

2.3, d): Wenn f ein Stammfkt $\checkmark$ besitzt,
gilt

$$\int f = F(\delta(b)) - F(\delta(a)).$$

Satz 2.4 Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ (U offen) stetig
und besitze f ein Stammfkt in U . Dann

gilt:

$$\int f = 0$$

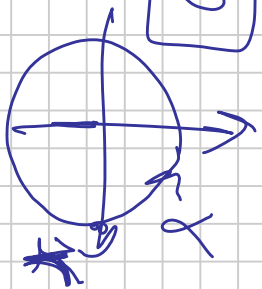


für jede in U herumlaufende geschlossene

Stückweise glatte γ Kurve γ .

Bemerkung: Folgt direkt aus Prop. 2.3, d). ($b=a$)

Bsp



Für $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
wissen wir:

$$\int \gamma^n d\gamma = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

Für $n \neq -1$ hat $f(z) = z^n$ ein Stammfkt $\frac{z^{n+1}}{n+1}$
auf $\mathbb{C} \Rightarrow \int \gamma^n d\gamma = 0$ stimmt

Für $n = -1$ hat $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfkt,
da $\int \frac{1}{z} dz \neq 0$. Keine Überraschung;

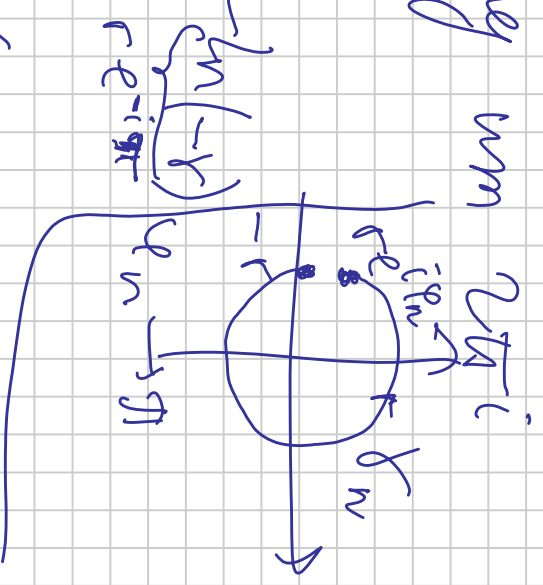
der Logarithmus kann in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
nicht mal stetig definiert werden.

~~da~~ $\int \frac{1}{z} = 2\pi i$ entspricht der Tatsache

dass der Logarithmus einen Sprung um $2\pi i$ hat: Für γ_n (wie auf der Skizze) haben wir

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{z} dz = \ln(re^{i\varphi_n}) - \ln(r)$$

Hauptwert
des Logarithmus



$$\text{Der Rest: } \left| \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \right| = \ln r + i\varphi_n - \ln r + i\varphi_n \rightarrow 2\pi i$$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \right| \leq \ln(r) \cdot \frac{1}{r} \rightarrow 0$$



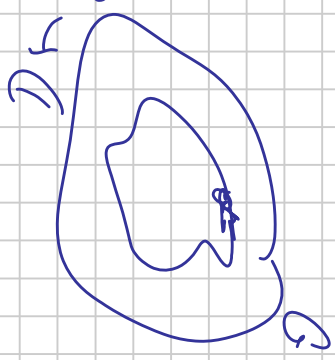
Wenn γ die 0 nicht umläuft, dann ist $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$.
Annahme für Satz 2.4:

Satz 2.5

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$

stetig. Wenn $\int \gamma = 0 \quad \forall$ abg. Weg γ mit

Bild $\gamma \subset G$ gilt, dann hat f eine Stammfkt auf G , d.h., $\exists F: G \rightarrow \mathbb{C}$ holom. mit $F' = f$



Bem.: 1) Für offene Mengen U gilt:

U zusammenhäng. $\Leftrightarrow U$ wegzusammenhäng. d.h. $\forall z, w \in U \exists \gamma$ in U zwischen z und w .



