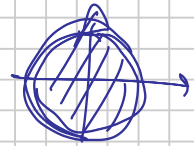
Notiztitel 25.05.2016

$\boxed{\text{Bsp}}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\rho_{konv} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}} = 1$

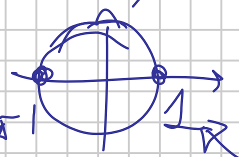


$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln n^2}} \to 1$

Die Reihe konv. abs. und gleichmäßig auf $\overline{U_1(0)}$,

da $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ (Majorantenkrit.)

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$: $\rho_{konv} = 1$



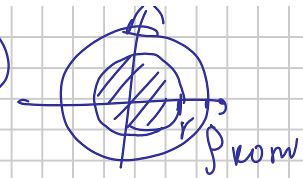
Beweis von 3.1

1) „insbesondere ist die Summe holom. mit $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

folgt aus Folgerung 3.2.

sei $r \in (0, \rho_{konv})$.

Z.z.: Die Reihe konv. abs. und gleichmäßig auf $\overline{U_r(z_0)}$



OBdA $z_0 = 0$ (sonst $w := z - z_0$)

Für $z \in \overline{U_r(0)}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$$

Z.z: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ konv. (Majorantenkriterium)

Da $r < \rho_{konv} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, gilt $\frac{1}{r} > \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Insbesondere

$\exists\, r_0 > r$ mit $\frac{1}{r_0} > \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ (d.h., bei $r_0 \in (r, \rho_{konv})$)

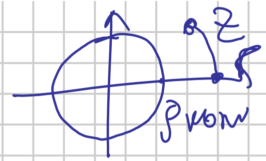
Def. von $\overline{\lim}$: $\exists N_0 : \forall n \geq N_0$ $\underbrace{\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r_0}}_{|a_n| < \frac{1}{r_0^n}}$

Insgesamt: $|a_n| \cdot r^n < \frac{r^n}{r_0^n} = \Big(\underbrace{\frac{r}{r_0}}_{<1}\Big)^n$. Da $\sum_{n=N_0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ konv.,

konv. auch $\sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n| r^n \Rightarrow$ auch $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$.

2) Sei z mit $|z| = r > \rho_{konv}$.

Behauptung: $a_n z^n \not\to 0$ ($\Rightarrow$ diverg. die Reihe)



Wir haben. $|a_n z^n| = |a_n| \cdot r^n$

Da $r > \rho_{konv} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, gilt $\frac{1}{r} < \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

Def. von $\overline{\lim}$: $\exists (n_k)$: $\underbrace{\underbrace{\frac{1}{r} < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}}_{|a_{n_k}| > \frac{1}{r^{n_k}}}}_{r^{n_k} |a_{n_k}| > 1}$ $\forall k$.

$\Rightarrow |a_n| r^n \not\to 0$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\qquad \sqrt[n]{n!} = \cancel{e^{\ln n!}} \approx \sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n}} \approx n \longrightarrow \infty$, d.h., $\rho_{konv} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \infty$

e^z ist holom. auf ganz $\mathbb{C}$ mit

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z$$

Analog: $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$.

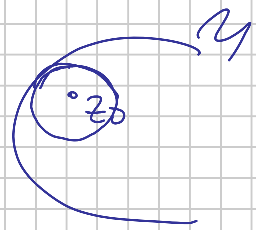
3.3. Potenzreihenentwicklung

Wir wissen: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konv. (abs. und kompl.) in einer (off.) Kreisscheibe um z_0 und ist dort eine holom. Fkt.

Frage: Sei f holom. auf einer Kreisscheibe.
ist f = Potenzreihe dort?

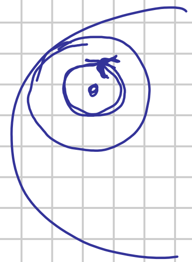
$\boxed{\text{Thm. 3.8}}$ (Potenzreihenentwicklung)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ mit $U_r(z_0) \subset U$,
$f: U \to \mathbb{C}$ holom. Dann $\exists!$ Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ um z_0
mit $\rho_{konv} \geq r$ s.d.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{auf } U_r(z_0).$$



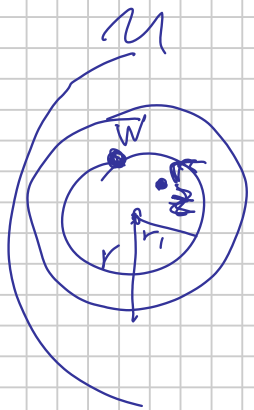
Die Koeffizienten erfüllen:

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw}$$



$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r_1 < r.$

Bem. D.h., f ist in der größten Kreisscheibe um z_0 aus U als eine Potenzreihe darstellbar.



Beweis Existenz + Koeff.'Formel

OBdA sei $z_0 = 0$ (warum?)

CIF für $r_1 < r$ und $z \in U_{r_1}(0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \; =$$

Da $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$, gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{w}}$, damit

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f(w)}{w} \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^n}_{\frac{f(w)}{w^{n+1}} \cdot z^n} dw =$$

Die Reihe konv. gleichm. auf $\{w : |w| = r_1\}$, da

$$\left| \frac{f(w)}{w} \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^n \right| \leq \frac{|f(w)|}{r_1} \underbrace{\left(\frac{|z|}{r}\right)^n}_{<1} \leq \frac{\sup_{|w|=r_1} |f(w)|}{r_1} \cdot \underbrace{\left(\frac{|z|}{r}\right)^n}_{<1}$$

$$\overset{\text{Folgerung 3.2 (z ist fest)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw\right)}_{=: a_n} \cdot z^n .$$

Nach dem C)'s sind a_n unabh. von r_1, und die Reihe $\sum a_n z^n$ konv. $\forall z \in U_r(0)$, insb. gilt $\rho_{konv} \geq r$

<u>Eindeutigkeit + $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$</u>

Ang.: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ auf $U_r(0)$.

Da $\rho_{konv}(\sum b_n \dots) \geq r$, konv. diese Reihe kompakt auf $U_r(0)$ und es gilt nach 3.7.1):

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (z-z_0)^{n-k}$$

$$f^{(k)}(z_0) = b_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = b_k \cdot k!$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Die Reihe ist also eindeutig und $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ∎

Bemerkung: Wir haben damit einen alternativen Beweis für die Implikation

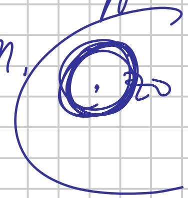
f holom. $\Longrightarrow$ f ist ∞-oft diff'bar

(da $\forall$ Potenzreihe mit $\rho_{konv} > 0$ ∞-oft diff'bar in der Kreisscheibe

$U_{\text{prom}}(z_0)$ ist)

$\boxed{\text{Folgerung 3.9}}$ (Cauchysche Abschätzung für die Taylorkoeff.)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\overline{U_r(z_0)} \subset U$, $f : U \to \mathbb{C}$ holom.



Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die P-Reihenentw. und

sei $|f(z)| \leq M$ auf $\{z : |z - z_0| = r\}$

Dann gilt $\boxed{|a_n| \leq \frac{M}{r^n}}$ $\forall n$.

Beweis Nach 3.8 haben wir $\forall n$

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw \right| \leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi r} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}$$

$\blacksquare$

Ein alternativer Beweis des Satzes von Liouville.

