Notiztitel 25.03.2019

Analysis II SS 2019

Homepage der VL: www.math.uni-leipzig.de/~eisner/ana2.html

Wir setzen die Nummerierung vom WS fort und befinden uns im Kapitel IV (Differenzialrechnung).

3. Taylorreihen

Sei $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Frage: Wie approximiert man f mit einfachen Funktionen – Polynomen?

Erinnere: 1) Wenn $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$, dann gilt

$$a_0 = \underbrace{f(x_0)}_{=: f^{(0)}(x_0)}, \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

– warum?

2) Wenn $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-x_0)^j$ – eine Potenzreihe mit positivem Konv.'Radius, dann gilt $a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$ $\forall j \in \mathbb{N}_0$ (wobei $f^{(0)} := f$) (siehe Diff'keit von Potenzreihen) – warum?

D.h., in beiden Fällen gilt

$$f(x) = \underbrace{\sum}_{\text{endlich oder unendlich}} a_j (x-x_0)^j$$

Das motiviert die folg. Def.

$\boxed{\text{Def. 3.1}}$ a) Sei $f: \underbrace{I}_{\text{Intervall}} \to \mathbb{R}$ n-mal diff'bar und $x_0 \in I$. Dann heißt das Polynom T_{n,f,x_0} def. durch

(Brook Taylor 1712) britischer Mathematiker und Künstler, Entdecker des Prinzips des Fluchtpunktes

$$\boxed{T_{n,f,x_0}(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j}$$

das <u>Taylorpolynom n-ten Grades von f in x_0</u>.

b) Wenn $f: \underbrace{I}_{\text{Intervall}} \to \mathbb{R}$ ∞-oft diff'bar ist, heißt die Potenzreihe T_{f,x_0} def. durch

$$\boxed{T_{f,x_0}(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j}$$

die <u>Taylorreihe von f in x_0</u>.

Wenn $x_0 = 0$, heißt $T_{f,0}$ die <u>Maclaurinreihe von f</u>.

1742: Maclaurin: schottischer Mathematiker und Geophysiker

(d.h., $T_{f,0}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} x^j$)

Konkretere Fragen: Wann gilt $f = T_{f,x_0}$? Wie groß ist der Fehler der Approximation durch T_{n,f,x_0}?

Bem. In einem Punkt gilt $f = T_{n,f,x_0}$ immer, nämlich in x_0 (warum?)

$\boxed{\text{Def. 3.2}}$ Sei $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal diff'bar und $x_0 \in I$. Dann heißt $R_n: I \to \mathbb{R}$ def. durch

$$\boxed{R_n := f - T_{n,f,x_0}}$$

der <u>n-te Restglied von f in x_0</u> (oder: Fehler der Approximation durch T_{n,f,x_0}).

Bem. Es gilt: $f(x) = T_{f,x_0}(x) \iff R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Einschub: Landau O und o Symbole

Eine sehr nützliche Notation:

$\boxed{\text{Def. 3.3}}$ (<u>Landau-Symbole</u>) 1905 Edmund Landau deutscher Mathematiker

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ oder ein Endpunkt von I. und $f: I \to \mathbb{R}$. Wir schreiben

- $f(x) = \underline{O}(1)$ oder $f = \underline{O}(1)$, wenn f beschränkt in I ist
- $f(x) = \underline{O}(1)$ für $x \to x_0$, wenn f beschränkt in einer Umgebung von x_0 ist, d.h.,
$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists C > 0 : \forall x \in \underbrace{U_\varepsilon(x_0)}_{(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon)} \cap I, \ |f(x)| \leq C.$$

- $f(x) = o(1)$ für $x \to x_0$, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Wir schreiben oft $\underline{O}$ statt O und $\bar{o}$ statt o, um die Symbole zu unterscheiden.

Sei weiterhin $g : I \to \mathbb{R}$ noch eine Fkt. Wir schreiben:

- $f = \underline{O}(g)$, wenn $f = g \cdot \underline{O}(1)$ gilt, d.h., $\exists h : I \to \mathbb{R}$ beschr. mit $f = g \cdot h$. Analog: $f = \underline{O}(g)$ für $x \to x_0$.
- $f = \bar{o}(g)$ für $x \to x_0$, wenn $f = g \cdot \bar{o}(1)$, d.h., $\exists h : I \to \mathbb{R}$ mit $h = \bar{o}(1)$ und $f = g \cdot h$.

Bem. 1) Analog kann man o und O Symbole für $x \to \pm\infty$ oder für einen beliebigen Häufungspunkt einer Menge definieren. Auch für Folgen kann man o und O verwenden, wie folgt def.:

$a_n = \overline{o}(1)$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (Nullfolge)

$a_n = \underline{O}(1)$, wenn (a_n) beschr. ist.

2) Es gelten also:

$$f = \underline{O}(g) \iff \exists C>0 : \forall x \in I \quad |f(x)| \le C \cdot |g(x)|$$

„$\Rightarrow$" klar, für „$\Leftarrow$" def. $h(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & \text{wenn } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

$$f = \overline{o}(g) \text{ für } x \to x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I \quad |f(x)| \le \varepsilon \cdot |g(x)|.$$

wie oben

Man sagt für
- $f = \underline{O}(g)$: „f wächst nicht wesentlich schneller als g"
- $f = \overline{o}(g)$: „f wächst langsamer als g."

3) Es gilt: $f = \overline{o}(g)$ für $x \to x_0 \implies f = \underline{O}(g)$ für $x \to x_0$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $I = [1, \infty)$:

$\ln x = \overline{o}(x)$ für $x \to \infty$

$x = \overline{o}(x^2)$ —"—

$x^n = \overline{o}(e^x)$ —"— $\forall n \in \mathbb{N}$ (warum?)

$10^{10} \cdot x = \underline{O}(x)$ —"—

2) $I = (0, \infty)$,

$x = \overline{o}(\frac{1}{x})$ für $x \to 0$

$\frac{1}{x} = \overline{o}(x)$ für $x \to \infty$.

(warum?)

Prop. 3.4 (Rechenregeln für Landau-Symbole)

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\underline{O}(1) + \underline{O}(1) = \underline{O}(1), \text{ d.h., } f, g : I \to \mathbb{R},\ f = \underline{O}(1), g = \underline{O}(1) \Rightarrow f+g = \underline{O}(1)$$

$$\underline{O}(1) \cdot \underline{O}(1) = \underline{O}(1)$$

$$\overline{o}(1) + \overline{o}(1) = \overline{o}(1)$$

$$\overline{o}(1) \cdot \overline{o}(1) = \overline{o}(1)$$

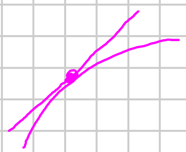
$$\overline{o}(1) \cdot \underline{O}(1) = \overline{o}(1)$$

$$\underline{O}(f \cdot g) = f \cdot \underline{O}(g) = g \cdot \underline{O}(f) = f \cdot g \cdot \underline{O}(1)$$

$$\overline{o}(f \cdot g) = f \cdot \overline{o}(g) = g \cdot \overline{o}(f) = f \cdot g \cdot \overline{o}(1).$$

Beweis: Ü

Zurück zu Taylorpolynomen



Erinnere: f ist diff'bar in $x_0 \Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T_{1,f,x_0} \text{ - lineares Polynom}} + \overline{o}(x-x_0)$

$\left(\text{da } \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \overline{o}(1)\right).$

Wir suchen eine entsprechende Formel für T_{n,f,x_0} für größere n, d.h., eine Approximation von f durch ein Polynom n-ten Grades statt lin. Polynoms, und eine entsprechende Form des Restgliedes

$R_n = f - T_{n,f,x_0}$.