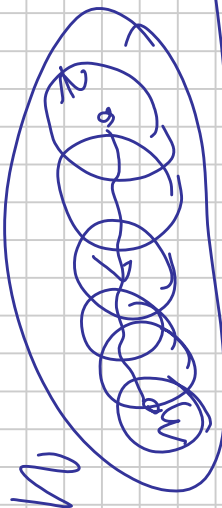
2) Sei U offen, $z, w \in U$.

$\exists$ stet. Weg in U von z nach $w \Leftrightarrow$

Dann: $\exists$ Stückerweise C^1 -Weg in U von z nach w

stetig

Beweisskizze



für γ ein stetiger Weg in M
von z nach w .

$$\forall v \in \text{Bild}(\gamma) \quad \exists U_{r_v}(v) \subset M$$

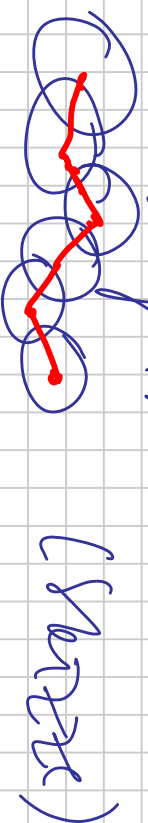
offene Kugel
um v mit Rad.

Da γ stetig und $[a, b]$ komp.,
ist $\text{Bild}(\gamma)$ kompakt in E , also hat r_v
jede offene Überdeckung eine endliche Teilabt.

$$\exists k \quad \exists U_1, \dots, U_k \in \text{Bild}(\gamma):$$

$$\text{Bild}(\gamma) \subset \bigcup_{j=1}^k U_{r_{v_j}}(v_j)$$

Nummeriere die $U_{r_{v_j}}$ und verbinde die
Zentren.



Beweis von 2.5

Sei $z_0 \in G$ fest, $z \in C_0$.



Da G zusammenhängend (+ offen) ist, $\exists$ einen stückweise C^1 -Weg γ in G von z_0 nach z und wir def.

$$F(z) := \int_{z_0}^z f$$

Wir überprüfen: F hängt nicht von γ ab.

Seien γ_1, γ_2 zwei solche Wege

Setze $\gamma := \{\gamma_1, \gamma_2^{-1}\}$, wobei



γ_2^{-1} umgekehrt der Richtung darstellt.

und $\{\gamma_1, \gamma_2^{-1}\}$ bedeutet, dass zuerst γ_1

und dann γ_2 gelaufen wird (Vor.) : $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = 0$.

Wir zeigen: f ist holom. in G und $f' = f$.



Für $h \in \mathcal{U}_r(0)$ gilt:
 Sei $z \in G$, $r > 0$ mit $\mathcal{U}_r(z) \subset \mathcal{U}$ offen

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) dw$$

und $\int_z^{z+h}$ kann über die gerade Verbindungsstrecke

berechnet werden:

Wir haben also:

$$\frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) dw = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dz + \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dz$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z)$$

$$| \cdot | \leq \sup_{w \in [z, z+h]} |f(w) - f(z)|$$

$\leftarrow$ mit $[z, z+h]$ ist $\mathcal{U}$ offen

Bem. 1 "G Gebiet" kann man durch "G offen" ersetzen, indem man die Stammspitze in jeder Zweikomponente extra definiert.

2) Der Beweis liefert mehr als nur 3 der Stammspitze: Methode!