Ist f ganz (d.h. holom. auf $\mathbb{C}$), dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

auf $\mathbb{C}$. Wenn f beschr. auf $\mathbb{C}$ ist mit $M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$, dann gilt nach 3.9:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f(z) = a_0$ ∎

$\boxed{\text{Bsp 3.10}}$ (Logarithmus)

Betrachte $f(z) := \ln z$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$

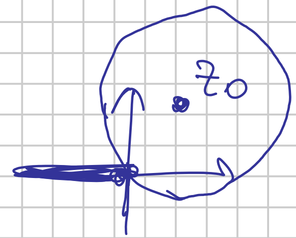
Hauptzweig des Log.

Wir wissen: $f'(z) = \frac{1}{z}$, $f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}$

also: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot z_0^n}$.

Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ist

$$\rho_{konv} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot z_0^n}\right|}} = |z_0|$$



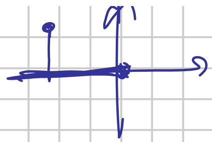
<u>Fall 1</u>: $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$:

$$\operatorname{Ln} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot z_0^n} (z-z_0)^n + \operatorname{Ln} z_0$$

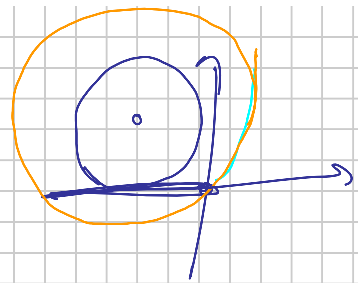
gilt auf der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0, wo Ln holom. ist, d.h., auf $U_{|z_0|}(z_0)$, und dies ist auch die max. Kreisscheibe, wo die Reihe konv.

<u>Fall 2</u>: $\operatorname{Re} z_0 < 0$

z_0 Der Abstand $\operatorname{dist}(z_0, (-\infty, 0]) = |\operatorname{Im} z_0| < |z_0|$



Nach 3.8 gilt die Gleichheit

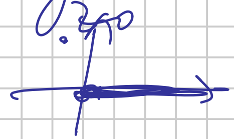


$$\operatorname{Ln}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

nur auf $U_{|\operatorname{Im} z_0|}(z_0)$.

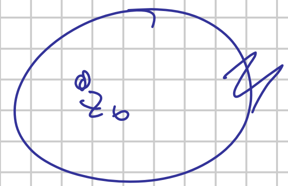
Die Potenzreihe konv. aber auf der größeren Kreisscheibe $U_{|z_0|}(z_0)$.

Wir sehen also: Die Fkt $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ stellt nicht mehr auf ganz $U_{|z_0|}(z_0)$ den $\operatorname{Ln} z$ dar, da $\operatorname{Ln} z$ dort nicht holom. ist. Mit einem anderen Zweig (z. B. auf $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$) gilt dann die Gleichheit auf $U_{|z_0|}(z_0)$.



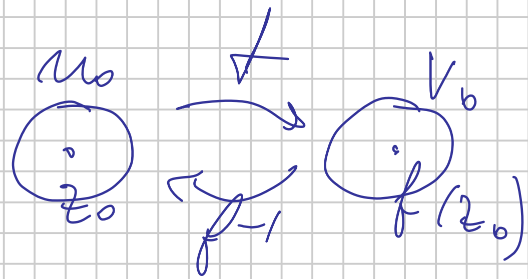
3.4 Nullstellen holomorpher Funktionen

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holom. und sei $z_0 \in U$ eine Nullstelle von f, d.h., $f(z_0) = 0$



Frage: Wie verhält sich f in der Nähe von z_0?

Fall 1 z_0 ist einfach, d.h., $f'(z_0) \neq 0$.



Erinnere (Ana II):

$\exists\, U_0$ offene Umg. von z_0

$\exists\, V_0$ –"– $f(z_0)$

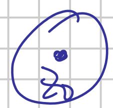
s.d. $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bij

Satz 1.13 (von der Umkehrabb.): $f^{-1} : V_0 \to U_0$ ist ebenfalls holom.

$\boxed{\text{Def. 3.11}}$ Eine Fkt $f : U_0 \to V_0$ (U_0, V_0 offen $\subset \mathbb{C}$) heißt biholomorph, wenn f holom., bij und f^{-1} holom.

D.h., z_0 ist eine einfache Nullstelle $\Longrightarrow$ f ist in z_0 lokal biholom.

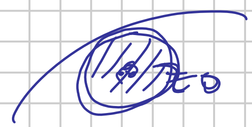
Insbesondere: $\nexists$ keine weiteren Nullstellen in U_0!



Fall 2: z_0 ist eine Nullstelle der <u>Ordnung ∞</u>; d.h.,

$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n$.

Potenzreihenentw.: $f \equiv 0$ in der größten offenen Kreisscheibe aus U $\Rightarrow$ die Kreisscheibe besteht nur aus (∞-fachen) Nullstellen.



Fall 3 z_0 ist eine <u>k-fache</u> Nullstelle für $k \geq 2$,

d.h., $f^{(k-1)}(z_0) = f^{(k-2)}(z_0) = \ldots = f'(z_0) = \underbrace{0}_{f(z_0)=}$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $h: U \to \mathbb{C}$ holom., z_0 eine einfache Nullstelle von h.

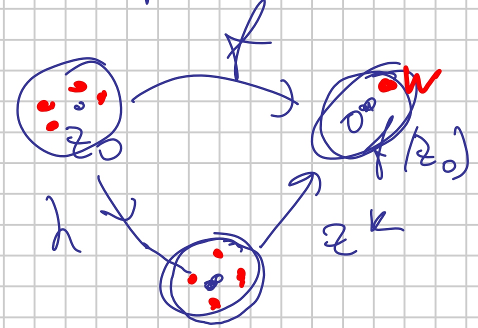
Dann ist z_0 eine k-fache Nullstelle von $f(z) := (h(z))^k$

Eine „lokale" Umkehrung:

$\boxed{\text{Satz 3.12}}$ <u>(Verhalten holom. Fkt'en in der Nähe von Nullstellen)</u>

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ und z_0 eine k-fache Nullstelle von f.
Dann $\exists\, U_0 \subset U$ off. Umg. von z_0 $\exists\, h: U_0 \to \mathbb{C}$ holom.
s.d.
- z_0 ist eine einfache Nullstelle von h
- $f(z) = (h(z))^k$ auf U_0.

<u>Bem.</u> D.h., bis auf eine bihalom. Transformation (siehe Fall 1) verhält sich f in der Nähe von z_0 als z^k. insbesondere $\exists$ keine weiteren Nullstellen in U_0 und $\forall\, w \in f(U_0)$ hat genau k verschiedene Urbilder in U_0.



<u>Beweis von 3.12</u>

Sei OBdA $z_0 = 0$ (sonst betrachte $\tilde{f}(z) := f(z - z_0)$)
Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die Potenzreihenentw. von f auf $U_\rho(0)$

Da $f(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$,

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n = z^k \underbrace{\Big(\underset{\neq 0}{c_k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n z^{n-k} \Big)}_{=:\, g(z)} = z^k \cdot g(z),$$

wobei $g(z_0) \neq 0$.

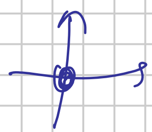
Idee: Def. ~~die~~ eine k-te Wurzel aus g in ~~einer~~ Umg. von $g(z_0)$,

d.h., finde h_1 mit $h_1^k = g$.

