) > 0 : \forall y \in X \ (\underbrace{d(x,y) < \delta(x)}_{y \in U_{\delta(x)}(x)} \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2)$$

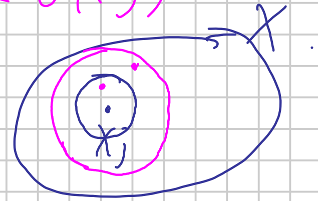
Die Kugeln $U_{\delta(x)/2}(x)$, $x \in X$ überdecken X

X komp. $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n: X \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\frac{\delta(x_j)}{2}}(x_j)$

Def. $\delta := \min\left\{\frac{\delta(x_1)}{2}, \dots, \frac{\delta(x_n)}{2}\right\}$ und seien $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$.

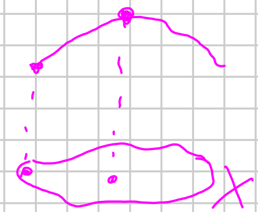
Def. einer Überdeckung: $\exists j \in \{1, \dots, n\}: x \in U_{\frac{\delta(x_j)}{2}}(x_j)$

Δ-Ungl.: $y \in U_{\delta(x_j)}(x_j)$: $d(y, x_j) \le \underbrace{d(y,x)}_{< \delta \le \frac{\delta(x_j)}{2}} + \underbrace{d(x,x_j)}_{< \frac{\delta(x_j)}{2}} < \delta(x_j)$



$\Rightarrow \underbrace{d(f(x), f(y))}_{\text{Def. von } \delta(x_j)} \le \underbrace{d(f(x), f(x_j))}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{d(f(x_j), f(y))}_{< \varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ∎

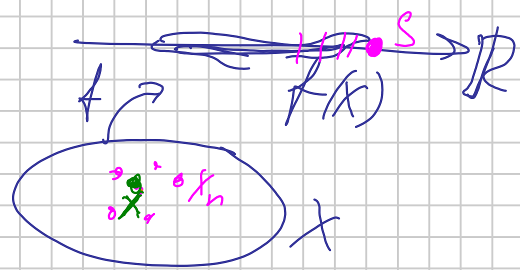
$\boxed{\text{Satz 4.15}}$ Sei X ein kompakter MR und $f: X \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann nimmt f auf X Minimum und Maximum an.



Beweis ($\exists$ Max, Rest analog oder $f \rightsquigarrow -f$)

Da X komp., ist $f(X)$ kompakt in $\mathbb{R}$ und damit beschränkt und abgeschlossen.

$f(X)$ beschr. $\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n) \subset X$ mit
$f(x_n) \longrightarrow \sup f(X) =: S$



Da X folgenkompakt (Satz 4.7), $\exists$ konv. TF von (x_n): $\exists x_{n_k} \to x_0$ für ein $x_0 \in X$.

f stetig $\Leftrightarrow$ folgenstetig, also gilt $f(x_{n_\nu}) \to f(x_0)$

da X MR

Eindeutigkeit des Grenzwertes in MR: $s = f(x_0)$. ∎

5. Zusammenhang

Def. 5.1 Sei $A \subset X$, X TR. Dann heißt A **zusammenhängend** (zshgd), wenn $\forall\, U, V$ offen gilt:

$$A \subset U \cup V,\ \underbrace{U, V \text{ disjunkt}}_{U \cap V = \emptyset} \Rightarrow U \cap A = \emptyset \text{ oder } V \cap A = \emptyset.$$

D.h., A nicht zshgd $\Leftrightarrow$ $\exists\, U, V$ offen, disjunkt mit $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$

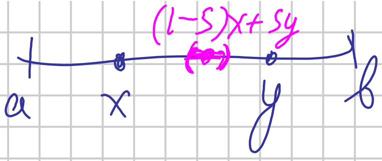
Bsp 5.2 1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nicht zshgd: $U := (-\infty, \sqrt{2})$, $V = (\sqrt{2}, \infty)$

2) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist zshgd

Beweis Ang., $[a,b] \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cap [a,b] \neq \emptyset$, $V \cap [a,b] \neq \emptyset$.

