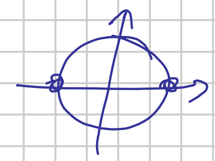
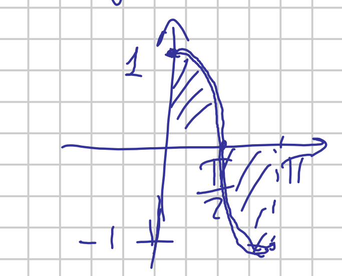
Notiztitel 23.04.2019

Bsp 2.8

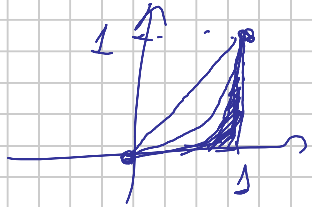
1) $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0$



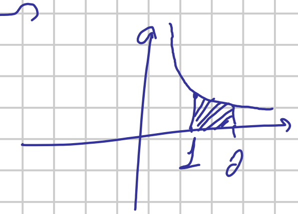


$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

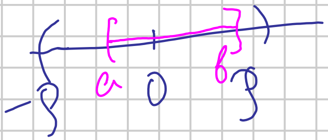
2) $\int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$



$\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln x\right]_1^2 = \ln 2$



3) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Pot'Reihe um 0 mit Konv'Radius $\rho > 0$.



Dann gilt nach Satz 1.19 $\forall [a,b] \subset (-\rho, \rho)$

$$\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

Konkrete Methoden, $\int_a^b f$ zu bestimmen:

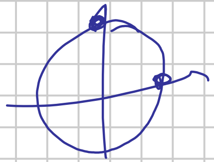
$\boxed{\text{Folgerung 2.9}}$ (Partielle Integration)

Sei $u, v \in C^1[a,b]$. Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b u v' = [uv]_a^b - \int_a^b u' v}$$

Beweis $[uv]_a^b \underset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_a^b (u \cdot v)' \underset{\text{Produktregel für Abl.}}{=} \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp 2.10}}$



1) $\int_0^{\pi/2} x \underbrace{\cos x}_{(\sin x)'} \, dx = \begin{bmatrix} u := x \\ v := \sin x \end{bmatrix} = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin x \, dx}_{[-\cos x]_0^{\pi/2}}$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} - 0 - \left[-\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\cos 0}_{1} \right] = \frac{\pi}{2} - 1$

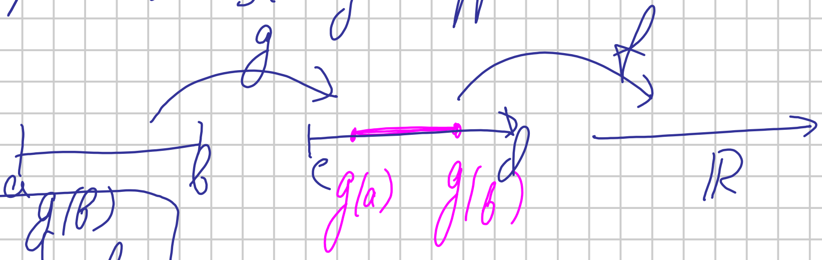
2) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ v = e^x \end{bmatrix} = \underbrace{[x^2 e^x]_0^1}_{e - 0} - 2 \int_0^1 x e^x \, dx =$

$$\int_0^1 x e^x \, dx = \left[\begin{smallmatrix} u = x \\ v' = e^x \end{smallmatrix}\right] = \underbrace{[x e^x]_0^1}_{e-0} - \int_0^1 e^x \, dx = e - \underbrace{[e^x]_0^1}_{=1} = e - (e-1)$$

$$= e - 2.$$

$\boxed{\text{Folgerung 2.11}}$ (Substitutionsregel)

Seien $g : [a,b] \to [c,d]$ streng $\uparrow$ und stetig diff'bar und $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig.



Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f}$$

Bem. Formal gilt: $\displaystyle\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{=:y})\underbrace{g'(x)dx}_{=:dy} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$, y geht von $g(a)$ bis $g(b)$

Beweis Sei F eine Stammfkt von f. Dann gilt:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f \underset{\text{Hauptsatz}}{=} F(g(b)) - F(g(a)) = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) \underset{\text{Hauptsatz}}{=}$$

$$= \int_a^b (F\circ g)' = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx \quad \blacksquare$$

Kettenregel für Abl.

Bsp 2.12 1) $\int_0^1 x\cos(x^2)\,dx = \begin{bmatrix} y := x^2 \\ dy = 2x\cdot dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos y\, dy = \frac{1}{2}\left[\sin y\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sin 1$

2) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} y := x^2+1 \\ dy = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\left[\ln y\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2.$

Bsp 2.13 Königsberger (Integration von rationalen Fkt'en von trigonometrischen Fkt'en)

Wie berechnet man $\int_a^b R(\cos x, \sin x)\,dx$ bzw. $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, wobei R eine rationale Fkt von 2 Variablen ist?