Schwierigkeit: $\forall w \neq 0$ hat k-viele k-te Wurzeln

Beobachtung: Die Fkt $z \mapsto z^k$ hat keine Nullstellen $\neq 0$, und ihre Ableitung $z \mapsto k \cdot z^{k-1}$ hat auch keine Nullstellen $\neq 0$

D.h., $z \mapsto z^k$ ist lokal biholom. auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

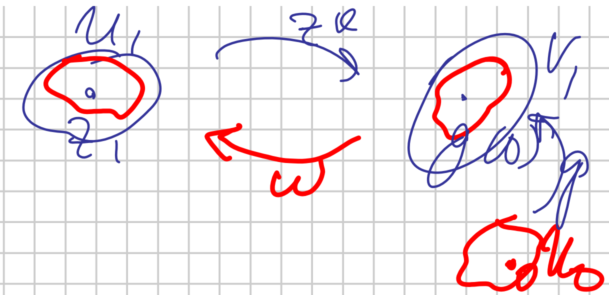


Sei z_1 eine k-te Wurzel aus $g(0) \neq 0$. Nach der Beobachtung

$\exists\, U_1, V_1$ off. Umg. von z_1 bzw. $g(0)$

s.d. $z^k : U_1 \to V_1$ biholom.

insb. ist $\omega := (z^k)^{-1} : V_1 \to U_1$ holom.



Def. $h_1(z) := \omega(g(z))$ auf U_0

für U_0 eine Umg. um $z_0 = 0$ mit $U_0 \subset U_\rho(z_0)$, $g(U_0) \subset V_1$.

(nimm z.B. $U_0 := U_\rho(z_0) \cap \underbrace{g^{-1}(V_1)}_{\text{offen, da } g \text{ stetig.}}$)

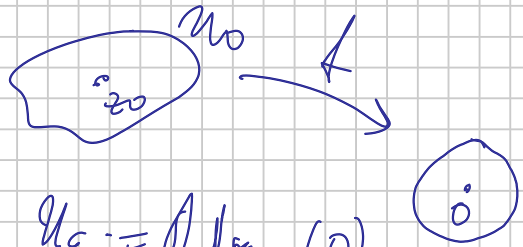
Wir haben:

- h_1 ist holom. auf U_0
- $h_1^k = (\omega \circ g)^k \underset{\uparrow}{=} g$ (ω ist inverse für z^k)
- $f(z) = z^k \cdot g(z) = (\underbrace{z \cdot h_1(z)}_{=: h(z)})^k$ auf U_0.
- $h(z)$ hat eine einfache Nullstelle in $z_0 = 0$, da

h_1 keine Nullstelle in 0 hat $(h_1(0) = z_1 \neq 0)$.

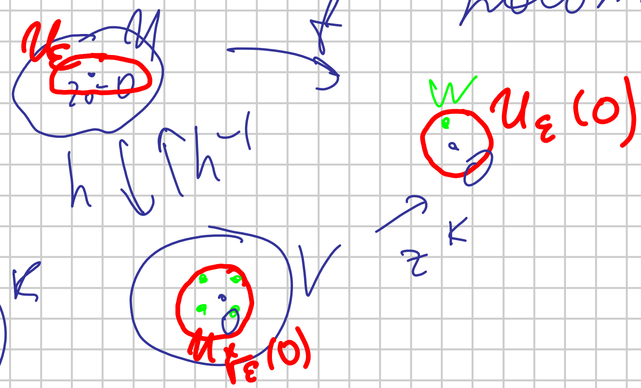
$\boxed{\text{Folgerung 3.13}}$ Sei z_0 eine k-fache Nullstelle einer holom. Fkt f.
Dann $\exists$ für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ eine off. Umg. $\mathcal{U}_\varepsilon$ von z_0 mit

- $f(\mathcal{U}_\varepsilon) = \{w : |w| < \varepsilon\} = \mathcal{U}_\varepsilon(0)$
- $f|_{\mathcal{U}_\varepsilon}$ nimmt $\forall$ Wert w mit $0 < |w| < \varepsilon$ genau k mal und den Wert 0 genau bei z_0 an.



__Beweis__ Sei wieder $z_0 = 0$ (OBdA)
Für $f(z) = z^k$ ist die Aussage wahr mit $\mathcal{U}_\varepsilon := \mathcal{U}_{\sqrt[k]{\varepsilon}}(0)$
Für allg. f gilt nach 3.12:
$\exists\, \mathcal{U}_0$ off. Umg. um 0 $\exists\, h : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{C}$ holom. mit <u>einfacher</u> Nullstelle

in 0 mit $f(z) = (h(z))^k$ auf U_0.
Da h ~~lokal~~ biholom. (siehe Fall 1), $\exists\, U, V$ off. Umg. von 0
s.d. $U \subset U_0$ und
$h|_U : U \to V$ biholom., d.h., $(h|_U)^{-1} : V \to U$ holom,
sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass
$U_{\sqrt[k]{\varepsilon}}(0) \subset V$, und



def. $U_\varepsilon := h^{-1}\left(U_{\sqrt[k]{\varepsilon}}(0)\right)$.

- $f(U_\varepsilon) = (z^k \circ h)(U_\varepsilon) = \left(U_{\sqrt[k]{\varepsilon}}(0)\right)^k$
  $= U_\varepsilon(0)$
- Die verschiedenen k-ten Wurzeln aus $w \in U_\varepsilon(0)$, $w \neq 0$ gehen auf verschiedene k Zahlen unter h^{-1}, und

das sind die k versch. Urbilder von w unter f.
Für $w=0$ ist $z=0$ das einzige Urbild unter z^k, also auch unter f, da h bij ist. ∎

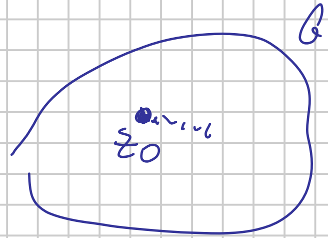
3.5 Identitätssatz, Gebietstreue und das Maximumprinzip.

Erinnere! $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ G offen, zusammenhängend
($\Longleftrightarrow$ offen und wegzusammenhängend, siehe Blatt 4, Auf. 3)

(ii) $\forall$ offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist eine disj. Vereinigung von (höchstens abzählbar vielen) Gebieten.

$\boxed{\text{Th. 3.14}}$ (Identitätssatz) Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holom.

Wenn $f = g$ auf einer Teilmenge, die in G einen Häufungspunkt hat, dann gilt $f \equiv g$ auf ganz G.



Beweis sei $h := f - g$, sei $z_0 \in G$ ein Häufungspunkt von Nullstellen von h.

1 Da h stetig und z_0 wie oben, ist z_0 eine Nullstelle von h.

Fall 1: z_0 hat endliche Ordnung

Sektion 3.4: $\exists$ Umg. um z_0 ohne weitere Nullstellen $\lightning$

Fall 2: z_0 hat Ordnung ∞.

Betrachte: $M := \{ z \in G$ Nullstelle ∞-er Ordnung $\}$.

Es gilt:

- $M \neq \emptyset$, da $z_0 \in M$
- M offen (Potenzreihenentw.: $\forall z \in M \ \exists U_r(z)$ mit $h \equiv 0$ auf $U_r(z)$,

siehe Sektion 3,4)

- $G \setminus M$ ist auch offen:

  Sei $z \in G \setminus M$.