Wähle $x \in U \cap [a,b]$, $y \in V \cap [a,b]$

Betr. $s := \sup \underbrace{\{t \in [0,1] : (1-t)x + ty \in U\}}_{=: M \neq \emptyset,\ \text{da } 0 \in M \ (\text{da } x \in U)} \in [0,1]$



<u>Fall 1</u> $x_s := (1-s)x + sy \in U$. Da U offen ist, $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_s) \subset U$

$\Rightarrow s$ ist keine obere Schranke von M ↯

<u>Fall 2</u> $x_s \in V$. Da V offen, $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(s) \subset V$

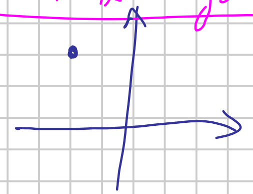
$\Rightarrow s$ ist nicht die kleinste obere Schranke ↯

Also liegt x_s nicht in $U \cup V$ ↯

Analog gilt: $\boxed{\forall \text{ Intervall } I \subset \mathbb{R} \text{ ist zshgd}}$

Ü Rückrichtung. $I \subset \mathbb{R}$ zshgd $\Rightarrow I$ Intervall.

3) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ ist zshgd – kommt später

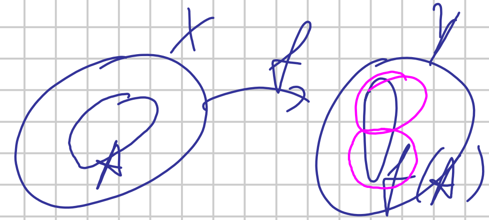


Satz 5.3 Seien X, Y TR, $A \subset X$ und $f : X \to Y$ <u>stetig</u>. Dann gilt:

$$\boxed{A \text{ zshgd} \Rightarrow f(A) \text{ zshgd}}$$

(Stetige Bilder zshgd. Mengen sind zshgd)

<u>Beweis</u> Ü

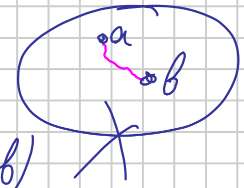


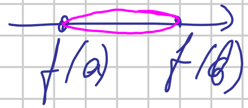
Folgerung 5.4 (Zwischenwertsatz für TR)

Seien X ein zusammenhängender TR, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in X$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis Fall 1 : $f(a) = f(b)$ – klar.

Fall 2 $f(a) \neq f(b)$, OBdA $f(a) < f(b)$

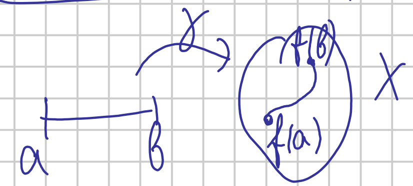




Da $f(X)$ zshgd (5.3) in $\mathbb{R}$, also ist $f(X)$ ein Intervall (5.2, 2).

$\Rightarrow [f(a), f(b)] \subset f(X)$. ∎

Def. 5.5 1) Sei X ein TR und $\gamma : [a,b] \to X$ stetig. Dann heißt γ **Weg** in X. Dabei heißen $\gamma([a,b]) \subset X$ die **Spur** von γ, $\gamma(a)$ der **Anfangs-** und $\gamma(b)$ der **Endpunkt** von γ.

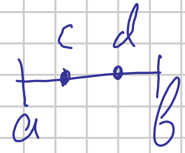


2) Eine Menge $A \subset X$ heißt **wegzusammenhängend** (wegzshgd), wenn $\forall x, y \in A \ \exists$ Weg $\gamma : [a,b] \to A$ mit $x = \gamma(a)$ und $y = \gamma(b)$.

d.h., $\forall$ zwei Punkte aus A kann man durch einen Weg in A verbinden.

$\boxed{\text{Bsp 5.6}}$

1) $[a,b]$ ist zshgd: $\forall [c,d] \subset [a,b]$



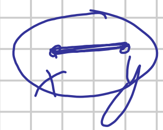
def. $\gamma : [c,d] \to [c,d]$, $\gamma(t) = t$

(Für $c = d$ def. $\gamma : [a,b] \to \{c\}$, $\gamma(t) = c$.)

2) $\forall$ <u>konvexe</u> Menge A in einem <u>normierten</u> Raum ist wegzshgd.

Dabei heißt A <u>konvex</u>, wenn $\forall x,y \in A$ gilt:

$$[x,y] :\equiv \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\} \subset A$$



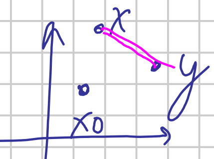
<u>Beweis</u> Für $x,y \in A$ def. $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) := (1-t)x + ty$

γ ist stetig (sogar Lipschitz-stetig:

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|(s-t)x\| + \|(t-s)y\| \underset{\text{Eigensch. der Norm}}{=} |t-s|\,(\|x\| + \|y\|))$$

3) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ wegzshgd. (Bzgl. der Euklidischen Top.)