Bemerkung (Notation) γ^- und $\gamma(\beta)$
 Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow Q$ ein (stückweise) C^1 -Kurve
 WS bezeichnen mit γ^- die Kurve

$$\gamma^-: [a, b] \rightarrow Q$$

$$\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$$



Für $\gamma, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ setze $\tilde{\gamma} := \gamma, \tilde{\beta} := \gamma\beta$ für

$$\tilde{\gamma}: [a, 2b-a] \rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{\gamma}(t) \equiv \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \beta(t-(b-a)), & t \in [b, 2b-a] \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\int_a^b f = - \int_b^{2b-a} f$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^b \underbrace{f(\gamma(b+a-t))}_{=: s} \cdot (-\gamma'(b+a-t)) \underbrace{dt}_{=ds} \\ &= (-1)^3 \int_a^b \gamma(s) \gamma'(s) ds = - \int_b^{2b-a} f \end{aligned}$$

$$\cdot \int_a^b f = \int_a^b f + \int_b^{2b-a} f$$

$$\int_a^b f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \int_b^{2b-a} f(\underbrace{\beta(t-(b-a))}_{=s}) ds$$

$$= \int_a^b f + \int_b^{2b-a} f$$

Prop. 2.6 Sei (f_n) eine Folge stetiger Fkt'en auf $M \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n \rightarrow f$ gleichm. in M
 Dann gilt

$$\int f_n \rightarrow \int f$$

$\forall \gamma: [a,b] \rightarrow M$ stückweise C^1 . Wenn $\sum f_n$ gleichmäßig in M gegen f konv., dann:

$$\int \sum f_n = \sum \int f_n$$

Bemerk.: Die erste Aussage folgt aus:

$$\left| \int_{\gamma} (f_n - f) \right| \leq \sup_{z \in \text{Bild}(\gamma)} |f_n - f|(z)| \cdot \ell(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (gleichm. Konv.)

Die zweite Aussage folgt aus der ersten für $g_n := \sum_{n=1}^N f_n \rightarrow f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

$$\int g_N = \int \sum_{n=1}^N f_n \xrightarrow{\text{Schritt 1}} \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$



$$\sum_{n=1}^N \int f_n$$

Bemerk. $\int, h.$ gleichmäßig konv. Reihen können

gliedweise integriert werden. Insbesondere gilt

das für Potenzreihen längs einer im inneren des Konvergenzkreises liegenden Kurve γ :



$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int (z-z_0)^n dz$$

Wen über Potenzreihen kommt bald.

2.2. Der Cauchysche Integralsatz

Wir fangen mit einem Spezialfall an:

$\text{Bild}(\gamma) = \text{Dreieck}$.

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ verschieden.

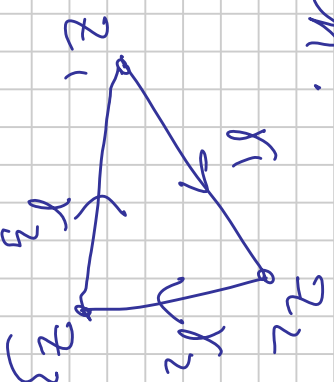
Wir bezeichnen mit

$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$$

den Dreiecksweg $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, wobei

$$\gamma_1(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = z_2 + (t-1)(z_3 - z_2), \quad t \in [1,2]$$



$$\gamma_3(t) = z_3 + (t-2)(z_1-z_3), \quad t \in [2,3]$$

und

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in (0,1) \\ \gamma_2(t), & t \in [1,2] \\ \gamma_3(t), & t \in [2,3] \end{cases}$$

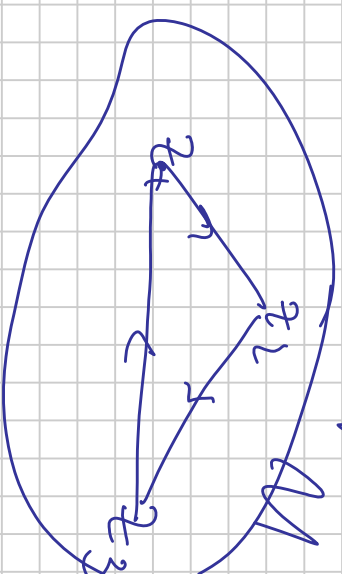
Satz 2.7 (Satz, Cauchy'scher Integralsatz
für Dreiecksweg)