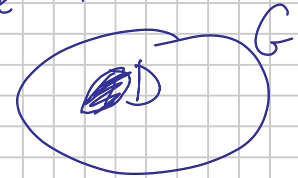
  Fall 1: z keine Nullstelle: $h(z) \neq 0$ $\overset{h \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Umg., wo $h \neq 0$.

  Fall 2: $h(z) = 0$, endl. Ordnung $\underset{\text{Sektion 3.4}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Umg. ohne weitere Nullstellen.

Da G zusammenhängend ist, muss $G \setminus M = \emptyset$, d.h., $M = G \Rightarrow h \equiv 0$ auf G ∎

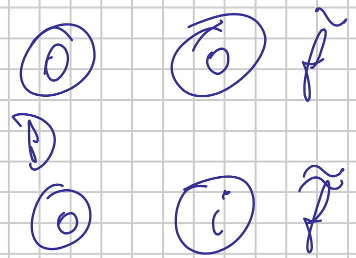
$\boxed{\text{Folgerung 3.15}}$ (Eindeutigkeit der Fortsetzung)

Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge mit (mindestens) einem Häufungspunkt in G und $f : D \to \mathbb{C}$. Wenn es $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ existiert mit:



- $\tilde{f}$ holom. auf G
- $\tilde{f}\big|_D = f$,

dann ist sie eindeutig



$\boxed{\text{Bem.}}$ 1) „G ein Gebiet" ist wichtig!

2) Eine Teilmenge $D \subset G$ heißt **diskret in G**, wenn D keine Häufungspunkte in G hat.

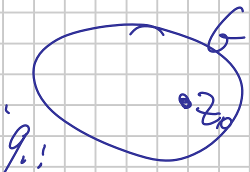
$\boxed{\text{Bsp}}$ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ ist diskret in $(0, 2)$, aber nicht diskret in $(-1, 2)$

Eine Reformulierung des Identitätssatzes:

$f \not\equiv 0$ auf G, G Gebiet $\Longrightarrow$ die Nullstellen von f sind diskret in G.
f holom.

3) Aus 3.14 und seinem Beweis folgt:

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holom., G ein Gebiet. Es sind äq.:



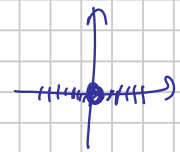
(i) $f \equiv 0$ auf G

(ii) Die Menge der Nullstellen von f hat einen Häufungspunkt in G

(iii) $\exists z_0 \in G$ mit $0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots$

Ü überprüfen Sie das.

4) Die Fkt $\sin\frac{1}{z}: \underbrace{\mathbb{C}\setminus\{0\}}_{=G} \to \mathbb{C}$ holom., $\not\equiv 0$,



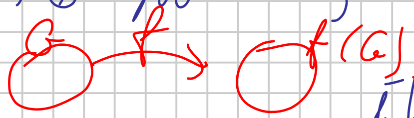
aber $\forall z_k = \frac{1}{\pi k}$ ist eine Nullstelle von f. $(k \in \mathbb{Z})$

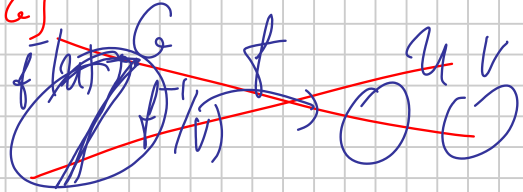
D.h., „Häufungspunkt $\underline{\text{in } G}$" ist wichtig.

5) Aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt z.B., dass man trigon. Formeln auf $\mathbb{C}$ von $\mathbb{R}$ übertragen kann,

z.B. $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ ...

$\boxed{\text{Th. 3.16}}$ (Gebietstreue) Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holom, $\neq$ konst. Dann ist $f(G)$ auch ein Gebiet.





Beweis 1) $f(G)$ ist zusammenhängend.

Ang.: nicht: $f(G) \subset U \cup V$, U, V offen, disjunkt, $f(G) \cap U \neq \emptyset$, $f(G) \cap V \neq \emptyset$

Betrachte $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ offen, disjunkt.

$G = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ $\lightning$ (G zusammenhängend)

2) $f(G)$ ist offen:

Sei $w_0 = f(z_0) \in f(G)$

Z.z.: $\exists\, U_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$

Def: $h(z) := f(z) - w_0$. Dann gilt: $h(z_0) = 0$, und z_0 hat <u>endliche Ordnung</u> ($f \neq$ konst!)

Nach Folgerung 3.13 $\exists\, U_\varepsilon$ off. Umg. um z_0 mit

$$h(U_\varepsilon) = \{ w : |w| < \varepsilon \},$$

d.h., $\forall w$ mit $|w| < \varepsilon$ $\exists z \in G$: $h(z) = w$, sogar aus U_ε

$h(z) = f(z) - w_0$

d.h., $f(z) = w + w_0$

$\Rightarrow U_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$, w_0 beliebig $\Rightarrow f(G)$ offen. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bem.}}$ 1) im Reellen falsch! $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ – nicht offen!

2) Wir haben damit einen alternativen Beweis der folg. Aussage:

$f: G \to \mathbb{C}$ holom. (G Gebiet) Es sind äq.:

(i) $f =$ konst

(iii) $\operatorname{im} f =$ konst

(iii) $\mathrm{Re}\, f = \text{konst}$ (iv) $|f| = \text{konst}$

<u>Beweis</u> (ii), (iii) oder (iv) $\Rightarrow$ $f(G)$ ist kein Gebiet

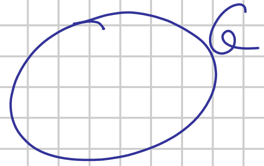
(liegt in | , — bzw. ○)

Eine Folgerung:

$\boxed{\text{Th. 3.17}}$ (Maximumprinzip)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holom., $\neq$ konst.

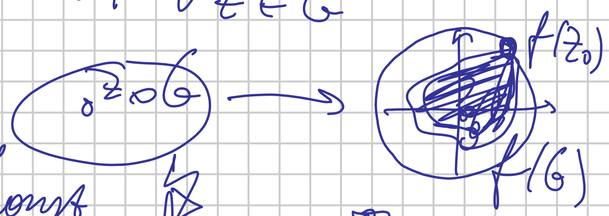
Dann nimmt f kein Betragsmaximum an.



<u>Beweis</u> Ang., $\exists\, z_0 \in G$ mit $|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$

$\Rightarrow f(G)$ liegt in $\overline{U_{|f(z_0)|}(0)}$

und schneidet den Rand



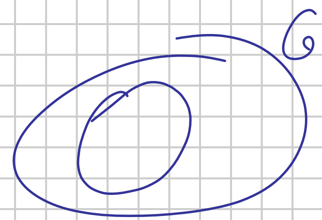
$\Rightarrow f(G)$ ist nicht offen $\overset{\text{Gebietstreue}}{\Rightarrow}$ f konst ⊠

__Bem.__ 1) Es gilt sogar: $\exists$ __lokales__ Betragsmaximum, d.h. $\exists z_0\ \exists U_\varepsilon(z_0): |f(z_0)| \geq |f(z)|$ auf $U_\varepsilon(z_0)$

$\Longrightarrow f = \text{konst.}$

(Maximumprinzip für $f|_{U_\varepsilon(z_0)}$ + Identitätssatz)

2) Sei $K \subset G$ kompakt (z.B. $\overline{U_r(z_0)}$).