Satz 3.5 (Taylor) – z.B. Buch Tretter „Analysis I"

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^{n+1}(I)$, d.h., $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diff'bar und $x \in I$, $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)},$$

– Taylorsche Formel (= Def. von R_n ☺)

wobei es ein $\xi \in (x_0, x)$ bzw. (x, x_0) ex. mit

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}.$$

– Lagrangesche Form des Restgliedes

Joseph-Louis Lagrange, italienischer Mathematiker und Astronom, Prof. mit 19 in Turin, dann Berlin und Paris

Insbesondere gilt $\boxed{R_n(x) = o((x-x_0)^n)}$ (genauer: $\boxed{R_n(x) = O((x-x_0)^{n+1})}$)

für $x \to x_0$.

qualitative Form des Restgliedes

Bem. Für $x = x_0$ gilt die Aussage trivialerweise für $\xi := x_0$: $R_n(x_0) = 0$, $f(x_0) = f(x_0)$.

Beweis Beobachtung: R_n erfüllt $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R^{(n)}(x_0) = 0$, $R^{(n+1)} = f^{(n+1)}$

Beweis der Beobachtung

Erinnere: $T_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Also gilt

$T_{n,f,x_0}(x_0) = f(x_0)$, d.h., $R_n(x_0) = 0$

$T'_{n,f,x_0}(x_0) = f'(x_0)$, d.h., $R'_n(x_0) = 0$

$\vdots$

$T^{(n)}_{n,f,x_0}(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{\cancel{n!}} \cdot \cancel{n!} = f^{(n)}(x_0)$, d.h., $R^{(n)}_n(x_0) = 0$

$T^{(n+1)}_{n,f,x_0} = 0$, d.h., $R^{(n+1)}_n = f^{(n+1)}$.

■ – Beobachtung.

Idee: benutze den verallg. MWS – Mittelwertsatz, siehe Satz 2.9 (WS) – Erinnere:

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$, diff'bar in (a,b), $g' \neq 0$ in (a,b). Dann $\exists \xi \in (a,b)$:
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Nach dem VMWS $\exists \xi_1, \ldots, \xi_{n+1} \in (x_0, x)$ bzw. (x, x_0) mit

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - \overbrace{R_n(x_0)}^{=0 \text{ nach Beobachtung}}}{(x-x_0)^{n+1} - \underbrace{(x_0-x_0)^{n+1}}_{=0}} \underset{\substack{\exists \xi_1 \text{ zw. } x_0 \text{ und } x \\ (\text{VMWS})}}{=} \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

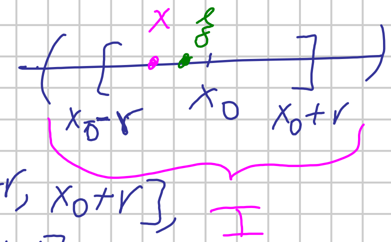
$$= \frac{1}{n+1} \frac{R'_n(\xi_1) - \overbrace{R'_n(x_0)}^{=0}}{(\xi_1-x_0)^n - \underbrace{(x_0-x_0)^n}_{=0}} \underset{\substack{\exists \xi_2 \text{ zw. } \xi_1 \text{ und } x_0 \\ (\text{VMWS})}}{=} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{R''_n(\xi_2)}{n \cdot (\xi_2-x_0)^{n-1}} = \ldots \underset{\substack{\text{induktiv:} \\ \exists \xi_{n+1} =: \xi \text{ zw. } \xi_n \text{ und } x_0}}{=} \frac{R^{(n+1)}_n(\xi)}{(n+1)!}$$

Beobachtung

$$\underset{\text{Beobachtung}}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

also ist die Lagrange-Form von R_n bewiesen.

„insbesondere": Sei $r>0$ s.d. $[x_0-r, x_0+r] \subset I$.



Da $f \in C^{(n+1)}(I)$, ist $f^{(n+1)}$ stetig $\Rightarrow$ beschr. auf $[x_0-r, x_0+r]$,

d.h., $\exists M>0$: $|f^{(n+1)}(\xi)| \le M \quad \forall \xi \in [x_0-r, x_0+r]$.

Wir haben also nach Lagrange-Form des Restgliedes $\forall x \in U_r(x_0)$

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|x-x_0|^{n+1}.$$

Daraus folgt (für ein festes n):

$$R_n(x) = \underline{O}\left(|x-x_0|^{n+1}\right) = \underline{O}\left((x-x_0)^{n+1}\right),$$ da das Vorzeichen für $\underline{O}$ und $\overline{o}$ irrelevant ist

insb. $$R_n(x) = (x-x_0)^n \cdot \underbrace{\underbrace{(x-x_0)}_{\overline{o}(1)} \cdot \underline{O}(1)}_{=\overline{o}(1)} = \overline{o}\left((x-x_0)^n\right).$$ ∎

Bem 1) Wir haben im Beweis die Restgliedabschätzung

$$\boxed{|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|x-x_0|^{n+1}} \quad \forall x \in [x_0-r, x_0+r] \subset I$$

wobei M eine obere Schranke für $|f^{(n+1)}|$ auf $[x_0-r, x_0+r]$ bewiesen

2) Es gibt (viele) andere Formen des Restgliedes. Die sog. Integralform kommt später.

3) je größer n (die Ordnung des T'Polynoms), desto bessere Approximation von f man hat.

4) $n=0$: Mittelwertsatz: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$ für ein ξ zwischen x und x_0.

<u>Frage</u> Wann gilt $f = T_{f,x_0}$, d.h., $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$?

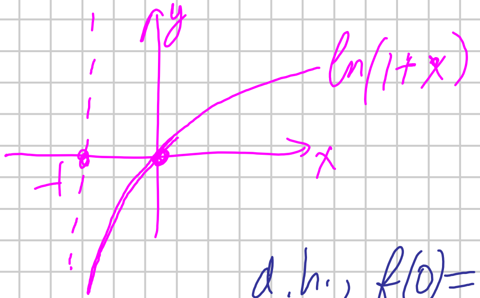
Äquiv.: Wann gilt $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?

$\boxed{\text{Beobachtung 3.6}}$ jede Potenzreihe um x_0 = ihre Taylorreihe in x_0, da aus $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-x_0)^j$ $a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$ folgt

(man kann P'Reihen gliedweise diff.)

$\boxed{\text{Bsp. 3.7}}$ 1) $e^{\cdot}$ - statt x: Variable $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt $\boxed{e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$, d.h., sie stimmt mit ihrer Maclaurin-Reihe in ganz $\mathbb{R}$ überein.

2) $f(x) := \ln(1+x)$, $f: (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x_0 := 0$.



Wir wissen: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, …,

$$f^{(j)}(x) = \frac{(-1)^{j+1}(j-1)!}{(1+x)^j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

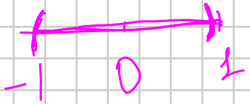
d.h., $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=-1$, …, $f^{(j)}(0) = (-1)^{j+1}(j-1)!$

und die Maclaurinreihe $= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j$.

Wir werden später sehen:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \forall x \in (-1,1)}$$

— Maclaurinreihe



d.h.,

$$\boxed{\ln x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} (x-1)^j \quad \forall x \in (0,2)}$$

— Taylorreihe mit $x_0 = 1$

3) $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der Schule, $x_0 := 0$.

Erinnere: $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, also gilt: $\sin 0 = 0$, $\sin'(0) = \cos 0 = 1$, $\sin''(0) = -\sin 0 = 0$, $\sin'''(0) = -\cos 0 = -1$, … . Die Maclaurinreihe ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

— warum?

– die Sinusreihe! Ist sie $= \sin x$?