Sei $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holom. (U offen). Seien

$z_1, z_2, z_3 \in U$ verschieden, s.d. sie von ihnen aufgespannt

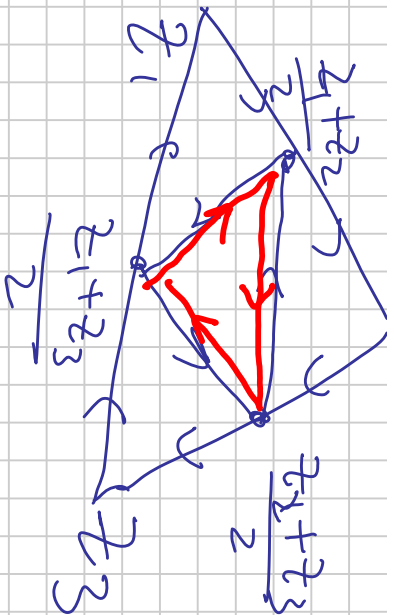
Δ -Fläche $\subset U$. Dann gilt

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f = 0$$



Beweis

Wir halbieren jede Seite des Dreiecks



und bekommen 4 weitere Δe_i :

$$\delta_1 := \left\langle \frac{z_1 + z_2}{2}, z_2, \frac{z_2 + z_3}{2} \right\rangle$$

$$\delta_2 := \left\langle \frac{z_1 + z_3}{2}, z_3, \frac{z_2 + z_3}{2} \right\rangle$$

$$\delta_3 := \left\langle z_1, \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2} \right\rangle$$

$$\delta_4 := \left\langle \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2} \right\rangle$$

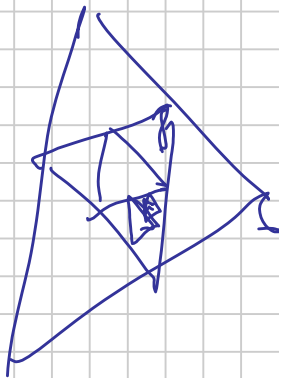
Wir haben:

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f = \int_{\delta_1} f + \int_{\delta_2} f + \int_{\delta_3} f + \int_{\delta_4} f.$$

Bereich mit $\Delta^{(1)}$ das Dreieck mit Randkurve δ_j mit

$$\|f\| = \max_{v=1, \dots, 4} \left| \int_{\delta_v} f \right|, \text{ also } \|f\| \leq 4 \cdot \|f\|$$

$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle \delta_j$$



Teil des zugehörigen Dreiecks wieder von.
Wir bekommen iterativ eine Kette

$$\stackrel{\text{Punkt}(z_1, z_2, z_3)}{=} \Delta \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

und

$$|\int f| \leq 4^n \cdot \int |f|$$

Die Zentren von $\Delta^{(n)}$ bilden eine Cauchyfolge,

$\mathbb{C}$ ist vollständig $\Rightarrow \exists z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(n)}$.

f ist komplex diff'bar in z_0 :

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \quad \text{mit}$$

$$\frac{r(z)}{|z - z_0|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

Also gilt $\forall n$

$$\left| \int_{\gamma} f | \leq 4^n \cdot \left| \int_{\gamma^{(n)}} f | \leq 4^n \left| \int (f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)) dz \right| \right.$$

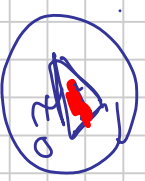
$$+ 4^n \cdot \left| \int_{\gamma^{(n)}} r(\tilde{z}) dz \right| \underbrace{\leq 0, \text{ da } \exists \text{ Stammf.}}_{\text{und } \gamma^{(n)} \text{ geschlossen.}}$$

$$\leq 4^n \cdot \text{Länge}(\gamma^{(n)}) \cdot \sup_{z \in \Delta^{(n)}} |r(z)|.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung an r $\exists \delta > 0$:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |r(z)| < \varepsilon \cdot |z - z_0|.$$

Anschließend $\exists N: \forall n > N \quad \Delta^{(n)} \subset \mathcal{U}_\delta(z_0)$.