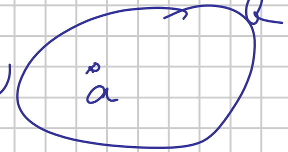
Dann wird der Betragsmaximum __auf dem Rand von K__ angenommen.

($\exists$, da f stetig und K komp.)

$\boxed{\text{Folgerung 3.18}}$ (Minimumprinzip)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holom., $\not\equiv$ konst.

Besitzt f in $a \in G$ ein (lokales) Betragsminimum,



dann ist $f(a) = 0$.

Beweis Ang.: $f(a) \neq 0$. Dann wäre h mit $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ holom. in einer Umg. von a und hätte ein Betragsmaximum in a dort $\underset{3.17}{\Rightarrow}$ $h = \text{konst}$ $\Rightarrow$ f konst $\lightning$ $\blacksquare$

Bem. Dies liefert einen alternativen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra!

p Polynom mit $\operatorname{grad} p \geq 1 \Rightarrow p$ hat (mindestens eine) Nullstelle $\in \mathbb{C}$

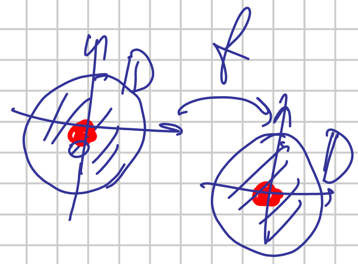
Bem. Da $|p(z)| \xrightarrow[|z| \to \infty]{} \infty$ (siehe früher)

$\Rightarrow$ p hat Betragsminimum (warum?)

$\Rightarrow$ p hat eine Nullstelle.

Eine (wichtige) Anwendung des Maximumprinzips ist:

$\boxed{\text{Prop. 3.19}}$ (Schwarz'sches Lemma)



Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holom. mit $f(0) = 0$.

Dann gilt $\forall z \in \mathbb{D}$

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Wenn $|f'(0)| = 1$ <u>oder</u> gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}$, dann $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

d.h., f ist eine Drehung.

<u>Beweis</u> 1) zz: $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$

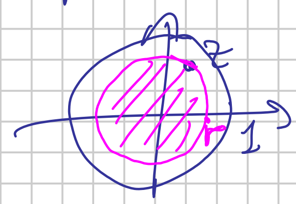
Potenzreihenentw.: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = z \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}}_{=: g(z)} = z \cdot g(z)$

$\forall z \in \mathbb{D}$, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holom.

Es gilt: $f'(0) = g(0)$

ZZ: $|g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}$. $\quad$ ($z=0$ liefert $|f'(0)| \leq 1$)

Sei $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| =: r < 1$



Nach Voraussetzung gilt:

$r \cdot |g(z)| = |f(z)| < 1 \Rightarrow |g(z)| < \frac{1}{r} \quad \forall z$ mit $|z| = r$

Maximumprinzip: $|g(z)| < \frac{1}{r} \quad \forall z$ mit $|z| \leq r$

$r \to 1$: $\quad |g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

2) ist $|g(z_0)| = 1$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}$, ist $g \equiv$ konst (Max'Prinzip)

d.h., $g(z) = e^{i\theta}$ für ein $\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z) = e^{i\theta} \cdot z$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Folgerung 3.20}}$ Sei $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholom. mit $f(0) = 0$. Dann ist f eine Drehung, d.h., $\exists \theta \in \mathbb{R}$:

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot z \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

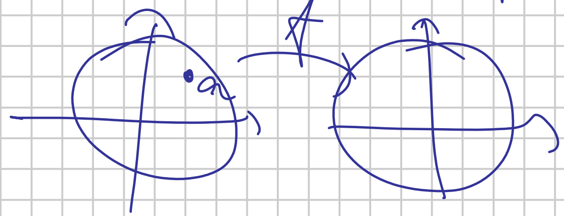
Beweis Schwarzsches Lemma (Teil 1) für f und f^{-1}:

$|f(z)| \leq |z|$, $\quad |f(z)| \geq |z|$ $\quad \Rightarrow \quad |f(z)| = |z| \quad \forall z$

$(\Leftarrow) \; |w| \geq |f^{-1}(w)|)$

Schwarz, Teil 2: f ist eine Drehung.

Frage: $\exists$ nichttriv. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholom.? (ohne die Vorausn. $f(0)=0$)



$\boxed{\text{Bsp } 3.21}$ Sei $a \in \mathbb{D}$. Def.:

$$f_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z - 1}$$

Behauptung:

1) $f_a: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holom. mit $f_a(0) = a$, $f_a(a) = 0$

2) f_a ist bij mit $f_a^{-1} = f_a$ $\qquad 0 \overset{f}{\longleftrightarrow} a$

Beweis 1) $\forall z \in \mathbb{D}$ ist $\bar{a}z - 1 \neq 0$, da $|\bar{a}z| < 1$, d.h., f_a ist auf $\mathbb{D}$ wohldef. und holom.

$f_a(a) = 0$ klar, $f_a(0) = a$ auch.

zz.: $|f(z)| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

$$|z-a|^2 < |\bar{a}z - 1|^2 \iff |z|^2 + |a|^2 - \cancel{2\operatorname{Re}(\bar{a}z)} < |\bar{a}z|^2 + 1 - \cancel{2\operatorname{Re}(\bar{a}z)}$$

$$\iff |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2 + 1 > 0$$

$$\iff (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1) > 0 \quad \text{wahr!}$$

2) Wir zeigen: $f_a(f_a(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{D}$

Da $z \mapsto z$ bij. ist, muss ~~auch~~ dann f_a bij. sein (warum?)

Außerdem gilt dann $f_a^{-1} = f_a$.

Sei $z \in \mathbb{D}$. Wir haben:

$$f_a(f_a(z)) = \frac{\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - a}{\bar{a} \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1} - 1} = \frac{z - \cancel{a} - |a|^2 z + \cancel{a}}{\cancel{\bar{a}z} - |a|^2 - \cancel{\bar{a}z} + 1} = \frac{z(1 - \cancel{|a|^2})}{1 - \cancel{|a|^2}} = z \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Th } 3.22}$ (<u>Struktur der bihollom. Abb. auf $\mathbb{D}$</u>)

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholom. Dann $\exists\, \theta \in \mathbb{R}\ \exists\, a \in \mathbb{D}$ mit

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z - 1} \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

<u>Beweis</u> Betrache $a := f^{-1}(0)$ und

$$g(z) := f(\varphi_a(z))$$

- $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist biholom.
- $g(0) = f(\underbrace{\varphi_a(0)}_{a}) = 0$

Schwarzsches Lemma (eigentlich Folgerung 3.20):

$$f(\underbrace{\varphi_a(z)}_{=:w}) = g(z) = e^{i\theta} \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi_a(w)}}{z} \quad \text{für ein } \theta \text{ und alle } z$$

d.h., $f(w) = e^{i\theta} \varphi_a(w) \quad \forall w \in \mathbb{D}$

∎

4. Isolierte Singularitäten und Laurentreihen.

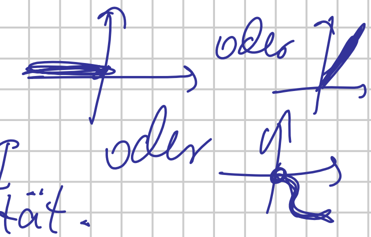
4.1. Die drei Arten isolierter Singularitäten.