Sei $x \in \mathbb{R}$. Lagrange-Form des Restgliedes (benutze $|\sin^{(j)}| \le 1$)

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

Warum? (z.B.: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|}$, also gilt $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$ oder: Stirlingformel)

also gilt

$$\boxed{\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Sinusreihe

Analog:

HÜ

$$\boxed{\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Kosinusreihe

4) Die Fkt $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus Bsp IV.2.20

ist zwar $C^\infty(\mathbb{R})$, aber $\neq \underbrace{\text{Maclaurinreihe}}_{=0,\ \text{da } f^{(j)}(0) = 0\ \forall j}$

5) Noch eine Potenzreihe:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \quad \forall x \in (-1,1)}$$ – Maclaurinreihe (geom. Reihe)

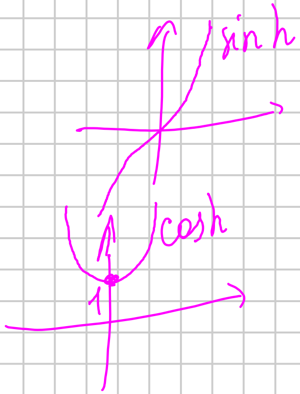
Durch das Differenzieren der beiden Seiten bekommen wir: (siehe Diff'barkeit von Potenzreihen, Folgerung IV.2.17)

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j\, x^{j-1} \quad \forall x \in (-1,1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j(j-1)}{2} x^{j-2} \quad \forall x \in (-1,1)}$$ usw.

Bem. 1) $\exists$ lange Tabellen mit Darstellungen als Taylor/Maclaurinreihe

z.B.:
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j} \quad \forall x \in (-1,1).$$



$$\boxed{\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}$$ Ü

Sinus hyperbolicus

$$\boxed{\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}$$ Ü

Kosinus hyperbolicus

2) Eine Fkt $f : I \to \mathbb{R}$ heißt analytisch

öffenes intervall

- in $x_0 \in I$, wenn f in einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ mit einer Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-x_0)^j$ übereinstimmt.

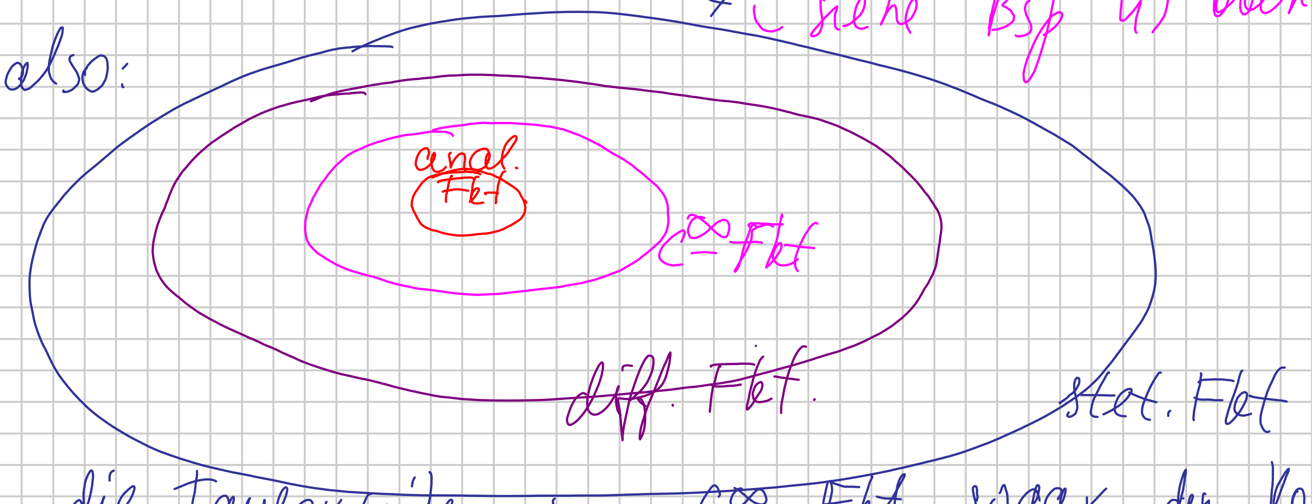
  Dann ist die P.Reihe automatisch $= T_{f,x_0}$.

- in I, wenn f analytisch in $\forall x_0 \in I$ ist, d.h., ist lokal als Potenz (= Taylorreihe darstellbar.

Es gilt: f ist analytisch in $I \Rightarrow f \in C^\infty(I)$ (Warum?)

$\not\Leftarrow$ (siehe Bsp 4) oben.

Es gilt also:



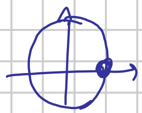
Insb. kann die Taylorreihe einer C^∞-Fkt sogar den Konvergenzradius Null haben (ohne Beweis/Bsp)

3) Taylorreihen helfen, Grenzwerte zu bestimmen, z. B.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{Satz v. Taylor}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + \bar{o}(\cancel{x^2})}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} (1 + x\cdot\bar{o}(1)) = 1.$$

$\frac{0}{0}$:

$\bar{o}(x^2) = x^2 \cdot \bar{o}(1)$



$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - \frac{x^2}{2!} + \bar{o}(x^3))}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{2!} + \bar{o}(x^2)\right) = 0$$

V Integration

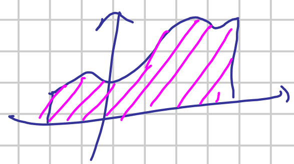
1. Riemannsches Integral

Anfang: ca. 370 v. Chr.

Durchbruch: Newton, Leibniz (17. Jh.)

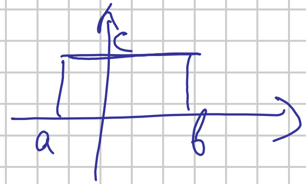
Moderne Form: Bernhard Riemann, später: Gaston Darboux (19. Jh.)

Motivation: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$

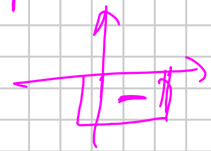


Wie def./berechnet man den Flächeninhalt zw. 0 und f?

<ins>Idee:</ins> Fange mit ganz einfachen Fkt'en an.

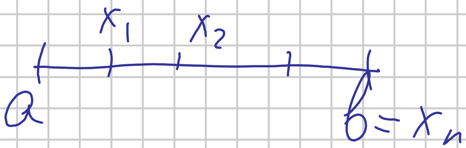


Wenn $\boxed{f \equiv c}$ konstant gleich def. $\boxed{\int_a^b f := \int_a^b f(x)dx := c(b-a)}$ – auch für $c<0$!



$\boxed{\text{Def. 1.1}}$ 1) Eine <ins>Zerlegung Z</ins> von $[a,b]$ ist eine endl. Folge $x_0, \ldots, x_n$ mit

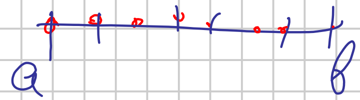
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$



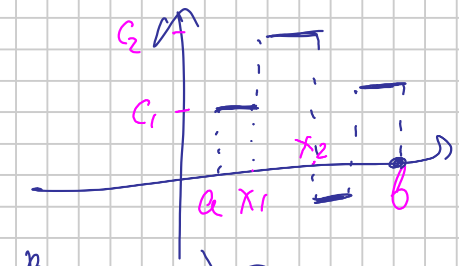
Eine weitere Zerl. $Z' = \{x_0', \ldots, x_m'\}$ von $[a,b]$ heißt <ins>feiner</ins> als Z (oder: eine <ins>Verfeinerung</ins> von Z), wenn

$$\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{x_0', \ldots, x_m'\} \text{ als Mengen}$$

Schreibe: $Z \subset Z'$



2) Eine Fkt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <ins>Treppenfkt</ins>, wenn es eine Zerl. $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ ex. mit



$$f\big|_{(x_{j-1},x_j)} \equiv c_j \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}.$$

Schreibe: $f \in T[a,b]$

Bem. 1) Die Werte von f in $x_0,\dots,x_n$ spielen keine Rolle.

2) Z_1, Z_2 Zerl. von $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists Z' = Z_1 \cup Z_2$ – alle Punkte von Z_1 und Z_2 entsprechend geordnet
eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1, Z_2.

3) Für $f \in T[a,b]$ ist die zugeh. Zerlegung nicht eindeutig!

4) Treppenfkt'en sind i.A. nicht stetig, aber stückweise stetig, d.h.