<u>Beweis</u> Seien $x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$

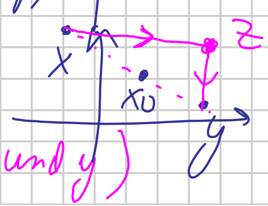


<u>Fall 1</u> $x_0 \notin [x,y]$. Def. γ wie in 2): (geraden Weg)

<u>Fall 2</u> $x_0 \in [x,y]$

Sei $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ mit $x_0 \notin [x,z]$, $x_0 \notin [z,y]$

(nimm z nicht auf der Geraden durch x und y)



Def. $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ durch

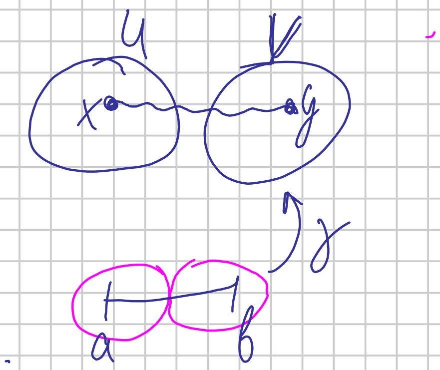
$$\gamma(t) := \begin{cases} (1-t)x + tz, & t \in [0,1] \\ (2-t)z + (t-1)y, & t \in [1,2] \end{cases}$$

– verbindet x und z

– verbindet z und y.

(Warum stetig?) ∎

Satz 5.7 Jede wegzshgd. Menge ist zshgd.



__Beweis__ Ang., $A \subset X$ ist wegzshgd, aber nicht zshgd.

Seien U, V offen, disjunkt mit $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$.

Wähle $x \in A \cap U$, $y \in A \cap V$.

Da A wegzshgd, $\exists$ Weg $\gamma : [a,b] \to A$ mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Da γ stetig ist, sind $\gamma^{-1}(U)$, $\gamma^{-1}(V)$ offen in $[a,b]$, disjunkt,

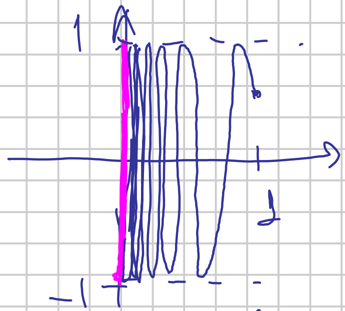
$[a,b] \subset \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$, $a \in \gamma^{-1}(U)$, $b \in \gamma^{-1}(V)$

↯ ($[a,b]$ zshgd: Bsp. 5.2, 2)) ∎

__Achtung__: Rückrichtung i.A. falsch:

Bsp 5.8 Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

und betr. $A \subset \mathbb{R}^2$ mit



$A := \operatorname{Graph}(f) \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$

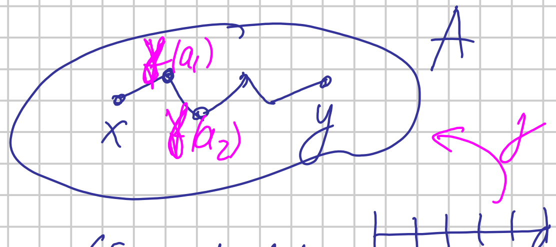
Dann ist A zshgd, aber nicht wegzshgd :)!!

Aber es gilt:

$\boxed{\text{Satz 5.9}}$ Für offene Mengen A eines normierten Raumes gilt:

A zshgd $\iff$ A wegzshgd.

Bem. Eine offene (weg)zshgd. Menge in $\mathbb{R}^d$ heißt Gebiet.



Beweis "$\Leftarrow$" Satz 5.7.

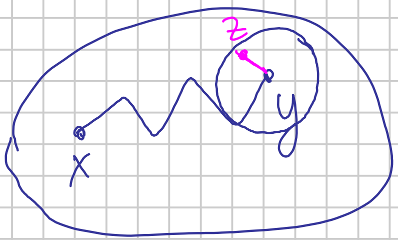
"$\Rightarrow$" Idee: Finde $\forall x,y \in A$ einen stetigen Streckenzug von x nach y in A, d.h., einen Weg $\gamma : [a,b] \to A$ mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ mit der Eigenschaft: $a \quad a_j \; a_{j+1} \quad b$

$\exists\ a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b \ : \ \gamma((1-t)a_j + t a_{j+1}) = (1-t)\gamma(a_j) + t\,\gamma(a_{j+1})$

$(\forall j = 0,\ldots,n-1$
$\forall t \in [0,1])$

Sei $x \in A$ fest und betr.