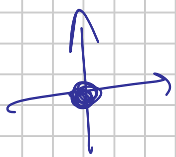
$\boxed{\text{Def. 4.1}}$ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holom., $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt ein Punkt $a \notin U$ eine <u>Singularität</u> von f. Weiterhin heißt $a \notin U$ eine <u>isolierte Singularität</u>, wenn für ein $r > 0$
$U_r(a) \setminus \{a\} \subset U$.

<u>Bem.</u> Wir schreiben $\dot{U}_r(a) := U_r(a) \setminus \{a\}$ und nennen es die punktierte Umgebung.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\operatorname{Log} z$: 0 immer eine Singularität + Halbgerade (hängt vom Zweig ab)

– alle Singul. nicht isoliert





2) Die Fkt'en $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}}$: $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ haben in $a = 0$ eine isolierte Singularität.

Das Verhalten der Fkt'en in der Nähe von 0 ist aber sehr verschieden.

$\boxed{\text{Def. 4.2}}$ Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holom., U offen. Eine isolierte Singularität a heißt:

- hebbar, wenn f holomorph auf $U \cup \{a\}$ fortgesetzt werden kann,
- ein Pol von f, wenn a nicht hebbar ist, aber ein $m \geq 1$ existiert $(m \in \mathbb{N})$, s.d. die Fkt

$$(z-a)^m f(z)$$

eine hebbare Singularität in a hat. Die kleinste solche Zahl m heißt die Ordnung des Poles.

- wesentlich sonst, also wenn a nicht hebbar und kein Pol ist.

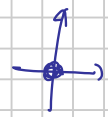
Eine Fkt $f: U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt meromorph, wenn f bis auf Pole in U holom. ist.

$\boxed{\text{Bsp 4.3}}$ 1) Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holom. Dann ist $a \in U$ eine hebbare Sing. für $f|_{U \setminus \{a\}}$

2) Sei $g: U \to \mathbb{C}$ holom. mit $g(a) \neq 0$. Dann hat f mit

$$f(z) := \frac{g(z)}{(z-a)^m} \qquad (f: U \setminus \{a\} \to \mathbb{C})$$

einen Pol m-ter Ordnung in a.

3) Die Fkt $f(z) = \sin\frac{1}{z}$, $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ hat 
eine wesentliche Singularität in $a = 0$.

<u>Bew.</u> Ang.: $\exists\, m \geq 0$ s.d. $g(z) := z^m f(z)$ holom. in $\mathbb{C}$ ist. (d.h.: kann holomorph fortgesetzt werden)

Da $g\left(\frac{1}{\pi k}\right) = \left(\frac{1}{\pi k}\right)^m \cdot \sin(\pi k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, 

muss nach dem Identitätssatz $g \equiv 0$ $\lightning$

$\boxed{\text{Lemma 4.4}}$ Seien $g, h: U \to \mathbb{C}$ holom., $a \in U$

Wenn a eine Nullstelle von g mit Vielfachheit m und von h mit Vielfachheit k ist, so hat die Fkt

$$f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$$

in a
- eine Nullstelle der Ordnung $m-k$, falls $m > k$ (durch Fortsetzung)
- eine hebbare Singularität (Wert $\neq 0$), falls $m = k$
- ein Pol der Ordnung $k-m$, falls $m < k$

<u>Beweis</u> Als erstes ist a isolierte Sing., da isol. Nullstelle von h (Identitätssatz)

Potenzreihenentw.: $g(z) = (z-a)^m \cdot \tilde{g}(z)$, $\tilde{g}(a) \neq 0$ a

$h(z) = (z-a)^k \cdot \tilde{h}(z)$, $\tilde{h}(a) \neq 0$,

$\tilde{g}, \tilde{h} : U \to \mathbb{C}$ holom.

Es gilt:

$$f(z) = (z-a)^{m-k} \cdot \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}$$

holom. in einer Umgeb. von a mit Wert $\neq 0$

- $m > k$ klar
- $m = k$ auch
- $m < k$: Pol klar.

Ordnung $= k - m$ – siehe Bsp. 4.3, 2)

<u>Bem.</u> 1) $m = 0$ bzw. $k = 0$ ist möglich! (siehe Beweis)

2) Insbesondere gilt:

f hat eine Nullstelle k-ter Ordnung $\iff \frac{1}{f}$ hat einen Pol der Ordnung k

(Warum ist a für $\frac{1}{f}$ isolierte Singul.?)

3) f holom. oder meromorph, $\not\equiv 0$ auf einem Gebiet $\implies \frac{1}{f}$ ist auch holom. oder meromorph

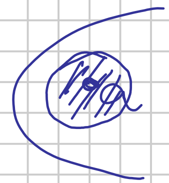
Die Menge $\{f : G \to \mathbb{C}$ holom. oder meromorph$\}$ (G fest) bildet einen Körper bzgl. $+$ und $\cdot$

4.2 Verhalten der Fkt in der Nähe einer Singularität

Frage: Wie verhält sich f in der Nähe von a (a isol. Singul.)?
Wie kann man herausfinden, ob a hebbar, ein Pol oder wesentlich ist?

Zuerst hebbare Sing.:

$\boxed{\text{Th 4.5}}$ (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holom., U offen. Eine isol. Singularität $a \notin U$ ist hebbar $\Longleftrightarrow$ $\exists r > 0$: f beschränkt auf $\dot{U}_r(a) := U_r(a) \setminus \{a\}$



Bemerk.: $\dot{U}(a) := U(a) \setminus \{a\}$ heißt die punktierte Umgebung von a.

Beweis: $\Longrightarrow$ klar

$\Longleftarrow$ Sei OBdA $a = 0$ (warum?)

Def. $h: U_r(a) \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \begin{cases} z^2 f(z), & \text{wenn } z \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } z = 0 \end{cases}$$

- h ist diff'bar in $U_r(a)\setminus\{a\}$
- auch diff'bar in 0:

$$\frac{h(z)-h(0)}{z} = \frac{z^{\cancel{2}} f(z)}{\cancel{z}} = z\cdot \underbrace{f(z)}_{\text{beschr.}} \xrightarrow[z\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow h'(0)=0$

Potenzreihenentw. von h in 0 $(h(0)=h'(0)=0)$:

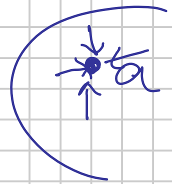
$$h(z) = c_2 z^2 + \dots = z^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{n-2}}_{\text{holom. auf } U_r(a)}$$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{n-2}$ auf $\dot{U}_r(a)$

$\Rightarrow f$ ist durch $f(0) := c_2$ auf ganz $U_r(a)$ holom. fortsetzbar! $\blacksquare$

Jetzt Pole:

$\boxed{\text{Prop. 4.6}}$ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holom., U offen, und sei $a \notin U$ ein Pol von f. Dann gilt:



$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$$

__Beweis__ Sei $k \in \mathbb{N}$ die Polordnung von f in a. Betrachte

$$h(z) := (z-a)^k f(z),$$

$h: U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ holom.

Behauptung: $h(a) \neq 0$.

Bew. der Beh.: Ang.: $h(a) = 0$. Dann wäre $\frac{h(z)}{z-a}$ holom. (fortsetzbar) in $U \cup \{a\}$ (siehe Lemma 4.4) $\Rightarrow$ k nicht minimal $\lightning$ $\boxed{\text{\%}}$ - Behauptung.