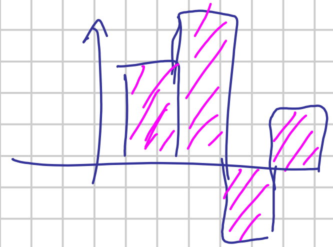
- stetig in allen bis endl. vielen Punkten,
- $\exists f(x+), f(x-)$ $\forall x \in (a,b)$
- $\exists f(a+), f(b-)$

5) $\left\{\begin{array}{l} f \in T[a,b] \text{ bzgl. } Z \\ Z \subset Z' \end{array}\right. \Rightarrow f \in T[a,b] \text{ bzgl. } Z'.$

$\boxed{\text{Def. 1.2}}$ (Integral für Treppenfkt)

Sei $f \in T[a,b]$ bzgl. $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $\boxed{f|_{(x_{j-1},x_j)} \equiv c_j \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}}$

Def. das integral von f als



$$\boxed{\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1})}$$

Bem. $\int_a^b f$ hängt nicht von Z ab: Ü / HÜ

Idee: Wenn $Z \subset Z'$, dann klar:

$(x_{j+1} - \cancel{x_j}) c_j + (\cancel{x_j} - x_{j-1}) c_j = (x_{j+1} - x_{j-1}) c_j$

Wenn Z_1, Z_2 beliebig, betr. $Z' = Z_1 \cup Z_2$

Also ist $\int_a^b f$ wohldef.

$\boxed{\text{Prop. 1.3}}$ (Eigenschaften des integrals für Treppenfk'en)

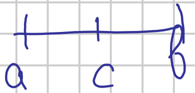
Seien $f, g \in T[a,b]$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $f+g,\ c\cdot f \in T[a,b]$

und 1) $\left.\begin{aligned} \int_a^b (f+g) &= \int_a^b f + \int_a^b g \\ \int_a^b (c\cdot f) &= c\cdot \int_a^b f \end{aligned}\right\}$ Linearität (bzgl. f)

2) $f \le g$ (d.h.: $f(x) \le g(x)\ \forall x$) $\Longrightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$ – **Monotonie**

3) $$\boxed{\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \le (b-a)\cdot \|f\|_\infty}$$ – **Standardabschätzung**

(Erinnern: $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ endl., da f beschr.)



4) $\forall c \in (a,b)$ gilt: $f \in T[a,c]$, $f \in T[c,b]$ und

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$ – Linearität bzgl. $[a,b]$.

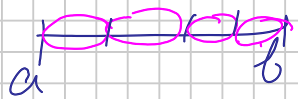
Beweis: 1), 2), 4) Ü

3) $$\left|\int_a^b f\right| = \left|\sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1})\right| \le \underbrace{\sum_{j=1}^n |c_j| (x_j - x_{j-1})}_{= \int_a^b |f|}$$

wenn $f \equiv c_j$ auf (x_{j-1}, x_j), $j \in \{1,\dots,n\}$

Δ-Ungl.

$$\le \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |c_j| \underbrace{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})}_{= b-a \text{ (Teleskopsumme)}}$$



$$= \|f\|_\infty \cdot (b-a).$$ $\blacksquare$

<u>Bem.</u> Es gilt auch: $f, g \in T[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in T[a,b]$, aber $\exists$ keine (leichte) Formel für $\int_a^b f \cdot g$

Warum?

Was wenn f keine Treppenfkt ist?

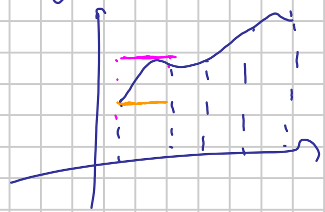
<u>Idee:</u> Approximiere f mit bestimmte Treppenfkt'en.

$\boxed{\text{Def. 1.4}}$ (Ober- und Untersummen) – Zugang von Darboux

– Buch Tretter, Ana I

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.

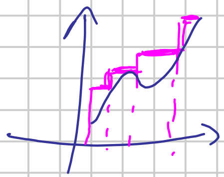
Die Ober- und Untersumme von f bzgl. Z sind def. als



$$O(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$U(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \, (x_j - x_{j-1})$$

Sie entsprechen Integralen von folg. Treppenfkt:



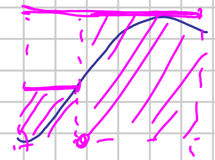
Beobachtung 1.5 Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschr.

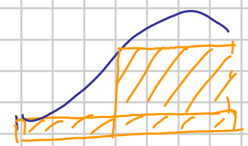
1) $U(f,Z) \leq O(f,Z)$

2) $Z \subset Z' \Rightarrow \begin{cases} O(f,Z') \leq O(f,Z) \\ U(f,Z') \geq U(f,Z) \end{cases}$

3) $\forall Z_1, Z_2$ Zerl. von $[a,b]$ beliebig gilt

$$U(f,Z_1) \leq O(f,Z_2)$$





Beweis 1) klar

2) Ü (folgt aus: $I_1 \subset I_2 \Rightarrow \begin{cases} \sup_{I_1} f \leq \sup_{I_2} f \\ \inf_{I_1} f \geq \inf_{I_2} f \end{cases}$

3) Sei $Z' := Z_1 \cup Z_2$ eine gemeinsame Zerl. Dann gilt:

$$U(f,Z_1) \underset{2)}{\leq} U(f,Z') \underset{1)}{\leq} O(f,Z') \underset{2)}{\leq} O(f,Z_2)$$

$\blacksquare$

Def. 1.6 (Ober- und Unterintegral, Integral)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschr. Das obere und das untere Integral von f sind def. durch:

$$\overline{\int_a^b} f := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{Z \text{ Zerl. von } [a,b]} O(f,Z)$$

$$\underline{\int_a^b} f := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{Z \text{ Zerl. von } [a,b]} U(f,Z).$$

Die Fkt f heißt (Riemann-)integrierbar mit $\boxed{\int_a^b f = C}$, wenn

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = C}$$

Schreibe: $f \in R[a,b]$

Bem. 1) Es gilt nach Beob. 1.5, 3):

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f}$$

Beweis $\forall Z_1, Z_2$ $\quad U(f,Z_1) \le O(f,Z_2)$

Sei Z_2 fest, (aber beliebig) $\sup_{Z_1}$: $\quad \underbrace{\sup_{Z_1} U(f,Z_1)}_{\text{Zahl}} \le O(f,Z_2)$

$\inf_{Z_2}$: $\sup_{Z_1} U(f, Z_1) \leq \inf_{Z_2} O(f, Z_2)$. ∎

2) Es gilt: $\underline{\int_a^b} f := \sup \left\{ \int_a^b \varphi \,,\ \varphi \in T[a,b] \text{ mit } \varphi \leq f \right\}$

$\overline{\int_a^b} f := \inf \left\{ \int_a^b \varphi \,,\ \varphi \in T[a,b] \text{ mit } \varphi \geq f \right\}$.

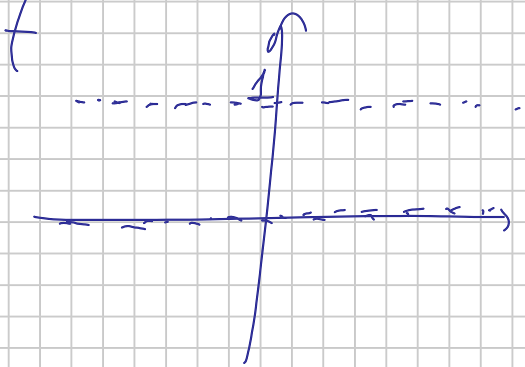
Ü / HÜ

$\boxed{\text{Bsp } 1.7}$ 1) Konstante Fkt'en sind R.-int.

Gleich kommt: Treppenfkt'en auch.