(z.B. $\int_a^b \frac{\cos^2 x \sin x - 5}{\sin^{17} x + 5\sin x\cos x}\,dx$

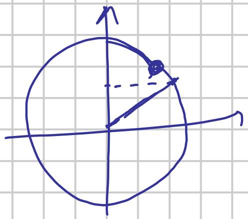
Trick: Substitution $y := \tan\frac{x}{2}$. Es gelten:

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy,$$ ü Hü

d.h., wir haben

$$\int_a^b R(\cos x, \sin x)\,dx = 2\int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}} \underbrace{R\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right)\frac{1}{1+y^2}}_{\text{klassische rat. Fkt}}\,dy$$

$\boxed{\text{Bsp 2.14}}$ $$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{array}{l} y := \tan\frac{x}{2} \quad dx = \frac{2dy}{1+y^2} \\ \sin x = \frac{2y}{1+y^2} \end{array}\right] = \int_{\tan\frac{\pi}{6}}^{\tan\pi/4} \frac{\cancel{2}dy}{\cancel{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\frac{\cancel{2}y}{\cancel{1+y^2}}}$$



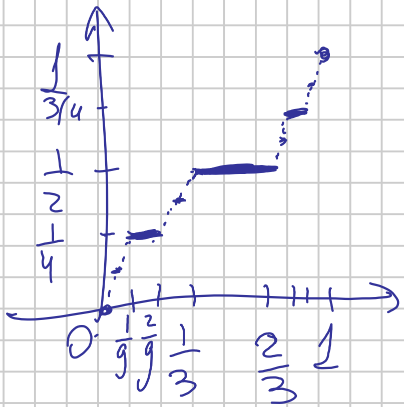
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dy}{y} = \left[\ln y\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \underbrace{\ln 1}_{0} - \underbrace{\ln\frac{1}{\sqrt{3}}}_{-\ln\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{Bsp 2.15}}$ ($\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ gilt nicht immer)

Sei $f: [0,1] \to [0,1]$ die Cantortreppe.

Erinnere (Bsp III.4.7 im WS): f ist stetig und $\nearrow$.

Die Ableitung f' ex. (und $=0$) auf allen offenen weggewischten Intervallen $(\frac{1}{3},\frac{2}{3}), (\frac{1}{9},\frac{2}{9}), (\frac{7}{9},\frac{8}{9}), \ldots$

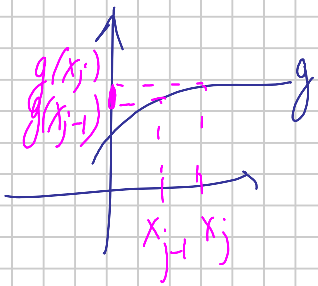


$\Longrightarrow f' \in R[a,b]$, da unstetig auf einer Menge mit Lebesguemaß Null (Lebesgue-Kriterium) und $\int_0^1 f' = 0 \neq 1 = f(1) - f(0)$. (Warum?)

$\boxed{\text{Bem. 2.16}}$ Heuser

(Riemann-Stieltjes-Integral)

Analog zum Riemann-Integral def. man das Riemann-Stieltjes-Integral von f bzgl. des Integrators g mit Hilfe von Riemann-Stieltjes-Summen



$$S_g(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\underbrace{(g(x_j) - g(x_{j-1}))}_{\text{statt } x_j - x_{j-1}}$$

bzw. Ober- und Untersummen

$$U_g(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

$$O_g(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1})).$$

Hier nimmt man oft $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton oder mit beschr. Variation.

Dabei ist $\forall$ stetige Fkt f bzgl. g mit $Var(g) < \infty$ integrierbar mit

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \|f\|_\infty \cdot \underbrace{Var(g)}_{\text{für } g(x)=x \text{ gilt } Var(g)=b-a \text{ - warum?}}$$

Es gelten analoge Regeln wie Linearität, Monotonie (wenn $g \nearrow$), Substitutionsregel usw.

Außerdem gilt $\forall g \in C^1[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f\,dg = \underbrace{\int_a^b f \cdot g'}_{\text{normales R.-Integral}}} \quad - \text{HÜ}$$

Bsp: HÜ, z.B.:

g

3. Uneigentliche Integrale

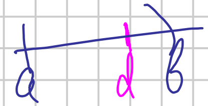
Buch Tretter

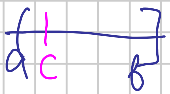
Frage Wie def. man Integrale für

- unbeschr. Fkt'en auf beschr. Intervallen? (Typ 2)
- Fkt'en auf unbeschr. Intervallen (Typ 1)

$\boxed{\text{Def. 3.1}}$ Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (beschr. oder unbeschr.). Eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ heißt lokal Riemann-integrierbar, wenn $\forall\, [c,d] \subset I$ $f|_{[c,d]}$ R.-integr. ist.