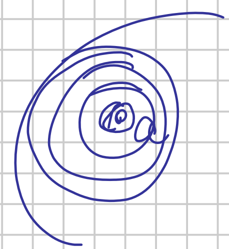
Also $\exists\, \delta > 0$ (z. B. $\delta := \frac{|h(a)|}{2}$) $\exists\, r > 0$:

$$|h(z)| \geq \delta \quad \forall z \in U_r(a)$$

$$|f(z)| \geq \frac{\delta}{|z-a|^k} \xrightarrow[z \to a]{} \infty$$

$\boxed{\text{Th } 4.7}$ (Satz von Casorati–Weierstraß)

Seien $f: U \to \mathbb{C}$ holom., U offen, $a \notin U$ eine wesentliche Singularität und $\varepsilon > 0$ mit $\mathring{U}_\varepsilon(a) \subset U$.



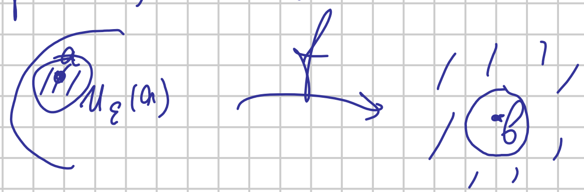
Dann liegt $f(\mathring{U}_\varepsilon(a))$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h., f kommt in $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ jedem Wert aus $\mathbb{C}$ beliebig nah.

Erinnere: $V \subset \mathbb{C}$ ist dicht in $\mathbb{C}$, wenn $\forall\, U \subset \mathbb{C}$ offen $V \cap U \neq \emptyset$.

Ü: Die Behauptung des Satzes 4.7 ist äq. zu:

$$\forall\, b \in \mathbb{C} \;\; \exists (z_n) \text{ mit } z_n \to a: \;\; f(z_n) \to b.$$

Beweis: Ang.: $\exists \varepsilon$: $f(\mathring{U}_\varepsilon(a))$ nicht dicht.



D.h., $\exists\, b \in \mathbb{C} \;\; \exists\, \delta > 0$:

$$|f(z)-b| \geq \delta \quad \forall z \in \dot{U}_\varepsilon(a)$$

Betrachte:

$$g(z) := \frac{1}{f(z)-b} \quad \text{auf } \dot{U}_\varepsilon(a)$$

- g ist holom. auf $\dot{U}_\varepsilon(a)$
- $|g(z)| \leq \frac{1}{\delta}$ auf $\dot{U}_\varepsilon(a)$

Also ist a eine hebbare Singul. für g (siehe Riemannschen Hebbarkeitssatz 4.5)

<u>Fall 1</u> $g(a) \neq 0$ (hier: holom. Fortsetzung).

Dann hat

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$$

eine hebbare Singul. in a. $\lightning$

<u>Fall 2</u> $g(a) = 0$. Da $g \not\equiv 0$, hat a endliche Ordnung

$\Rightarrow$) $f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$ hat einen Pol in a ↯ (a ist wesentlich) ■

<u>Bem.</u>: Es gilt sogar mehr (Satz von <u>Picard</u>): In $f(\dot{U}_\varepsilon(a))$ darf höchstens <u>ein Punkt</u> fehlen! (ohne Beweis)

$\boxed{\text{Bsp}}$ Für $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ fehlt für $a = 0$ fehlt $b = 0$.

Insgesamt haben wir:

$\boxed{\text{Sh } 4.8}$ (<u>Klassifikation der isol. Singul. durch das Abbildungs-verhalten</u>)

Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isol. Singul. einer holom. Fkt $f : U \to \mathbb{C}$, U offen.

a) a ist hebbar $\Longleftrightarrow$ f beschr. in einer punktierten Umgebung von a

b) a ist ein Pol $\Longleftrightarrow$ $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$

c) a ist wesentlich $\Longleftrightarrow$ $f(\dot{U}_\varepsilon(a))$ ist dicht $\forall$ kleine $\varepsilon > 0$

Beweis a) ✓ (4.5)

b) $\Rightarrow$ ✓ (4.6)

c) $\Rightarrow$ ✓ (4.7)

b) $\Leftarrow$ Ang.: $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty \Rightarrow$ a ist nicht hebbar nach a), aber auch nicht wesentlich nach Casorati-Weierstraß 4.7

$\Rightarrow$ a ist ein Pol.

c) $\Leftarrow$ wenn $f(\dot{U}_\varepsilon(a))$ dicht ist, ist es nicht beschr., also ist a nicht hebbar, und $\nexists \lim |f(z)|$, also kein Pol. ∎

4.3. Laurentreihen

$\boxed{\text{Def 4.9}}$ Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

oder genauer das Paar

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

Nebenteil — Hauptteil

eine (formale) Laurentreihe.

Die Laurentreihe heißt konvergent, wenn beide Teile konvergieren.

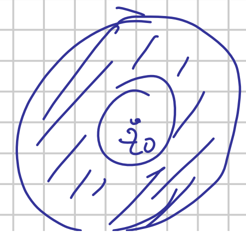
Analog: gleichmäßige, absolute und kompakte Konvergenz.

Bem.: Der Nebenteil ist eine Potenzreihe um z_0 oder um 0 in $(z-z_0)$, und der Hauptteil auch eine Potenzreihe um 0 in $\frac{1}{z-z_0}$.

$\boxed{\text{Beobachtung 4.10}}$ (Konvergenzgebiet der Laurentreihen)

Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ eine Laurentreihe. Dann $\exists r, R \in [0,\infty]$ s.d.

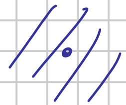
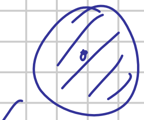
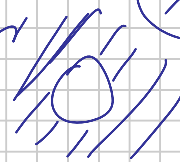
- $\sum$ konv. absolut und kompakt im Ring $A := \{z \in \mathbb{C} ; r < |z| < R\}$

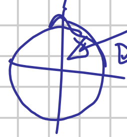


• Σ divergiert auf $\mathbb{C} \setminus \overline{A} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > R \text{ oder } |z| < r \}$

im Allg. kann man keine Aussage über Konv. auf dem Rand $\{ z : |z| = r \text{ oder } |z| = R \}$ machen.

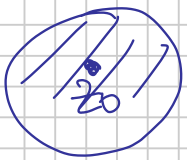
Bem. Der Ring kann auch ausgeartet sein:

• $r = 0$ und / oder $R = \infty$ möglich  oder  oder 

• $r = R$  Divergenz

• $r > R$ $A = \emptyset$, überall Divergenz

Beweis • Der Nebenteil ist p' Reihe $\Rightarrow \exists R \in [0, \infty]$ Konvergenzradius, abs + komp. Konv. in $U_R(z_0)$, Divergenz in $\mathbb{C} \setminus \overline{U_R(z_0)}$

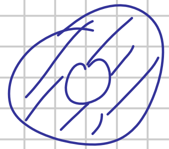


• Der Hauptteil = p' Reihe in $\frac{1}{z - z_0}$ um 0

$\Rightarrow$ dasselbe für Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$ und Variable $\frac{1}{z - z_0}$ um 0.

$$\frac{1}{z - z_0} \in U_r(0) \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z - z_0}\right| < r \Leftrightarrow |z - z_0| > \frac{1}{r}$$

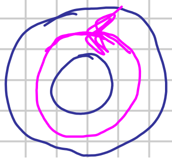
$\Leftrightarrow z \in$ 

Insgesamt: Konv. in  usw. (bzw. ausgeartet!) ... $\blacksquare$

<u>Bem.</u> Insbesondere kann man eine Laurentreihe gliedweise differenzieren und integrieren (die Limesfkt ist holom).