2) Die Dirichlet-Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

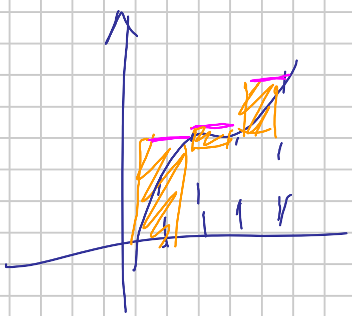


ist über <u>keinem</u> Intervall R.-int.: Ü

$\left(O(f, Z) = (b-a) \cdot 1 \,,\ U(f, Z) = 0 \right)$

Satz 1.8 (Riemann-Kriterium für R.-Integrierbarkeit)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:



$$\boxed{f \text{ R.-integrierbar} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } [a,b] \text{ mit } O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon}$$

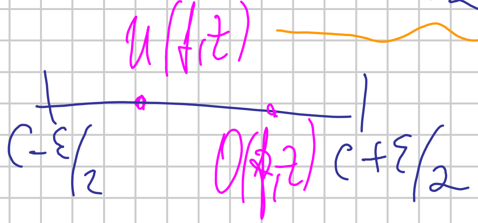
Beweis "$\Rightarrow$" Def. des sup. und des inf.: $\exists Z_1, Z_2$ Zerl. v. $[a,b]$:

$$c := \underline{\int_a^b} f < U(f,Z_1) + \varepsilon/2$$

$$c \overset{\text{Vorauss.}}{=} \overline{\int_a^b} f > O(f,Z_2) - \varepsilon/2$$

Sei $Z := Z_1 \cup Z_2$ gemeins. Verfeinerung. Dann gilt:

$$c - \varepsilon/2 < U(f,Z_1) \le U(f,Z) \le O(f,Z) \le O(f,Z_2) < c + \varepsilon/2$$



D. h., $\quad O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$ und $Z = Z_\varepsilon$ wie oben (Vorauss.)

Dann haben wir

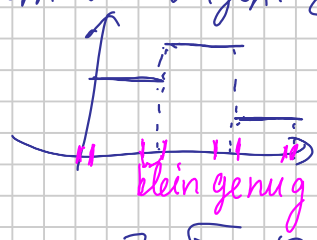
$$\underbrace{0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f}_{} \le O(f,Z) - U(f,Z) < \underbrace{\varepsilon}_{}$$

$\overline{\int_a^b} f \le O(f,Z)$, da inf.

$\underline{\int_a^b} f \ge U(f,Z)$, da sup.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, muss $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$.

$\boxed{\text{Bsp 1.9}}$ $\forall$ Treppenfkt ist integr. ($\forall \varepsilon > 0$ nimm die zugeh. Z: $O - U < \varepsilon$



) ü

$\boxed{\text{Bsp 1.10}}$ $\forall$ stetige Fkt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integr.

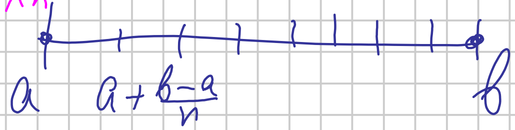
Beweis Sei f stetig $\Rightarrow$ f gleichm. stetig, d.h., $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$:

$$\forall x,y \in [a,b] \quad |x-y| < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Archim. Prinzip: $\exists n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{b-a}{n} < \delta$

Betr. die Zerl. Z mit Schritt $\dfrac{b-a}{n}$:

$$Z = \{\underbrace{a}_{x_0}, \underbrace{a + \tfrac{b-a}{n}}_{x_1}, \ldots, a + n \cdot \tfrac{b-a}{n}\} \qquad a + n \cdot \tfrac{b-a}{n} = b = x_n$$



Gleichm. Stet.: $\max\limits_{[x_{j-1},x_j]} f - \min\limits_{[x_{j-1},x_j]} f < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

da Länge $[x_{j-1}, x_j] < \delta$ (siehe (✻))

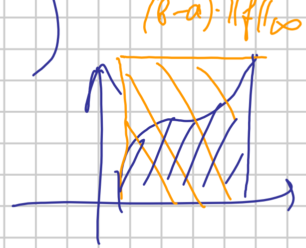
D.h., $O(f,Z) - U(f,Z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\max\limits_{[x_{j-1},x_j]} f - \min\limits_{[x_{j-1},x_j]} f\right)}_{< \varepsilon/b-a} \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{= \frac{b-a}{n}}$

$$< \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{\cancel{b-a}}{\cancel{n}} \cancel{\sum_{j=1}^{n}} 1 = \varepsilon .$$

∎

$\boxed{\text{Prop. 1.11}}$ (Eigenschaften des Integrals)

Das Riemann-integral erfüllt die Eigenschaften aus Prop. 1.3 (Linearität in f und bzgl. $[a,b]$, Monotonie und Standardabschätzung $\boxed{\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \le (b-a)\cdot\|f\|_\infty}$)



Beweis: Ü

Bemerkung: Außerdem gilt:

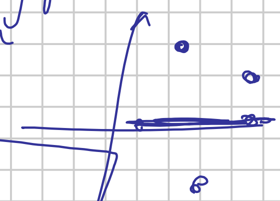
$$f,g \in R[a,b] \Rightarrow \begin{cases} f\cdot g \in R[a,b] \\ |f| \in R[a,b] \end{cases}$$

aber Achtung: keine (leichte) Formel für $\int_a^b f\cdot g$!

HÜ

$\boxed{\text{Bsp 1.12}}$ Eine Fkt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die nur in endlich vielen Punkten $\neq 0$ ist, ist R.-int. mit $\int_a^b f = 0$

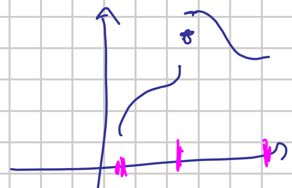
Ü



Aus der Linearität des Integrals folgt daraus:

$$\boxed{\begin{array}{l} f\in R[a,b],\ f\neq g \text{ in endl. vielen Punkten} \\ \qquad \Rightarrow g\in R[a,b] \text{ mit } \int_a^b f = \int_a^b g. \end{array}}$$

$\boxed{\text{Kor. 1.13}}$ $\forall$ stückweise stetige Fkt ist integrierbar.



Beweis

Sei $Z = \{x_0,\dots,x_n\}$ die zugeh. Zerl. s.d. $f|_{(x_{j-1},x_j)}$ stetig

Nach Prop. 1.11 (Linearität bzgl. $[a,b]$) reicht es $\forall j\in\{1,\dots,n\}$

zz: $f|_{[x_{j-1},x_j]}$ R.-integr. $\forall j$. Nimm j und def.

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x\in(x_{j-1},x_j) \\ f(x+), & x = x_{j-1} \\ f(x-), & x = x_j \end{cases}$$

g ist stetig auf $[x_{j-1},x_j]$, $g = f$ bis auf 2 Punkte

$\Rightarrow f\in R[a,b]$ nach Bem. oben und Bsp 1.10. ∎

Bem. Rückrichtung falsch, siehe Ü'Blatt oder

$\boxed{\text{Bsp 1.14}}$ $\forall$ monotone Fkt ist R.-integr. — nicht immer stückweise stetig (Warum?)

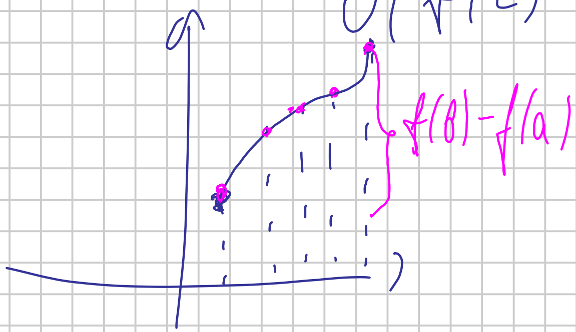
Beweis Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ OBdA $\nearrow$ (sonst betr. $-f$)

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon$.