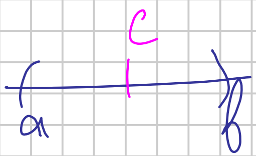
Def. dann das uneigentliche Integral $\int_I f$





- für $I = [a,b)$ oder $[a,\infty)$ bzw. $I = (a,b]$ oder $(-\infty,b]$ durch

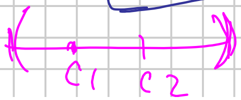
$$\int_a^b f := \lim_{d \nearrow b} \int_a^d f \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f := \lim_{c \searrow a} \int_c^b f$$



- für $I = (a,b)$ oder $(-\infty,\infty)$ durch

$$\int_a^b f := \underbrace{\int_a^c f}_{} + \underbrace{\int_c^b f}_{\text{oben def.}} \quad \text{für ein } c \in (a,b).$$

Man nennt das uneigentliche Integral konvergent, wenn die Grenzwerte ex. (im Fall von (a,b) bzw. $(-\infty,\infty)$: beide), sonst divergent, und absolut konvergent, wenn $\int_I |f|$ konv.



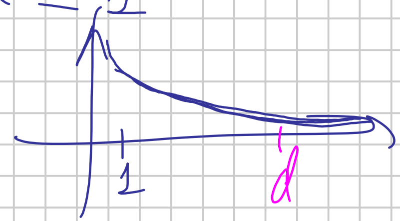
$\boxed{\text{Bem. 3.2}}$ 1) Die Def. hängt nicht von c ab (Linearität des R.-Integr.) (warum?)

2) $[a,b]$ endl., f R.-integr. $\Longrightarrow$ das klassische R.-Integral,

da $x \mapsto \int_a^x f$ sowie $x \mapsto \int_x^b f$ stetig sind.

$$\underbrace{\int_x^b f}_{= \int_a^b f - \int_a^x f}$$

Bsp 3.3 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} = \frac{1}{\alpha-1}, & \text{wenn } \alpha > 1 \\ \text{ist divergent}, & \text{wenn } \alpha \le 1 \end{cases}$



Insbes. gilt $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ konv.} \Longleftrightarrow \alpha > 1}$

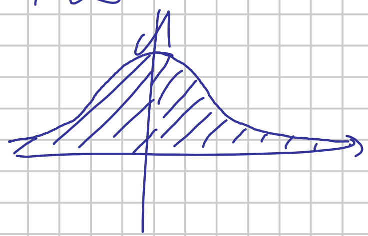
__Bew.__ __Fall 1__ $\alpha \neq 1$. Es gilt für $d > 1$:

$$\int_1^d \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^d = \frac{d^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \xrightarrow[d \to +\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{wenn } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{wenn } \alpha < 1. \end{cases}$$

__Fall 2__ $\alpha = 1$:

$$\int_1^d \frac{dx}{x} = \ln d - \ln 1 = \ln d \longrightarrow +\infty$$

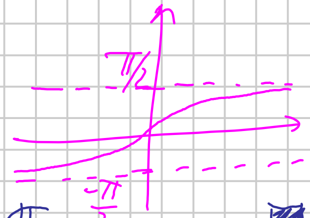
2): $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}}$ und $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi}$



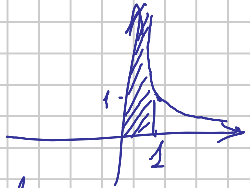
Beweis $\forall d>0$ gilt $\int_0^d \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^d = \arctan d \xrightarrow[d\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$

Analog: $\forall c<0$ gilt $\int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan c \xrightarrow[c\to-\infty]{} \frac{\pi}{2}$, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} = \pi$. ■

(oder: Symmetriegründe)



3) $\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ konv.} \iff \alpha < 1}$ Ü



Prop. 3.4 (Majorantenkriterium für uneigentliche integrale)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein intervall und $f, g: I \to \mathbb{R}$ lokal R-integrierbar. Dann gilt die implikation

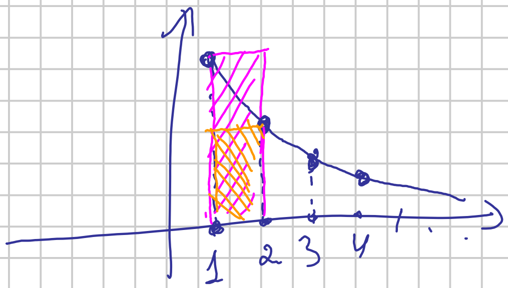
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} |f| \le g \\ \int_I g \text{ konv.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_I f \text{ konv. absolut und } \left|\int_I f\right| \le \int_I |f| \le \int_I g}$$