$U := \{ y \in A : \exists \text{ stet. Streckenzug } \gamma_{xy} \text{ von } x \text{ nach } y \text{ in } A \}$



zz: $\mathcal{U} = A$ (d.h., $A \subset \mathcal{U}$)

Behauptung 1 $\mathcal{U}$ ist offen.

Bew. Sei $y \in \mathcal{U}$. Da A offen ist, $\exists\, \mathcal{U}_\varepsilon(y) \subset A$

Wir zeigen: $\mathcal{U}_\varepsilon(y) \subset \mathcal{U}$.

Sei $z \in \mathcal{U}_\varepsilon(y)$ und betr.

$\gamma_{xy}: [a,b] \to A$ Streckenzug von x nach y in A

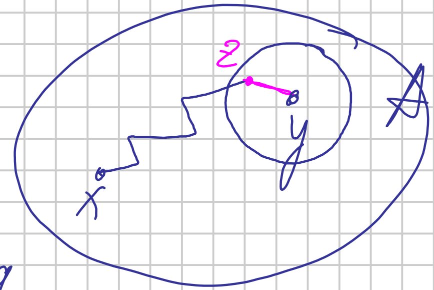
$$\gamma_{xz}: [a, b+1] \longrightarrow A : \gamma_{xz}(t) := \begin{cases} \gamma_{xy}(t), & t \in [a,b] \\ (1-(t-b))y + (t-b)z, & t \in (b, b+1] \end{cases}$$

Dann ist γ_{xz} stetiger Streckenzug von x nach z in A ■ Beh. 1

warum?

Behaupt. 2 $A \setminus \mathcal{U}$ ist offen.

Bew. Sei $y \in A \setminus \mathcal{U}$. Da A offen, $\exists\, \mathcal{U}_\varepsilon(y) \subset A$



Wir zeigen: $\mathcal{U}_\varepsilon(y) \subset A \setminus \mathcal{U}$.

Ang., $\exists\, z \in \mathcal{U}_\varepsilon(y) \cap \mathcal{U}$, d.h., $\exists$ stetigen Streckenzug von x nach z in A. Wie oben $\exists$ dann einen stetigen Streckenzug von x nach y (gehe zuerst nach z und dann von z nach y) $\Rightarrow y \in \mathcal{U}$ $\lightning$ ■ Beh. 2

D.h., $A = \underbrace{U \cup (A \setminus U)}_{\text{offen und disjunkt}}$. Da A zshgd, muss $U = \emptyset$ oder $A \setminus U = \emptyset$ gelten. Aber $\underbrace{x \in U}_{\text{wähle } \gamma : [a,b] \to \{x\}, \text{ also konst.}}$, d.h., $A \setminus U = \emptyset$, d.h., $A \subset U$.

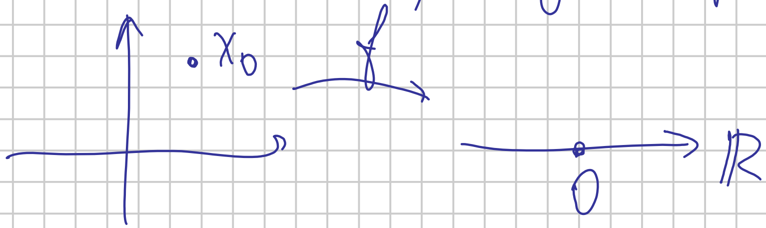
Ein Bsp für Anwendung:

$\boxed{\text{Satz 5.10}}$ 1) $\nexists$ stetige bij. Abb. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

2) $\nexists$ stetige bij. Abb. $f : [0,1]^2 \to [0,1]$

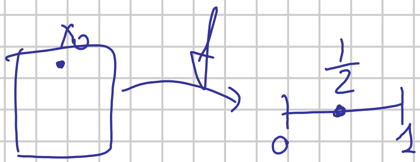
— " — $g : [0,1] \to [0,1]^2$ – d.h., $\nexists$ bij. Weg mit Bild $= [0,1]^2$

Beweis 1) Ang., $\exists f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, bij.



Def. $x_0 := f^{-1}(0)$.

- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht zshgd $(= (-\infty, 0) \cup (0, \infty))$
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ ist (weg)zshgd $\lightning$ zu Satz 5.3

2)  – Analog zu 1) $\nexists$ stet. bij. $f : [0,1]^2 \to [0,1]$

Ang., $\exists$ bij. stet. $g: [0,1] \to [0,1]^2$

Dann ist $g^{-1}: [0,1]^2 \to [0,1]$ autom. stetig, da $[0,1]$ kompakt (Folgerung 4.12) $\lightning$ zum Teil 1. $\blacksquare$

__Bem.__ Zwei TR X, Y heißen homöomorph, wenn gilt:

$\exists$ Bij $f: X \to Y$ s.d. f, f^{-1} stetig.

Schreibe: $X \simeq Y$. Es gilt: $\mathbb{R}^n \not\simeq \mathbb{R}^m$, sobald $n \neq m$ – ohne Beweis im allg. Fall

und (siehe oben): $[0,1]^2 \not\simeq [0,1]$

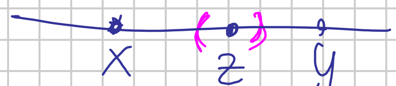
Einschub: __Vereinfachung des Beweises von Bsp 5.2, 1)__

ZZ: $[a,b]$ ist zshgd.

Ang., $[a,b] \subset U \cup V$, U, V offen, disjunkt, $U \cap [a,b] \neq \emptyset$, $V \cap [a,b] \neq \emptyset$

Sei $x \in U \cap [a,b]$, $y \in V \cap [a,b]$, oBdA $x < y$.

Def. $z := \sup([x,y] \cap U)$.



__Fall 1__ $z \in U \Longrightarrow \exists U_\varepsilon(z) \subset U$, d.h., $z + \frac{\varepsilon}{2} \in U$ $\lightning$ (z keine obere Schranke)

__Fall 2__ $z \in V \xRightarrow{U \text{ offen}} \exists U_\varepsilon(z) \subset V$, d.h., $z - \frac{\varepsilon}{2}$ auch obere Schranke $\lightning$ (z kein Sup)

V offen

Literatur Diese Sektion: siehe Tretter, Königsberger

Mehr über Topologie: siehe www.math.uni-leipzig.de/~eisner/topologie.html

6. Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^d$

Erinnerung 1) Lin A: $\mathbb{R}^d$ ist ein VR mit Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h., $\forall x \in \mathbb{R}^d \ \exists! \ t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$ mit $x = t_1 e_1 + \ldots + t_d e_d$

(hier ist $x = (t_1, \ldots, t_d)$, also: Koordinaten)

Umgekehrt, $\forall$ endlichdim. $\mathbb{R}$-VR V mit Basis $v_1, \ldots, v_d$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^d$ durch

$$x = t_1 v_1 + \ldots + t_d v_d \longmapsto \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

bij, linear, Umkehrung automatisch linear

Eine Abb. $L : \underbrace{V_1 \to V_2}_{\text{VR}}$ heißt **linear**, (oder $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^m$)

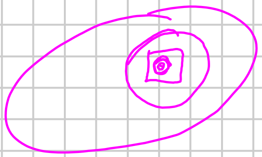
wenn:

$$L(x+y) = Lx + Ly \quad \forall x, y \in V_1, \ \forall c \in \mathbb{R}$$
$$L(c \cdot x) = c \cdot Lx$$

2) Zwei Normen $\|\cdot\|, |||\cdot||| : V \to \mathbb{R}$ (oder: $\mathbb{R}^d$) heißen äquivalent, wenn:

$$\exists\, c, C > 0 \text{ mit } c\,\|x\| \leq |||x||| \leq C \cdot \|x\| \quad \forall x \in V.$$

Ü: Ä'relation auf {Normen auf V}. In diesem Fall sind offene Mengen bzgl. dieser Normen gleich (als Vereinigung von Kugeln) Ü / HÜ



$\Rightarrow$ die Topologien sind gleich.

Außerdem: gleiche konv. Folgen usw.

3) Auf $\mathbb{R}^d$:

$$\|x\|_\infty = \max\{|t_1|, \dots, |t_d|\} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{d} |t_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{für } p \geq 1$$

(insb.: $\|x\|_1 = |t_1| + \dots + |t_d|$.)

$\boxed{\text{Beobachtung 6.1}}$ Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt:

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x \iff x_n \text{ konv. koordinatenweise gegen } x,$$

d. h., $(x_n)_j \to (x)_j \quad \forall j = 1, \dots, d$ ($\mathbb{R}$, j-te Koord.)

__Beweis__ "$\Rightarrow$" Sei $j \in \{1, \dots, d\}$. Dann gilt:

$$0 \leq |(x_n - x)_j| \leq \max_{k=1,\dots,d} |(x_n - x)_k| = \|x_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (nach Voraus.)