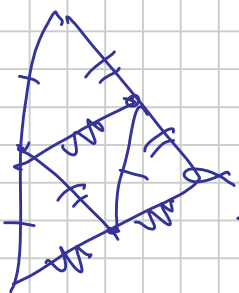


Wir haben für solche n :

$$\sup_{z \in \Delta^{(n)}} |r(z)| \leq \varepsilon \cdot \sup_{z \in \Delta^{(n)}} |z - z_0| \leq \varepsilon \cdot \text{Länge}(\gamma^{(n)})$$

und insgesamt:

$$|f| \leq 4^n \cdot (\text{Länge}(f^{(n)}))^2 \cdot \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \geq N.$$



$$\text{Länge}(f^{(1)}) = \frac{1}{2} \cdot \text{Länge}(f)$$

$$\Rightarrow \sum_{f=0}^{\infty} 4^n \cdot (2^n)^2 \cdot \underbrace{\varepsilon}_{\text{Länge}(f)} = \sum_{f=0}^{\infty} \text{Länge}(f) \cdot \underbrace{1}_{\text{Länge}(f)}.$$

Ein Verallgemeinerung:

Th. 2.8 (Cauchy'scher Integralsatz für Bilder

von Dreiecken)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom., γ ein Dreieck in $\mathbb{C}$

mit Dreiecksfläche Δ , sei $\varphi: \Delta \rightarrow U$ eine

C^1 -Abb. (in reellen Sinne).

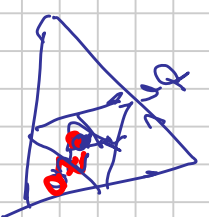
Dann ist $\int_{\gamma} f = 0$.



Beweis: Analog zu 2.7

Wir wählen γ_n so, dass

$$\left| \int_{\gamma_0} f / \leq 2^n \left| \int_{\gamma_0 \gamma_n} f / \right| \quad \text{und} \quad \text{für } z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$

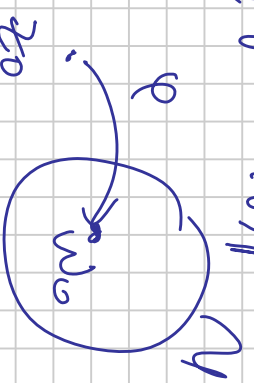


Δ_n

Da $\varphi \in C^1$ -Abb. (im reellen Sinne) ist, gilt:

$$\ell(\varphi \circ \gamma^{(n)}) = \int_{\gamma_n} \underbrace{|\mathrm{d}\varphi_{\gamma_n(t)} \cdot \gamma^{(n)}(t)|}_{\leq C \cdot |\gamma^{(n)}(t)|} dt \leq C \cdot \ell(\gamma^{(n)})$$

$\leq C \cdot 2^{-n} \ell(\gamma)$
wie in 2.7



Da f in $\mathcal{C}(z_0)$ diff'bar ist, gilt

$$f(w) - f(w_0) = f'(w_0) \cdot (w - w_0) + r(w)$$

mit $\frac{r(w)}{w - w_0} \xrightarrow{w \rightarrow w_0} 0$.