Def. $Z = \{\underset{x_0}{\underset{\shortparallel}{a}}, \underbrace{a + \frac{b-a}{n}}_{x_1}, \dots, \underbrace{a + n \cdot \frac{b-a}{n}}_{b = x_n}\}$

Wir haben:

$$O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\sup_{[x_{j-1},x_j]} f}_{=f(x_j)} - \underbrace{\inf_{[x_{j-1},x_j]} f}_{=f(x_{j-1})}\Big)\underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{=\frac{b-a}{n}}$$



$$= \frac{b-a}{n} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big)}_{\text{Teleskopsumme} = f(b) - f(a)} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b)-f(a)) \overset{\text{Wahl von } n}{<} \varepsilon$$ ∎

Bem. Insb. gilt (Eigenschaften des Integrals):

$$f = f_1 - f_2, \; f_1, f_2 \nearrow \implies f \text{ R.-int.}$$

Hü

Solche Fkt sind genau Fkt mit beschränkter Variation, d.h.,

f mit $\mathrm{Var}(f) := \sup\limits_{\substack{Z \text{ Zerl.} \\ \text{von } [a,b]}} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \infty$.

Variation

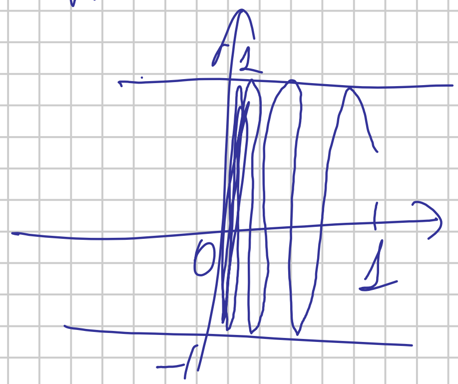
Es gilt: f mit beschr. Var. $\Longrightarrow$ f R.-int.

$\not\Longleftarrow$:

$\boxed{\text{Bsp}}$

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist R. integr., aber $\mathrm{Var} f = \infty$ Ü

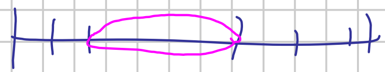


Der urspr. Zugang von Riemann:

$\boxed{\text{Def. 1.15}}$ — Heuser, Fichtenholz (Riemann-Summen und deren Grenzwert)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerl. von $[a,b]$.

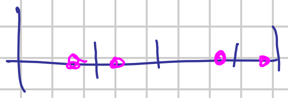
1) Def. $\|Z\| := \max\limits_{j \in \{1,\dots,n\}} (x_j - x_{j-1})$

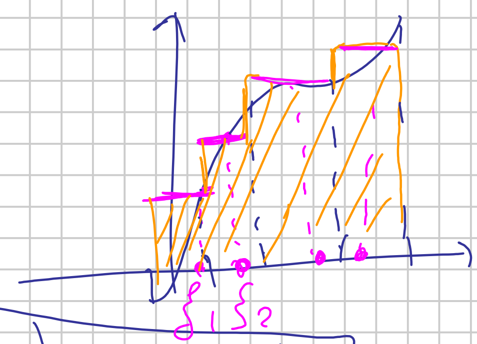


— Feinheitsmaß von Z.

2) Seien $\xi_1, \dots, \xi_n$ **Zwischenstellen** für Z,

d.h., $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$





Dann heißt

$$\boxed{S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})}$$

Riemann-Summe von f bzgl. Z und Zw.'stellen $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Bem. $S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) = \int_a^b \varphi$, wobei $\varphi \in T[a,b]$ mit $\varphi|_{(x_{j-1}, x_j)} \equiv f(\xi_j)$

3) Wir sagen: $S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n)$ konv. gegen c als $|Z| \to 0$,

schreibe

$$\boxed{\lim_{|Z| \to 0} S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) = c},$$

wenn

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall$ Zerl. Z mit $|Z| < \delta$

$\forall$ Zwischenstellen $\xi_1, \dots, \xi_n$

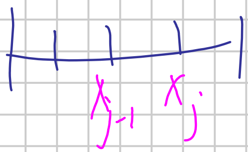
$$\left| S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) - C \right| < \varepsilon .$$

Bem 1.16 Es gilt:

- $\lim\limits_{|Z| \to 0} S(\dots)$ ist eindeutig, wenn $\exists$. Ü
- $\exists \lim\limits_{|Z| \to 0} S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) \Longrightarrow f$ ist beschr.

<u>Bew.</u> (Skizze): Ang., f unbeschr. OBdA: nach oben.

Sei $R > 0$. Wir finden $Z, \xi_1, \dots, \xi_n$: $S(f, Z, \xi_1, \dots) > R$.
beliebig fein



Sei Z beliebig und beliebig fein.

$\exists j$: $f|_{[x_{j-1}, x_j]}$ unbeschr. nach oben.

Wähle $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n$ beliebig.

Wähle dann ξ_j:

$$f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) > R - \sum_{k \neq j} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad \blacksquare$$

(Details: Ü)

Satz 1.17 (Darboux-Kriterium für R.-Integrierbarkeit)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und $c\in\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\exists \lim_{|Z|\to 0} S(f,Z,\xi_1,\dots,\xi_n) \iff f \text{ ist R.-integr.}$$

In diesem Fall gilt $\boxed{\lim_{|Z|\to 0} S(\dots) = \int_a^b f}$.

Beweis "$\Rightarrow$" + „in diesem Fall"

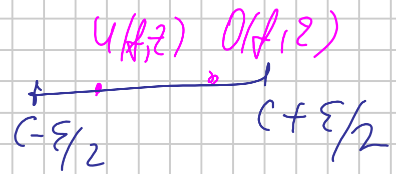
Sei $c := \lim_{|Z|\to 0} S(f,Z,\xi_1,\dots,\xi_n)$ und sei $\varepsilon>0$.

Dann $\exists\, \delta>0$: $\forall Z$ mit $|Z|<\delta$ $\forall$ Zwischenpunkte $\xi_1,\dots,\xi_n$

$$c-\varepsilon/2 < S(f,Z,\xi_1,\dots,\xi_n) < c+\varepsilon/2$$

Da $\xi_1,\dots,\xi_n$ beliebige Zwischenstellen sind, haben wir

$$c-\varepsilon/2 \le U(f,Z) \le O(f,Z) \le c+\varepsilon/2.$$



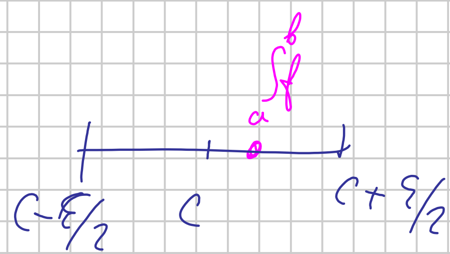
insb. gilt $O(f,Z)-U(f,Z)\le\varepsilon \Rightarrow f$ R.-integr.

R!-Kriterium

Das Integral $\int_a^b f$ erfüllt außerdem:

$$c-\varepsilon/2 \le U(f,Z) \le \int_a^b f \le O(f,Z) \le c+\varepsilon/2,$$

als $\underline{\int_a^b}$ als $\overline{\int_a^b}$



d.h., $\left|\int_a^b f - c\right| \le \varepsilon/2 \quad \forall \varepsilon>0$! D.h., $\int_a^b f = c$. ∎

(⇐) HÜ

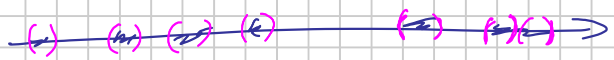
Noch ein Kriterium:

$\boxed{\text{Satz 1.18}}$ (Integrabilitätskriterium von Lebesgue) — Henry Leon Lebesgue

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

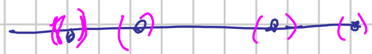
$f\in R[a,b] \iff$ Die Menge M der Unstetigkeitsstellen von f hat Lebesgue-Maß Null, d.h.,

$\forall \varepsilon>0$ $\exists$ höchstens abz. viele offene Intervalle (I_n) mit $M\subset\bigcup_n I_n$ und $\sum_n \text{Länge}(I_n)<\varepsilon$



(ohne Beweis)

$\boxed{\text{Bsp}}$ • M endlich $\Rightarrow$ $\text{Leb}(M)=0$ (Lebesguemaß)



- M abz. $\Rightarrow \text{Leb}(M) = 0$ (nimm I_1 um x_1 mit Länge $< \varepsilon/2$
  I_2 um x_2 –"– $< \varepsilon/4$
  ...
  I_n um x_n –"– $< \varepsilon/2^n$
  ...)