Beweis: Ü (folgt aus Rechenregeln für $\int_\alpha^\beta$ und lim) "■"

Satz 3.5 (integralvergleichskriterium für Reihen)

Sei $f: [1,\infty) \to [0,\infty)$ ↘. Dann gilt:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konv.} \iff \int_1^{\infty} f \text{ konv.}}$$



<u>Beweis</u> Für $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt nach Monotonie

$$\underbrace{f(n+1)}_{\substack{\min f \\ [n,n+1]}} \le \int_n^{n+1} f \le \underbrace{f(n)}_{\substack{\max f \\ [n,n+1]}}$$

Summation liefert

$$\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \overset{(1)}{\le} \int_1^{N+1} f \overset{(2)}{\le} \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

$\Rightarrow$ folgt nun aus (2), da $f \ge 0$ $\quad$ ($\int_1^{\infty} f$ konv. $\iff \int_1^{N} f$ ist beschr. in $N \in \mathbb{N}$ – warum?)

$\Leftarrow$ folgt aus (1), da $f \ge 0$ $\quad$ ($\sum_1^{\infty} f(n)$ konv. $\iff$ Partialsummen sind beschr.) $\blacksquare$

<u>Bem.</u> Wir haben mehr bewiesen, und zwar die Relationen

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)}$$

Bsp 3.6 Aus Satz 3.5 und Bsp 3.3 folgt:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konv.} \iff \alpha > 1}$$

VI Topologische Grundlagen

Buch: Querenburg, „Mengentheoretische Topologie"

1. Metrische und normierte Räume

Ziel: abstrakte Definition des Abstandes.

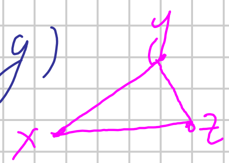
Def. 1.1 (Metrische Räume) – eingeführt von Maurice Fréchet, 1906 (in seiner Doktorarbeit) geprägt von Felix Hausdorff

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ mit folg. Eigenschaften $\forall x, y, z \in X$:

(M1) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positive Definitheit)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Δ-Ungl.)



– der Weg von x nach y ist höchstens so weit wie der Umweg über z.

Das Paar (X,d) heißt ein metrischer Raum. (MR)

$\boxed{\text{Bsp 1.2}}$ (diskrete Metrik)
$\forall$ Menge X besitzt die sog. diskrete Metrik d def. durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \neq y \\ 0, & \text{wenn } x = y \end{cases}$$

– kann nur sehen, ob x und y gleich sind.

(warum Metrik?)

$\boxed{\text{Bem. 1.3}}$ (X, d) ein MR, $Y \subset X \Rightarrow (Y, d)$ ein MR

warum? die Einschränkung $d: Y \times Y \to \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Bsp 1.4}}$ Für $X := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist $d: X^2 \to \mathbb{R}$ def. durch

$$d(x,y) := |x-y|$$

eine Metrik (siehe WS).

Eine Verallgemeinerung davon sind normierte Vektorräume (VR):

$\boxed{\text{Def. 1.5}}$ Sei V ein reeller Vektorraum – siehe Lineare Algebra I. Falls noch nicht gehört, können Sie stattdessen $V := \mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{d\text{-mal}}$ nehmen.

Eine Norm auf V ist eine Abb. $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ mit

(N1) $\|x\| \geq 0$ und $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$. (pos. Definitheit)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (absolute Homogenität)

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Subadditivität oder Δ-Ungl.)

für alle $x, y \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt ein (reeller) normierter VR. (eingeführt von Stefan Banach, polnischer Mathem.)

Satz 1.6 Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR. Dann def. $d: V \times V \to \mathbb{R}$ def. durch

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik – die von der Norm induzierte Metrik.

Beweis (M1) und (M2) klar.

Δ-Ungl.: Seien $x, y, z \in V$. Dann gilt

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \overset{(N3)}{\leq} \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y). \qquad \blacksquare$$

Bsp 1.7 1) Auf $\mathbb{R}^d$ sind $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ gegeben durch

$$\boxed{\|x\|_\infty := \max_{j=1,\dots,d} |x_j|}$$ wir schreiben $j=1,\dots,d$ statt $j \in \{1,\dots,d\}$

$$\boxed{\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |x_j|}$$

zwei Normen (ii), die Maximumsnorm und die 1-Norm.