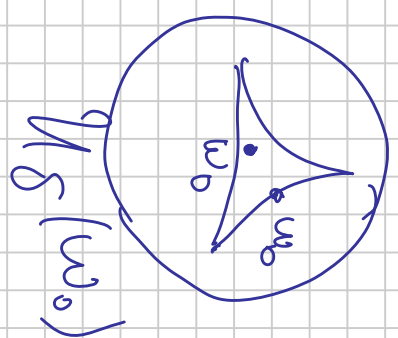
Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0: |w - w_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{r(w)}{w - w_0} \right| < \varepsilon$

Da $\ell(\varphi_0 \delta^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und $|w - w_0| \leq \ell(\varphi_0 \delta^{(n)}) \quad \forall w \in \varphi(\Delta^{(n)})$

$|r(w)| \leq \varepsilon \cdot |w - w_0|$

$\exists N: \forall n > N \quad \varphi(\Delta_n) \subset \mathcal{N}_\delta(w_0)$

Wie in 2.7 gilt für solche n :



$|f| \leq 4^n \cdot \left| \int \varphi_0 \delta^{(n)} \right| = 4^n \left| \int r \right| \leq$

Die Wahl von $\delta^{(n)}$ da $f-r$ ist lin. f-kt (Stetigkeit)

$$\begin{aligned}
 &\leq 4^n \cdot \ell(\varphi \circ \gamma^{(n)}) \cdot \underbrace{\sup_{w \in \varphi(\Delta_n)} |r(w)|}_{\leq \underbrace{\varepsilon \cdot \sup_{w \in \varphi(\Delta_n)} |w - w_0|}_{\text{Wahl von } \delta}} \\
 &\leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot \left(\ell(\varphi \circ \gamma^{(n)}) \right)^2 = \varepsilon \cdot C^2 \cdot \ell(\gamma)^2 \\
 &\leq \varepsilon \cdot \ell(\gamma^{(n)}) \leq (\varepsilon \cdot 2)^n \cdot \ell(\gamma)
 \end{aligned}$$

■

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \int \varphi \circ \gamma = 0.$$

Folgerung 2.9 (Cauchyscher Integralsatz (CIS))

für Rechtecke / Bilder von Rechtecken

für $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holom.,

mit γ ein Rechteck mit Fläche $[\square] \subset \mathcal{U}$

best. $\varphi: \square \rightarrow \mathcal{U}$ eine C^1 -Abb. Dann gilt

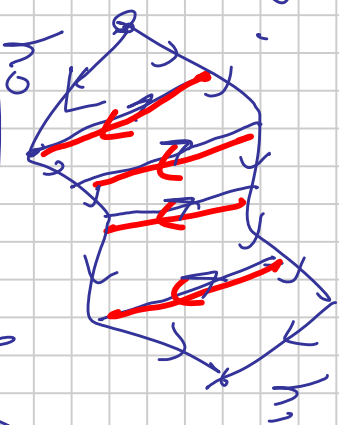


$$\varphi(t, s) = s \cdot \beta(t) + (1-s) \gamma(t), \quad \varphi \in C^1,$$

+ Folgerung 2.9: $\gamma h_1 \rho^{-1} h_0$ ist ein C^1 -Bild
des Rechteckes $(a, b) \times (0, 1] \Rightarrow \int f = 0$.

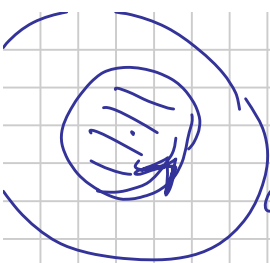
Darüber ($s=0$) gilt für stückweise C^1 -Kurven

γ, β in Detach.



Folgerung 2.11 (CIS für Kreisscheiben und Wurfsringe)

Sei $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ holom. mit $\{z: |z - z_0| \leq R\} \subset \mathcal{M}$



bzw. $\{z: r \leq |z - z_0| \leq R\} \subset \mathcal{M}$.
Dann gilt:

$$\int f = 0$$

form.