  $\not\Leftarrow$ Bsp: Cantormenge (siehe WS)

Noch ein Bsp von integr. Fkt'en:

Satz 1.19 (Integration von Funktionenfolgen und F'Reihen)

Seien $f_1, f_2, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integr. mit $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ gleichm. in $[a,b]$

Dann gilt $f \in R[a,b]$ mit

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n},$$

(d.h., $\int_a^b \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b$). Insb. ist jede gleichmäßig konverg. Reihe von R-integr. Fkt'en R-integr. mit

$$\boxed{\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n}$$

Beweis 1) Zz: $f \in R[a,b]$

Sei $\varepsilon > 0$. Def. der gleichm. Konv.: $\exists n$ mit

$$\|f - f_n\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Da f_n R-integr., $\exists Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit

$$O(f_n, Z) - U(f_n, Z) < \varepsilon/3 \quad (*)$$

Wir haben:

$$\underbrace{U(f_n, Z) - \frac{\varepsilon}{3(\cancel{b-a})} \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})}_{\cancel{b-a}}}_{= U(f_n,Z) - \frac{\varepsilon}{3}} \underset{f \geq f_n - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}}{\leq} U(f, Z) \leq O(f, Z) \underset{f \leq f_n + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}}{\leq} O(f_n, Z) + \frac{\varepsilon}{3(\cancel{b-a})} \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})}_{\cancel{b-a}} = O(f_n, Z) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$U(f_n,Z) - \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad U(f,Z) \quad O(f,Z) \quad$ $O(f_n,Z) + \frac{\varepsilon}{3}$

D.h.,
$$O(f, Z) - U(f, Z) \leq O(f_n, Z) + \frac{\varepsilon}{3} - U(f_n, Z) + \frac{\varepsilon}{3} \underset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

R.-Kriterium: f ist R.-integr.

2) ZZ: $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \underset{\text{Standardabsch.}}{\leq} \sup_{[a,b]} |f - f_n| \cdot (b-a) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Def. der gleichm. Konv.

3) „insbes." folgt mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$.

$\blacksquare$

Satz 1.20 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz (MWS) der Integralrechnung)

Seien $f, g \in R[a,b]$ mit $g \geq 0$. Dann $\exists c \in [\inf f, \sup f]$ mit

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = c \int_a^b g}$$

Ist f stetig, so $\exists \xi \in [a,b]$ mit

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g}$$

Insbesondere gilt, falls f stetig,

$$\boxed{\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b-a)}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Beweis 1) Die erste Aussage:

Nach Monotonie des Integrals (da $g \geq 0$):

$$\inf_{[a,b]} f \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq \sup_{[a,b]} f \cdot \int_a^b g$$

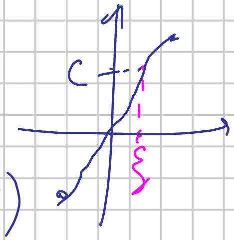
Fall 1 $\int_a^b g = 0$. Dann ist $\int_a^b f \cdot g = 0$ nach ∇, also passt $\forall c$.

Fall 2 $\int_a^b g \neq 0$:

$$\inf_{[a,b]} f \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f \cdot g}{\int_a^b g}}_{=: c} \leq \sup_{[a,b]} f$$

2) f stetig, $c \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$ wie oben $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ mit $c = f(\xi)$

MWS



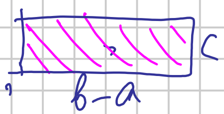
3) MWS („insb."): folgt aus 1) + 2) mit $g \equiv 1$

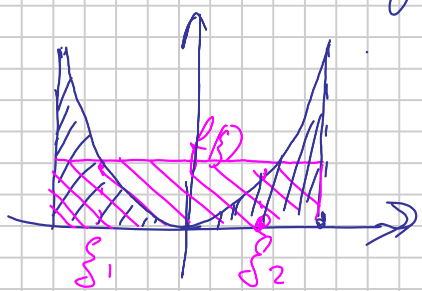
Bem. Geometrisch bedeutet der MWS (d. h., $g \equiv 1$) für $f \geq 0$:

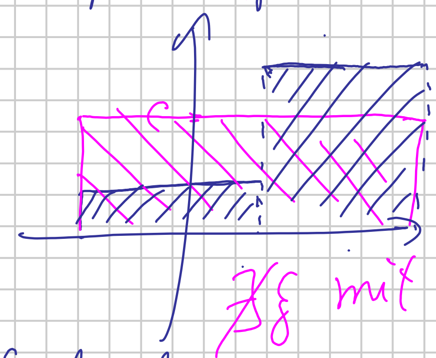
$\exists c \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$ mit

Flächeninhalt zw. f und 0

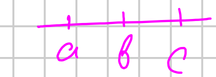
= Flächeninhalt von







Bem. Für $a < b$ def. $\int_b^a f := -\int_a^b f$ (dann gilt: $\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b \quad \forall c \in \mathbb{R}$)



Für $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ def. man $\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i\cdot \int_a^b \operatorname{Im} f$.

2. Unbestimmtes Integral und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wie berechnet man $\int_a^b f$?

$\boxed{\text{Def 2.1}}$ – Heuser

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Eine Stammfunktion von f ist eine diff'bare Fkt $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $F'=f$.

$\boxed{\text{Bem. 2.2}}$ 1) (Eindeutigkeit bis auf Konst.)

F, G Stammfkt. von f auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ $F = G + \text{konst.}$

Bew. $(F-G)' = 0$ in $[a,b]$ $\Rightarrow$ $F-G = \text{konst.}$ (MWS, siehe WS)

2) Eine (beliebige) Stammfkt von f nennt man auch unbestimmtes Integral von f, schreibe $F = \int f$ auf $[a,b]$.

Es gilt insb. $F + C = \int f \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

3) $\int$ ist inverse Operation zur $(\ )'$: $(\int f)' = f$ und $\int f' = f$

falls $\exists$ falls $\exists$

$\boxed{\text{Bsp 2.3}}$ (Tafel der Grundintegrale)

- $\boxed{\int c\,dx = cx}$ auf $\mathbb{R}$
- $\boxed{\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ für } \alpha \neq -1}$ auf $\mathbb{R}$ (wenn $\alpha \geq 0$) auf $(-\infty, 0), (0, \infty)$ (wenn $\alpha < 0$)
- $\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x|}$ auf $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

<u>Beweis</u> <u>Fall 1</u> $x > 0$. Dann gilt:

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

<u>Fall 2</u> $x < 0$. Dann: $(\ln \underbrace{|x|}_{-x})' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$ ■

- $\boxed{\int e^x dx = e^x}$ auf $\mathbb{R}$

- $\boxed{\int \cos x \, dx = \sin x}$ auf $\mathbb{R}$,
- $\boxed{\int \sin x \, dx = -\cos x}$ auf $\mathbb{R}$
- $\boxed{\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x}$, sobald $\cos x \neq 0$ Ü
- $\boxed{\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x}$, sobald $\sin x \neq 0$ Ü
- $\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x}$ auf $\mathbb{R}$ Ü
- $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x}$ auf $(-1,1)$ Ü
- $\boxed{\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|}$ auf $(-\infty,-1), (-1,1), (1,\infty)$

Ü (Nachrechnen oder $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$ benutzen)

. . . (lange Tabellen)

Achtung z. B. folgende Stammfkt'en lassen sich <u>nicht</u> mit Hilfe <u>elementarer</u> Fkt'en darstellen:

Polynome, exp, ln, trig. Fkt'en, inverse trig. Fkt und deren Kombinationen

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin(x^2)dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}dx, \ \ldots$$

$\boxed{\text{Bem. 2.4}}$ 1) Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \int (f+g) &= \int f + \int g \quad (+\text{konst}) \\ \int c\cdot f &= c\cdot \int f \quad (+\text{konst}) \end{aligned}}$$

– Linearität des unbestimmten Integrals

2) Aus der Kettenregel für Abl. folgt

$$\int (F'\circ g)\, g' = F\circ g, \quad \text{d.h.,}$$

$$\boxed{\int (f\circ g)\, g' = F\circ g}, \quad \text{wobei } \boxed{F' = f}.$$

– Substitutionsregel

Für $y := g(x)$ gilt formal

$$\int f(g(x))\underbrace{g'(x)dx}_{=:dy} = \int f(y)\,dy = F(y) = F(g(x)), \quad \underbrace{g(x)}_{=:y}$$

Bsp $\int \frac{g'}{g} = \int (\ln|g|)' = \ln|g|$. Dabei nennt man $\frac{g'}{g}$ die logarithmische Ableitung von g.