2) Analog definiert $\boxed{\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|}$

eine Norm (sog. Supremumsnorm) auf dem Raum

$$B[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ beschränkt} \}$$ Ü

und damit auf allen seinen Untervektorräumen wie z. B. $C[a,b]$

Raum aller stetigen Fkt'en auf $[a,b]$

Auch

$$\boxed{\|f\|_1 := \int_a^b |f|}$$

def. eine Norm (sog. 1-Norm) auf $R[a,b]$.

$\boxed{\text{Bsp 1.8}}$ Sei $p \in (1,\infty)$. Wir zeigen, dass

$$\boxed{\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \right)^{1/p}}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ definiert, die p-Norm. Speziell nennt man

$$\boxed{\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2}}$$

die Euklidische Norm und die induzierte Metrik Euklidische Metrik.

(N1) und (N2) sind für $\|\cdot\|_p$ klar (folgen aus Eigenschaften von $|\cdot|$).

Für die Δ-Ungl. brauchen wir die Hölder'sche Ungleichung

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d,$$

Otto Hölder: war 28 Jahre lang Professor in Leipzig.

wobei $q \in (1,\infty)$ die konjugierte Exponente zu p ist mit

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$$

(Bem.: Die Ungl. gilt auch für $p=1$ und $q=\infty$ – warum?)

Der Spezialfall

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d$$

heißt Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Beweis der Hölderschen Ungl. Seien oBdA $x \neq 0$ und $y \neq 0$ (sonst klar).

Erinnere (Satz IV.2.14 – Ungl. zwischen dem gewichteten arithm. und geom. Mittel)

Fall $a=0$ oder $b=0$ ist trivial, Rest: WS

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \quad \forall a,b \geq 0, \text{ da } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Damit haben wir $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ mit $a := \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p}$ und $b := \frac{|y_j|^p}{\|y\|_q^p}$

$$\frac{|x_j| \cdot |y_j|}{\|x\|_p \|y\|_p} \le \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Summation:

$$\frac{\sum_{j=1}^{d} |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_p} \le \frac{1}{p} \cdot \cancel{\frac{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p}{\|x\|_p^p}} + \frac{1}{q} \cancel{\frac{\sum_{j=1}^{d} |y_j|^q}{\|y\|_q^q}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad \blacksquare$$

Beweis der Δ-Ungl. für die p-Norm

zz.: $\boxed{\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p}$ $\forall\, p \geq 1$ $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^d$. – **Minkowski-Ungleichung** –

Hermann Minkowski, deutscher Mathem. und Physiker

Fall $p=1$: (ii).

Fall $p>1$: Für $j \in \{1,\dots,d\}$ def.

$$s_j := |x_j+y_j|^{p-1}.$$

Dann gilt

$$|x_j+y_j|^p = |x_j+y_j| \cdot s_j \leq |x_j| s_j + |y_j| s_j.$$

Höldersche Ungl. impliziert

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{j=1}^d |x_j+y_j|^d \leq \sum_{j=1}^d |x_j| s_j + \sum_{j=1}^d |y_j| s_j$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|x\|_p \|s\|_q + \|y\|_p \|s\|_q = (\|x\|_p + \|y_p\|)\|s\|_q \;=$$

Beobachtung:

$$\|s\|_q = \left(\sum_{j=1}^d |x_j+y_j|^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q}$$

$(p-1)\cdot q = p$, da $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, d.h., $p = q(p-1)$.

$1/q = \frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}$

$$= \left(\sum_{j=1}^d |x_j+y_j|^p\right)^{1/p \cdot p/q} = \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} = \|x+y\|^{p-1}$$

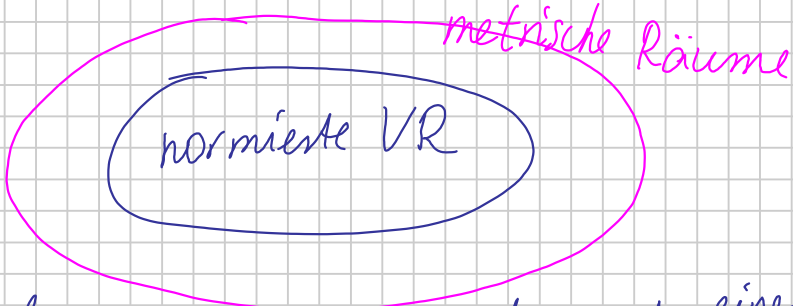
$$\Leftarrow (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x+y\|_p^{p-1}$$

Die Behauptung folgt. ■

Bem. 1) Analog def. $\boxed{\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}}$ eine Norm (die p-Norm) auf $R[a,b]$ bzw. $C[a,b]$ $\forall p \geq 1$: HÜ.