$$\int f = \int f$$

$$|z - z_0| = R$$

$$|z - z_0| = r \quad |z - z_0| = R$$

Bernoulli's

Fall 1:



$$\text{Def. } \gamma(t) := R \cdot e^{it} + z_0, \quad t \in [0, 2\pi]$$



↗
↘
gesch orientiert

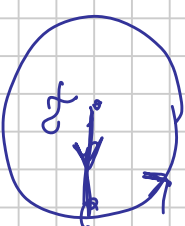
Bsp. 2. 10 Liegend

$$h_1 = h_2!$$

$$\Rightarrow \int f = 0$$

$$\text{OR } \oint_{\gamma} f = 0 \quad \text{da } \oint_{\gamma} f = 0$$

$$\int f + \int f = \int f + \int f$$



Fall 2

$$h_1 = h_2$$



Bsp. 2. 10

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= R e^{it} + z_0 \\ \gamma(t) &= R e^{it} + z_0, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

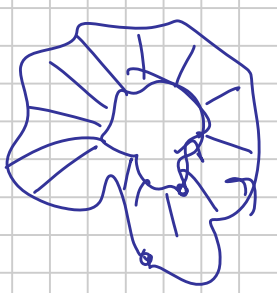


Bem. Darfde auch für z.B.

[Def. 2.12]

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

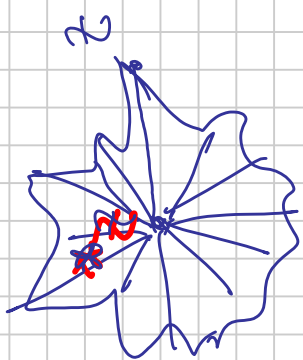
U heißt Sterngebiet, falls ein $z_* \in U$ ex.



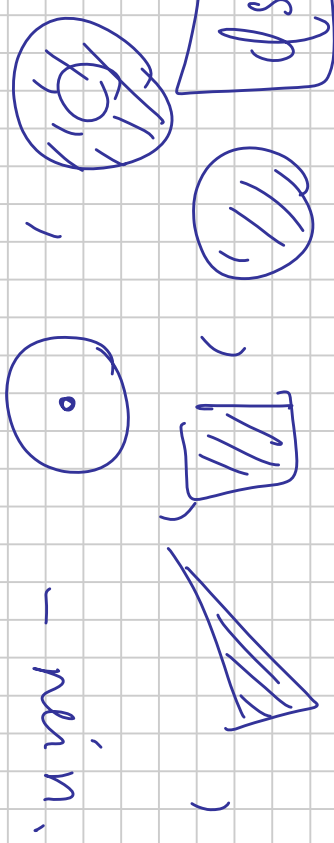
s.d. $\forall z \in U$ die Verbindungsstrecke

$$\{z, z_*\} := \{z + t(z_* - z), t \in [0, 1]\}$$

in U liegt. Der Punkt z_* heißt ein Sternmittelpunkt (nicht eindeutig!).



[Bsp]



bern. t offen



[Thm 2.13]

$\mathbb{C}$ ist Sterngebiet

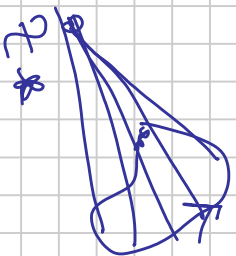
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom. Dann gilt



$$\int \gamma = 0$$

für jede geschlossene Kurve γ mit $\text{Bild}(\gamma) \subset U$.

Beweis



Sei $\gamma: (a, b) \rightarrow U$

$$\beta(t) := z^* \quad \forall t \in (a, b)$$

$$\text{Bsp. 2.10 + tip gewähl.} \Rightarrow \int \gamma = \int_{z^*} \gamma = 0$$

($\Rightarrow h_1 = h_0$)

Folgerung 2.14 ($\Rightarrow$ einer Stammfkt)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom. Dann besitzt f lokal eine Stammfkt (d.h., $\forall z_0 \in U$,

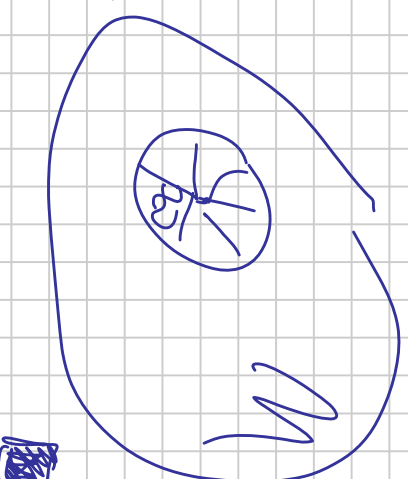
$\exists \forall \subset U$ umg. von z_0 s.d. $f|_U$ eine Stammfkt hat).