$f(x) = \frac{1}{x}$

3) Aus der Produktregel für die Ableitung folgt:

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v} \quad (+\text{konst})$$

$\int \underbrace{(uv)'}_{u'v+uv'} = uv$

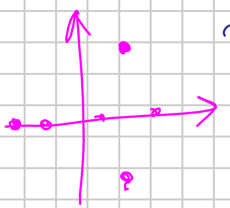
partielle Integration

$\boxed{\text{Bsp 2.5}}$ (Integration von rationalen Fkt)

Wie berechnet man $\int \frac{p}{q}$ für Polynome p, q?

Nach Linearität: OBdA: $\deg p < \deg q$ (sonst Vielfaches von q abziehen)

Fakt: Sei q ein Polynom mit reellen Koeffizienten (schreibe $q \in \mathbb{R}[\cdot]$)



Dann kann q in der Form

$$q(x) = c(x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot \underbrace{(x^2+a_1x+b_1)}_{\text{keine reellen Nullst., d.h., } a_1^2-4b_1<0}{}^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+a_\ell x+b_\ell)^{m_\ell}$$

geschrieben werden (ohne Beweis)

Durch Induktion folgt daraus (ohne Details: HÜ (oder Heuser)):

$\frac{p}{q}$ kann geschrieben werden als:

Partialbruchzerlegung

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \underbrace{\frac{c_{11}}{x-x_1} + \dots + \frac{c_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}}_{\text{kommt von } (x-x_1)^{k_1}} + \dots + \underbrace{\frac{c_{r1}}{x-x_r} + \dots + \frac{c_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}}}_{\text{kommt von } (x-x_r)^{k_r}} + \\ &+ \underbrace{\frac{d_{11}x + e_{11}}{x^2+a_1x+b_1} + \dots + \frac{\text{lin. Pol.}}{(x^2+a_1x+b_1)^{m_1}}}_{\text{kommt von } (x^2+a_1x+b_1)^{m_1}} \\ &+ \dots + \frac{\text{lin. Pol.}}{x^2+a_\ell x+b_\ell} + \dots + \frac{\text{lin. Pol.}}{(x^2+a_\ell x+b_\ell)^{m_\ell}}.\end{aligned}}$$

Also reicht es, $\int \frac{dx}{x-x_0}, \dots, \int \frac{dx}{(x-x_0)^k}, \int \frac{dx}{x^2+ax+b}, \int \frac{x}{x^2+ax+b}\,dx,$

$\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^m}, \int \frac{x}{(x^2+ax+b)^m}\,dx$

zu berechnen.

$\boxed{\text{Bsp}}$ Finde $\int \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$.

Partialbruchzerl.: Finde A, B, C, D mit

$$\frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$\cdot\, x^2(x^2+1)$:

$$1-x = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)\cdot x^2$$
$$= Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2$$

x^3: $\quad 0 = A + C$

x^2: $\quad 0 = B + D \quad$, d.h., $\quad A = -1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = -1$

x: $\quad -1 = A$

1: $\quad 1 = B$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

D.h., $\displaystyle\int \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}\,dx = -\underbrace{\int \frac{1}{x}}_{\ln|x|} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2}}_{-\frac{1}{x}} + \int \frac{x}{x^2+1} - \underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}}_{\arctan x \text{ (siehe 2.3)}} =$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \left[\begin{array}{l}\text{Variabelsubst.}\\ y := x^2+1\\ dy = 2x\,dx\end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|$$

$$\boxed{=} -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan x$$

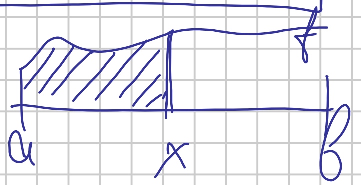
$\boxed{\text{Bsp}}$ $$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \begin{bmatrix} y := x+1 \\ dy = dx \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan(x+1)$$

Ziel: Finde eine Formel / Darstellung für $\int f$.

$\boxed{\text{Lemma 2.6}}$ Sei $f \in R[a,b]$. Dann ist $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x) := \int_a^x f$$

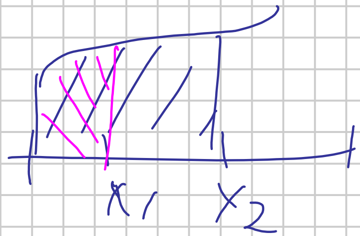
stetig.



Beweis Für $x_1 < x_2$ gilt:

$$|G(x_2) - G(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| \leq \|f\|_\infty \cdot |x_2 - x_1|$$

Standardabsch.

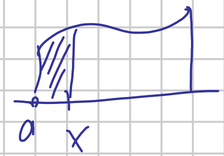


Also ist G Lipschitz-stetig, insb. stetig.

$\boxed{\text{Theorem 2.7}}$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Die Fkt $\begin{cases} G: [a,b] \to \mathbb{R} \\ G(x) := \int_a^x f \end{cases}$ ist diff'bar mit $G' = f$:



$$\boxed{\left(\int_a^x f\right)' = f}$$

(b) Sei F eine Stammfkt von f, so gilt:

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a)}$$

Bem.: 1) Man bezeichnet $F(b) - F(a)$ mit $[F]_a^b$, $F\Big|_a^b$, $[F(x)]_a^b$, $F(x)\Big|_a^b$, $\left[\int f\right]_a^b$

2) Anders geschrieben: Sei $F \in C^1[a,b]$, dann gilt

$$\boxed{\int_a^b F' = F(b) - F(a)}$$

3) Teil b) gilt $\forall$ R.-integr. Fkt: ü

Beweis (a) Sei $x \in [a,b]$ und $\varepsilon > 0$.

Da f stetig $\Rightarrow$ gleichm. stetig, d.h., $\exists \delta > 0 : \forall t, s \in [a,b]$

$$|t-s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

Damit gilt für $h \in (0, \delta)$

$$\left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt \right|$$

$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$

$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dt = \cancel{\frac{1}{h}} f(x) \cancel{\int_x^{x+h} 1}$

$$\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \underbrace{|f(t) - f(x)|}_{< \varepsilon,\ \text{da } |t-x| < \delta} dt \leq \varepsilon \cdot \cancel{\frac{1}{h}} \cdot \cancel{h} = \varepsilon$$

D.h., $G_+'(x) = f(x)$. Analog: $G_-'(x) = f(x)$. (nimm $h \in (-\delta, 0)$)

(b) F Stammfkt $\Rightarrow$ $F = G + c$ für $c \in \mathbb{R}$

Es gilt also:

$$\int_a^b f = G(b) = F(b) - c =$$

und

$$c = F(a) - \underbrace{G(a)}_{= 0,\ \text{da } \int_0^0 = 0} = F(a)$$

$= F(b) - F(a).$ $\blacksquare$