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$. Nach Vorauss.

$$\exists N_1 : \quad \forall n \geq N_1 \quad |(x_n - x)_1| < \varepsilon$$

$$\ldots$$

$$\exists N_d : \quad \forall n \geq N_d \quad |(x_n - x)_d| < \varepsilon$$

Damit gilt $\forall n \geq \max\{N_1, \ldots, N_d\} : \max\limits_{j=1,\ldots,d} |(x_n - x)_j| < \varepsilon$ ∎

$\boxed{\text{Satz 6.2}}$ Sei $K \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt:

K ist kompakt bzgl. $\|\cdot\|_\infty \iff K$ abg., beschr. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Beweis $\Rightarrow$ gilt immer in MR! Satz 4.10

$\Leftarrow$ Sei $(x_n) \subset K$. Zz: $\exists$ konv. TF -Teilfolge mit Limes in K.

(komp. = Folgenkomp. in MR - Satz 4.7).

Erinnere: wahr für $\mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstraß bzw. Folgerung 4.9, 2))

Also $\exists$ TF $(x_n^{(1)})$ von (x_n) s.d. die erste Koordinate konv.

(da die ersten Koord. beschränkt sind)

Wieder B.-W.: $\exists$ Teilfolge $(x_n^{(2)})$ von $(x_n^{(1)})$ (und damit von (x_n))

s.d. die 2. Koord. konv. (und die 1. Koord. auch!)

Usw.: $\exists$ TF $(x_n^{(d)})$ von (x_n) s.d. alle Koord. konvergieren.

Beob. 6.1: (x_n) konv. bzgl. $\|\cdot\|_\infty \Longrightarrow$ Limes $\in K$. ∎

K abg.

Satz 6.3 Auf $\mathbb{R}^d$ (und damit auf $\forall$ endlichdim. VR) sind alle Normen äquivalent.

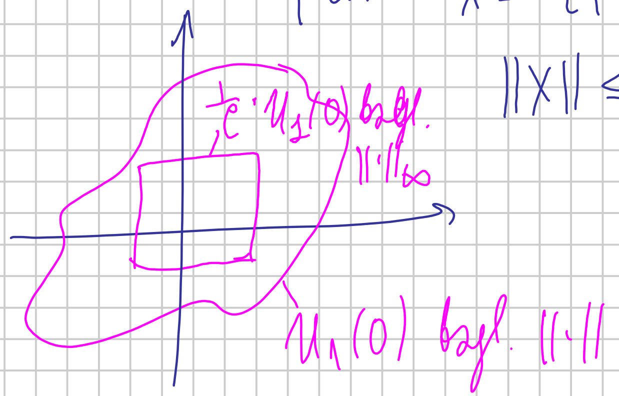
__Beweis__ Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Norm.

Es reicht zz: $\|\cdot\|$ äquiv. zu $\|\cdot\|_\infty$ (Warum?)

Für $x = t_1 e_1 + \dots + t_d e_d$ gilt:

$$\|x\| \leq |t_1| \|e_1\| + \dots + |t_d| \cdot \|e_d\| \leq C \max_{j=1,\dots,d} |t_j| = C \|x\|_\infty$$

$C := \|e_1\| + \dots + \|e_d\|$



Betr. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) := \|x\|$.

- f ist Lipschitz-stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$:

$$|f(x) - f(y)| = \big| \|x\| - \|y\| \big| \underset{\text{Umgek. }\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|x - y\| \leq C \cdot \|x - y\|_\infty.$$

- $K := \{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_\infty = 1 \}$ – Einheitssphäre bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Warum? – abg. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und beschr. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

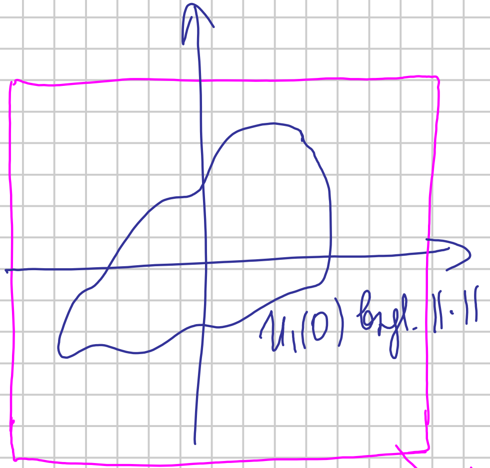
$\Longrightarrow K$ kompakt bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Satz 6.2

Also nimmt f auf K Minimum an (Satz 4.15):

$\exists x_0 \in K$ mit $\|x_0\| = f(x_0) \leq f(x) = \|x\| \quad \forall x \in K$.