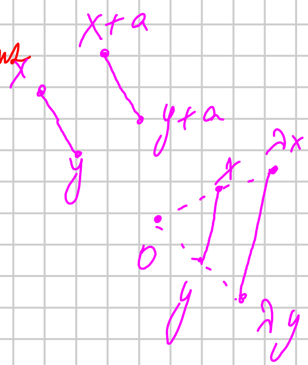
2) Man def. genauso eine Norm auf komplexen VR (ersetze $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$) und bekommt so die induzierte Metrik (z.B. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{C}^d$).

3) Wir haben also:



Nicht jede Metrik auf einem VR kommt aus einer Norm (Bsp: diskrete Metrik auf $\mathbb{R}^d$: $d(2x,2y) \neq 2\,d(x,y)$.) Man kann zeigen:

Eine Metrik d auf einem VR V wird von einer Norm induziert $\iff$ $\begin{cases} d(x,y) = d(x+a, y+a) & \text{Translationsinvariant} \\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y) & \text{Homogenität} \end{cases}$ $\forall x,y,a \in V$! $\forall \lambda \in \mathbb{R}$



($\Rightarrow$ klar, $\Leftarrow$ HÜ (def. $\|x\| := d(x,0)$))

4) Die 2-Norm ist besonders schön, da sie vom Skalarprodukt

$$\langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^{d} x_j y_j \quad \left(\text{bzw. } \langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^{d} x_j \overline{y_j} \text{ im Komplexen}\right)$$

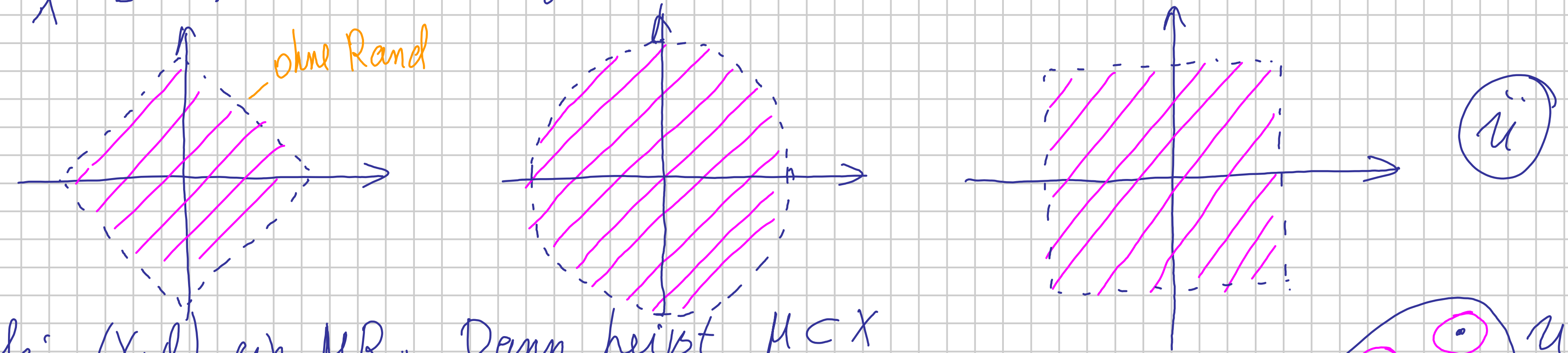
induziert wird, d.h., $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, und es gibt eine zusätzliche Eigenschaft: Orthogonalität (siehe lineare Algebra).

$\boxed{\text{Def. 1.9}}$ Sei (X,d) ein metrischer Raum (MR), $x_0 \in X$ und $r>0$. Dann heißt

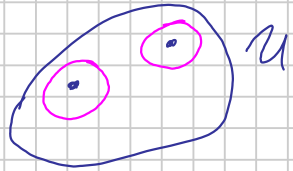
$$U_r(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

die offene Kugel vom Radius r um x_0.

$\boxed{\text{Bsp 1.10}}$ $X = \mathbb{R}^2$. Die Einheitskugeln $U_1(0)$ bzgl. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind:



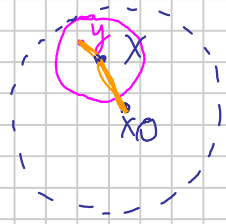
$\boxed{\text{Def. 1.11}}$ Sei (X,d) ein MR. Dann heißt $M \subset X$



- offen, wenn $\forall x \in M \ \exists r>0 : U_r(x) \subset M$
- abgeschlossen, wenn $X \setminus M$ offen ist.

Bsp 1.12 1) Offene Kugeln sind offen.

<u>Beweis</u> Sei $U_r(x_0)$ gegeben und sei $x \in U_r(x_0)$



Betrachte $\delta := r - d(x, x_0) > 0$. Wir zeigen: $U_\delta(x) \subset U_r(x_0)$.