$\boxed{\text{Prop. 4.11}}$ (Cauchyformel für die Laurentkoeff.)

Konvergiert eine Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ im Kreisring $\{z : r < |z| < R\}$ mit $r < R$, $r, R \in [0, \infty]$ gegen f, so gilt



$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz} \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

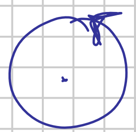
wobei $\rho \in (r, R)$ beliebig ist und $\{z : |z - z_0| = \rho\}$ positiv orientiert ist.

<u>Bem</u> insbesondere sind die Koeff. eindeutig durch f bestimmt.
(C)S $\Rightarrow$ c_n hängt von ρ nicht ab)

<u>Beweis</u> Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest. Es gilt

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-(n+1)}$$ (derselbe Konvergenz-bereich - warum?)

Für $m \in \mathbb{Z}$ gilt



$$\int\limits_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^m \, dz = \int\limits_{|w|=\rho} w^m \, dw = \left[\begin{array}{l} w = \rho \cdot e^{i\varphi} \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array} \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \rho^m \cdot e^{i\varphi m} \cdot \rho \cdot i \cdot e^{i\varphi} \, d\varphi = \rho^{m+1} i \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(m+1)} \, d\varphi$$

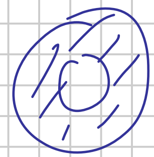
$$= \begin{cases} 0 & , m \neq -1 \\ 2\pi i & , m = -1 \end{cases}$$

Gliedweise integrieren:

$$\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-(n+1)} = 2\pi i\, c_n \qquad \blacksquare$$

4.4 Laurentreihenentwicklung

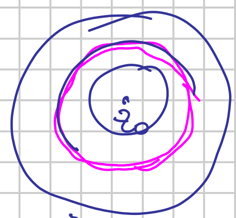
$\forall$ Laurentreihe konv. (abs. und gleichm.) in einem Kreisring $A := \{ z : r < |z-a| < R \}$ gegen eine holom. Fkt.

__Frage:__ Umkehrung, d.h., ist $\forall$ holom. Fkt auf  Limes/Summe einer Laurentreihe?

$\boxed{\text{Th } 4.12}$ (Laurentreihenentwicklung)

Seien $0 \le r < R \le \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f: \{z : r < |z-a| < R\} \to \mathbb{C}$ holom. Dann gilt dort

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$



wobei die Koeff. c_n eindeutig bestimmt sind mit

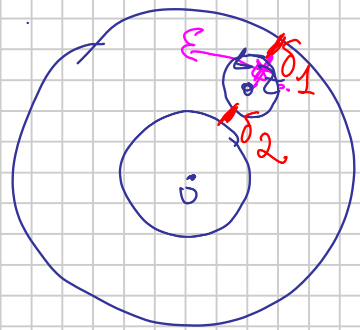
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

für beliebiges $\rho \in (r, R)$.

<u>Beweis</u> OBdA sei $z_0 = 0$. Sei z mit $r < |z| < R$.

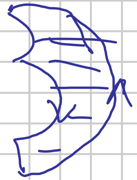
CIF: für $\varepsilon > 0$ klein gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$



Da $\frac{f(w)}{w-z} =: h(w)$ holom. in $A := \{z : r < |z| < R\} \setminus \overline{U_{\varepsilon/2}(z)}$

$|w| = \varepsilon$ ← pos. orientiert

 und  stetige Bilder eines Rechtecks sind, gilt nach dem CIS für δ_1 und δ_2 wie auf dem Bild:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = R-\delta_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{=: f_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = r+\delta_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{=: f_2(z)}$$

1) f_1: hier gilt $|w| = R - \delta_1 > |z|$

Nach $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\underbrace{\frac{z}{w}}_{|\cdot|<1}} = \frac{1}{w} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot w^{-(n+1)}$

und gleichm. konv. der Reihe für $|w| = R - \delta_1$ gilt

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R-\delta_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw =: c_n, \quad n \geq 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot c_n$$

2) f_2: hier ist $|w| = r + \delta < |z|$ und

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\underbrace{\frac{w}{z}}_{|\cdot|<1}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}$$

konv. gleichm. in w

$$\Rightarrow f_2(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r+\delta} f(w) \cdot w^{n-1}\, dw$$

$$= -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r+\delta} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw =: c_n,\ n \leq -1$$

Die Eindeutigkeit folgt aus Prop. 4.4 ∎

$\boxed{\text{Folgerung 4.13}}$ (Cauchysche Abschätzung der Laurentkoeff.)

Für $f : \{z : r < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}$ holom. (mit $0 \leq r < R \leq \infty$) und $\rho \in (r, R)$, Wenn für ein $M \geq 0$

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \text{ mit } |z - z_0| = \rho$$

ist, so gilt

$$\boxed{|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$$

für die Laurentkoeff. (c_n).

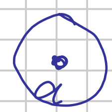
__Beweis__ Nach 4.12 haben wir:

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right| \le \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot \cancel{2\pi}\cancel{\rho}\cdot\frac{M}{\rho^{\cancel{n+1}}} = \frac{M}{\rho^n} \quad \blacksquare$$

4.5 Anwendung auf isolierte Singularitäten

Sei a eine isolierte Singularität von $f: U \to \mathbb{C}$, d.h., f ist holomorph in einem Ring der Form

$$\dot{U}_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < R\}$$



für ein $R > 0$. Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ die Laurentreihenentw. von f in $\dot{U}_R(a)$

$\boxed{\text{Prop. 4.14}}$ (Arten der isol. Singularität und Laurentreihenentw.)

Seien f, a, R, $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ wie oben. Es gelten:

(a) a ist hebbar $\iff$ $c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0$, d.h., der Hauptteil verschwindet.

(b) a ist ein Pol der Ordnung k $\iff$ $c_{-(k+1)} = c_{-(k+2)} = \ldots = 0$ und $c_{-k} \neq 0$;

d.h., der Hauptteil bricht nach $\frac{c_k}{(z-a)^k}$ ab.

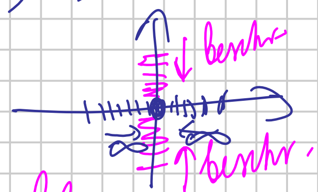
(c) a ist wesentlich $\iff$ $c_{-n} \neq 0$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$,

d.h., der Hauptteil hat ∞-viele Terme.

<u>Beweis</u>: Ü

$\boxed{\text{Bsp}}$ $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-n}$

Da ∞-viele Koeff. im Hauptteil $\neq 0$ sind (alle!), ist $a = 0$ wesentlich.



(Eine alternative Methode:

- $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^n \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} \infty$ $\Rightarrow$ nicht hebbar,
- $f\left(\frac{1}{i \cdot n}\right) = e^{in} \not\to \infty$ (beschr.!) $\Rightarrow$ kein Pol

$\Rightarrow$ $a = 0$ ist wesentlich)