Da $x_0 \neq 0$ (da $x_0 \in K$), gilt $c := \|x_0\| > 0$. Wir haben $\forall x \neq 0$



$\frac{1}{c} \cdot U_1(0)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$$\|x\| = \underbrace{\Big\| \underbrace{\frac{x}{\|x\|_\infty}}_{\in K} \Big\|}_{= f\left(\frac{x}{\|x_0\|_\infty}\right) \geq f(x_0) = c} \cdot \|x\|_\infty \geq c \cdot \|x\|_\infty$$

$\boxed{\text{Bem. 6.4}}$ Also gilt insb. $\forall$ Norm auf $\mathbb{R}^d$:

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \iff (x_n)_j \xrightarrow[n\to\infty]{} (x)_j \quad \forall j = 1, \dots, d,$

d.h., Konv. = koordinatenweise Konv.

$\|x_n - x\| \leq C\|x_n - x\|_\infty \longrightarrow 0$ und umgekehrt

Ü Prüfen Sie direkt, dass $\|\cdot\|_\infty$ äquiv. zu $\|\cdot\|_p$ ist $(\forall p \geq 1)$

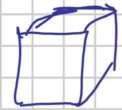
Die Topologien sind alle gleich ($\forall$ Norm), diese Topolgie nennt man Euklidische Topologie.

Als Folgerung bekommen wir

$\boxed{\text{Satz 6.5}}$ (Heine – Borel)

Für $K \subset \mathbb{R}^d$ gilt: $\boxed{K \text{ komp.} \iff K \text{ abg. und beschränkt}}$

Beweis: Satz 6.2 + Satz 6.3 $\blacksquare$

Bem. Insb. sind Mengen von der Form $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$  kompakt. Der Satz von Tychonoff aus der Topologie besagt, dass beliebige Produkte komp. Mengen/Räumen wieder kompakt sind – ohne Details hier.

$\boxed{\text{Satz 6.6}}$ $\mathbb{R}^d$ ist vollständig, d.h., $\forall$ Cauchyfolge aus $\mathbb{R}^d$ konv.

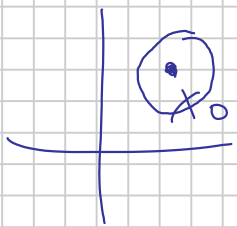
Beweis Sei $(x_n) \in \mathbb{R}^d$ Cauchy, d.h., z.B., $\underbrace{\|x_n - x_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0}_{\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n,m \geq N\ \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon}$

Da $|(x_n - x_m)_j| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$ $\forall j = 1, \dots, d$, sind die Folgen $((x_n)_1)_{n=1}^\infty, \dots, ((x_n)_d)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ Cauchy.

Ana 1: Cauchyfolgen aus $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ konv. $\Rightarrow$ (x_n) konv. koordinatenweise $\Rightarrow$ konv. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. (oder $\forall$ anderen Norm). ∎

<u>Bem.</u> Wie für alle MR gilt für $f: \underset{\subset \mathbb{R}^d}{D} \to \mathbb{R}^m$:

- f stetig $\Leftrightarrow$ f folgenstetig $\Leftrightarrow$ f stetig in $\forall x \in D$
- f stetig in $x_0 \in D$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,



wobei $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c}$ $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \forall x \in D$

$x \in \underbrace{\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)}_{= U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(c)$

- $\left.\begin{array}{l} f \text{ stetig} \\ D \text{ komp./zshgd} \end{array}\right\} \Rightarrow f(D)$ komp./zshgd
- $m = 1$, D komp., f stetig $\Rightarrow$ f nimmt Max und Min an.

VII Differentialrechnung in $\mathbb{R}^d$

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $a \in D$. Wie def. man Differenzierbarkeit
$\quad D \subset \mathbb{R}^d$
bzw. Ableitung von f in a?

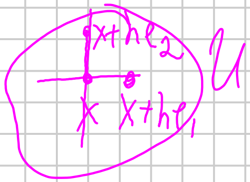
Forster, Heuser

1. Partielle Ableitungen

d.h., $m=1$

Def. 1.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$.
Dann heißt f im Punkt x partiell diff'bar in der j-ten Koordinatenrichtung, wenn der Limes

$$\boxed{D_j f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h\cdot e_j) - f(x)}{h}}$$



existiert, wobei $j \in \{1,\dots,d\}$, $e_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ ← j-te Koordinate.