Sei $y \in U_\delta(x)$. Dann gilt:

$$d(y, x_0) \le \underbrace{d(y, x)}_{<\delta,\ \text{da } y \in U_\delta(x)} + d(x, x_0) < \delta + d(x, x_0) \overset{\text{Def. von } \delta}{=} r,$$

d.h., $y \in U_r(x_0)$. ∎

2) Jede abgeschlossene Kugel $K_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) \le r\}$ ist abgeschl. Ü

3) <u>Achtung!</u> Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind,

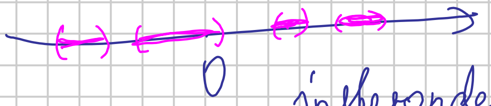
z.B. $M = [0, 1)$ in $\mathbb{R}$ Ü

Nicht offen: $\nexists r > 0$ mit $U_r(0) \subset M$

Nicht abg.: $\mathbb{R} \setminus M$ – analog für 1.

4) Für $\mathbb{R}$ (mit $d(x,y) := |x-y|$) gilt:

$M \subset \mathbb{R}$ ist offen $\Longleftrightarrow$ M = höchstens abz. Vereinigung von offenen Intervallen (a, b). Ü



Insbesondere ist die Cantormenge abgeschlossen.

Analog gilt für $\mathbb{R}^d$: $M \subset \mathbb{R}^d$ offen $\Longleftrightarrow$ M = – " – Kugeln $U_r(a)$. Ü

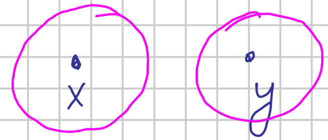
5) In $\mathbb{R}$ sind einpunktige Mengen abg.: $\forall x$ ist $\{x\}$ abg.

$\forall y \neq x$ gilt: $x \notin U_{d(x,y)}(y)$.

Satz 1.13 (Trennungssatz für MR)

Sei (X,d) ein MR und $x,y \in X$. Dann $\exists A, B \subset X$ offen mit

$$x \in A,\ y \in B,\ A \cap B = \emptyset.$$



Beweis Für $r := d(x,y)$ wähle $A := U_{r/2}(x)$, $B := U_{r/2}(y)$.

$x \in A$, $y \in B$ klar. Zz: $A \cap B = \emptyset$. Ang., $\exists z \in A \cap B$. Dann wäre

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r = d(x,y) \quad ↯$$

∎

Bem. 1.14 (Eigenschaften offener Mengen)

Sei (X,d) ein MR.

(a) $\emptyset$ und X sind offen.

(b) Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.

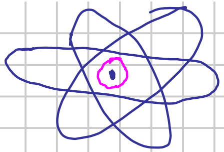
(c) Endliche Durchschnitte —"—.

Beweis (a) $\emptyset$ klar, $X \supset$ alle offenen Kugeln.

(b) Sei I eine (beliebige) Indexmenge und seien A_α, $\alpha \in I$, offen. Zz: $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ offen.

Sei $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Dann $\exists \alpha \in I$ mit $x \in A_\alpha$. Da A_α offen, $\exists\, U_r(x) \subset A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

(c) Seien $A_1, \dots, A_n$ offen und $x \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j$. Nach Vorauss. $\exists\, r_1, \dots, r_n$ mit



$U_{r_j}(x) \subset A_j \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}$. Dann gilt für $r := \min\{r_1,\dots,r_n\}$:

$U_r(x) \subset U_{r_j}(x) \subset A_j \quad \forall j$, d.h., $U_r(x) \subset \bigcap_{j=1}^{n} A_j$.

Bem. Unendliche Durchschnitte von off. Mengen brauchen nicht offen zu sein:

$\boxed{\text{Bsp}}$: $X = \mathbb{R}$, $A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ – offen $\forall n$, aber $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ nicht offen (aber abg.)

$B_n := (-\frac{1}{n}, 1)$: $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0,1)$ – weder offen noch abg.

2. Topologische Räume

Frage: Was kann man tun, wenn man keine Metrik hat?

Idee: Offene Mengen statt Kugeln betrachten/def.

Bem. 1.14 motiviert:

$\boxed{\text{Def. 2.1}}$ Sei X eine Menge und τ eine Menge von Teilmengen von X.

Das Paar (X,τ) heißt topologischer Raum und τ heißt Topologie auf X, wenn:

(T1) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$

(T2) Beliebige Vereinigungen von Mengen aus τ gehören zu τ:

$$U_\alpha \in \tau,\ \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$$

(T3) Endliche Durchschnitte –"–.

$$U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau.$$

Dabei heißen Elemente von τ offen.

Topologie: τοπος = Ort, λογος = Wort

1914: Felix Hausdorff „top. Raum", davor: Euler, Cantor, ...

Bsp 2.2 1) $\forall$ Menge besitzt (mindestens) 2 Topologien:

$\{\emptyset, X\}$ – indiskrete Topologie

$2^X = \{$Teilmengen von $X\}$ – diskrete Topologie ($\forall$ Menge ist offen).

2) $X = \{\cdot, *, o\}$, $\tau = \{\emptyset, \{*\}, \{\cdot, *\}, \{\cdot, *, o\}\}$ (Warum?)

Ü Bestimmen Sie alle Topologien auf X.

3) X unendlich, $\tau := \{A \subset X : X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset, X\}$ – kofinite Topologie (Warum Top.?)

4) $\mathbb{R}$ mit $\tau :=$ beliebige Vereinigungen von offenen Intervallen (a,b) $\cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

– natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ (Warum Top.?).

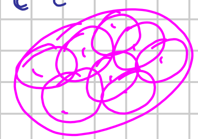
Analog: Sei (X, d) ein MR. Dann ist

$\tau :=$ belieb. Vereinigungen offener Kugeln $\cup \{\emptyset, X\}$

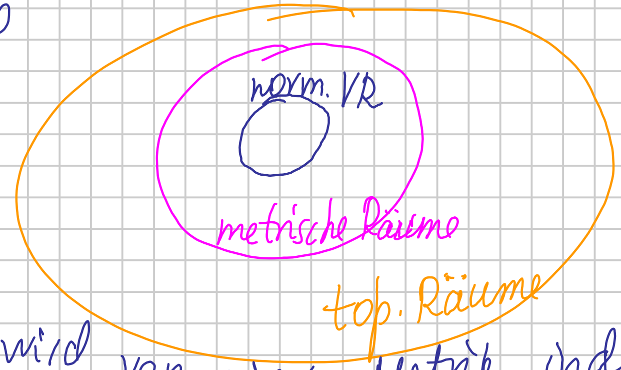
eine Top. Ü – die von d induzierte Topologie.

Dabei gilt: $U \subset X$ offen im Sinne von MR (Def. 1.11) $\Leftrightarrow U \in \tau$.

$\Leftarrow$ klar; $\Rightarrow$ folgt, da $U = \bigcup_{\substack{x \in U \\ r:\, U_r(x) \subset U}} U_r(x)$.

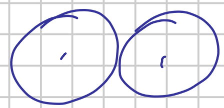


Wir haben also



Bem. 2.3 1) Nicht jede Top. wird von einer Metrik induziert.

z.B. muss dafür (X,τ) ein Hausdorffraum sein, d.h.,



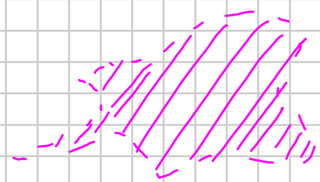
$\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ $\exists A, B$ offen mit $x \in A$, $y \in B$, $A \cap B = \emptyset$

(siehe Satz 1.13) – falsch z.B. für die kofinite Top. (Warum?)

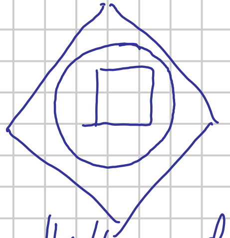
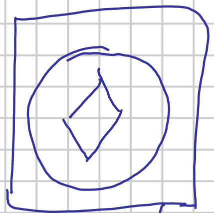
2) Aus Bsp 2.2 4) folgt: $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ (und $\forall \|\cdot\|_p$) erzeugen jeweils eine Topologie auf $\mathbb{R}^d$.

$\|\cdot\|_2$ induziert die natürliche (oder Euklidische) Topologie auf $\mathbb{R}^d$,

d.h., τ = belieb. Vereinigungen von offenen Kugeln.

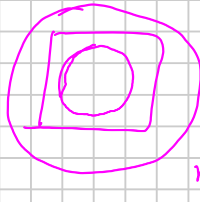


Da die Einheitskugeln $\Diamond$, $\bigcirc$ und $\square$

bzgl. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ durch Multiplikation mit einer pos. Zahl ineinander passen:  und ,

induzieren $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ dieselbe Topologie (offene Mengen sind gleich).

Details: HÜ

Man kann zeigen: alle Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent, d.h., $\forall \|\cdot\|, |||\cdot|||$ $\exists\, c, C > 0$ mit $c\|x\| \le |||x||| \le C\|x\|$ $\forall x$, (d.h.,  — die Einheitskugeln mal Zahl)

insbesondere induzieren alle Normen auf $\mathbb{R}^d$ dieselbe – die natürliche – Topologie.

Beweis kommt in der VL Funktionalanalysis (5. Sem.)