Dieser Limes heißt j-te partielle Ableitung von f in x, schreibe auch $f_{x_j}(x)$.

Bem. 1) Da $\mathcal{U}$ offen ist, $\exists\, \mathcal{U}_\delta(x) \subset \mathcal{U}$, d.h. $\forall h$ mit $|h| < \delta$ gilt $x + h e_j \in \mathcal{U}$

2) $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ ist gewöhnliche Ableitung der Fkt

$$f_j : (x_j - \delta, x_j + \delta) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{def. durch}$$

$$f_j(\xi) := f(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \dots, x_d)$$

im Punkt x_j.

$f(x + he_j) =$
$= f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d)$

(halte $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d$ fest und variiere die j-te Koordinate)

(Warum?)

Also gilt $\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j'(x_j)$

klassische Abl. aus Ana 1.

Def 1.2 Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann heißt $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

- <u>partiell diff'bar</u>, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ $\forall j = 1, \dots, d$ $\forall x \in \mathcal{U}$.
- <u>stetig partiell diff'bar</u>, wenn alle part. Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

existieren und stetig sind. (bzgl. egal welcher Norm)

$\boxed{\text{Bsp. 1.3}}$ 1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := e^{x^2+y^2}$ ist stetig partiell diff'bar mit

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = 2y e^{x^2+y^2}$$

– stetig, da $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ stetig (Warum?) $|x| \leq \|(x,y)\|_\infty$ und Produkt, Summe und Verkettung stetiger Fkt. stetig ist.

2) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$

<u>Behauptung.</u> f ist auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ stetig part. diff'bar mit

$$f_{x_j}(x) = \frac{x_j}{\|x\|_2}$$

<u>Beweis</u> Für $j \in \{1, \dots, d\}$ gilt

$$f_{x_j}(x) = [\text{Kettenregel aus Ana I}] = \frac{\cancel{2} x_j}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}}$$

– stetig als Kombination stet. Fkt. $\forall x \neq 0$. [redacted]

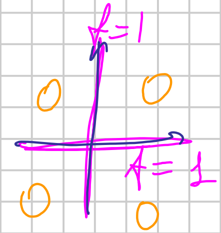
Produkt, Summe, Quotient, Verkettung

<u>Achtung</u>: In $x=0$ ist f nicht partiell diff'bar:

$$\frac{f(0,\dots 0,h,0,\dots,0)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h>0 \\ -1, & h<0 \end{cases}$$

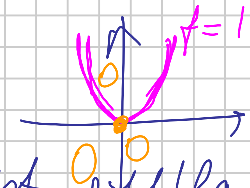
$\boxed{\text{Bem. 1.4}}$ 1) stetig part. diff'bar $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ part. diff'bar $\mathcal{U}$

2) part. diff'bar $\overset{\text{in } x}{\not\Rightarrow}$ stetig in x $\boxed{\text{Bsp}}$



$x=0$.

Aber: stetig part. diff'bar
$\Rightarrow$ stetig (kommt später) $\boxed{\text{Bsp}}$



$\boxed{\text{Def. 1.5}}$ Sei $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^d$ offen, $x\in\mathcal{U}$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ part. diff'bar.

Dann heißt

$$\operatorname{grad} f(x) := \nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\right)\in\mathbb{R}^d$$

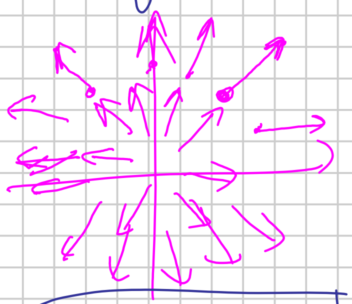
Nabla

der Gradient von f in x

∇ ist ein vektorwertiger Differentialoperator $f\mapsto \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_d}\right)$

Bsp 1.6 Für Fkt aus Bsp 1.3 gilt:

1) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $\nabla f(x,y) = \left(2x e^{x^2+y^2}, 2y e^{x^2+y^2}\right)$ Ü: Zeichnung



$\leftarrow$ 2) $f(x) = \|x\|_2$, $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$ für $x \neq 0$

Bem. 1.7 (Produktregel für ∇)

$f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, part. diff'bar $\Longrightarrow$ $f \cdot g$ part. diff'bar und

$$\boxed{\nabla(fg) = \underbrace{\nabla f}_{\text{Vektor-wertig}} \cdot \underbrace{g + f}_{\mathbb{R}\text{-wertig}} \cdot \underbrace{\nabla g}_{\text{Vektor-wertig}}}$$