Wenn U ein Sterngebiet ist, dann hat f in U (also global) eine Stammfkt.

Beweis Global: 2.13 + 2.5

lokal: $\forall z_0 \exists U_{\delta}(z_0) \subset U$

- Sterngebiet!



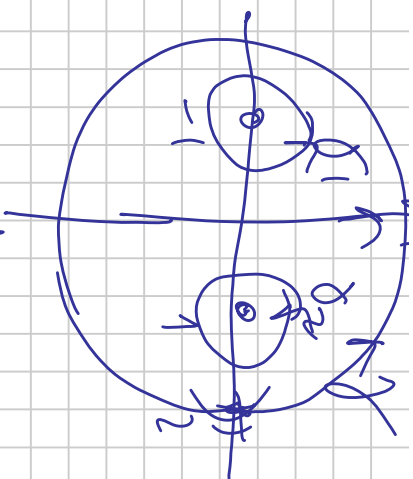
Bem. Die allgemeine Form der CS wird für einfach zusammenhängende Gebiete formuliert:

G einf. zusammenh. $\Rightarrow \int \beta = 0 \quad \forall$ geschl. Kurve γ

in G .

Bsp 2.15

Nimm $f: \underbrace{\{1-1, 1\}}_{n_1} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2-1}$



Beh.:

$$x_1(t) = 2 \cdot e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$x_2(t) = -1 + \frac{1}{2} e^{it}$$

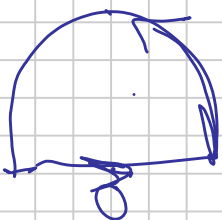
$$x_2(t) = 1 + \frac{1}{2} e^{it}$$

$$f = \int f + \int f$$

x_1, x_2

Def:

$$\beta_1 := -2$$



$$\beta_2 :=$$



Dann gilt: $f = -2$

$$\int f + \int f$$

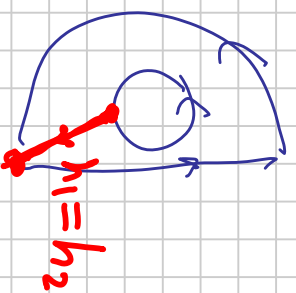
Nach

Bsp 2.10

gilt:

$$f_A = \int_{\gamma_1} f$$

(Polaris: (n))



und analog $\int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_3} f$

Also ist

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Nun $\int_{\gamma} f$ zu berechnen, beachte

(Partialbruchzerlegung):

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$$

CGS für Kreisbogen:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^{2+1}} = 0 = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^{2-1}}$$

Erinnere: $\int \frac{dz}{z} = 2\pi i$ (1 Radius)

Variable substitution: $\int_1 \frac{dz}{z-1} = 2\pi i = \int_2 \frac{dz}{z+1}$

Alles zusammen: Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{f}{g} = \int_{\gamma_1} \frac{f}{g} + \int_{\gamma_2} \frac{f}{g} = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi i - 2\pi i) = 0$$

Andere Möglichkeit:

Zuerst Partialbruchzerlegung: $f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$

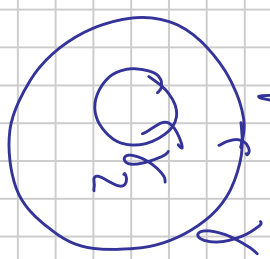
$$\int \frac{f}{g} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z+1}$$

CS (Bsp 2.10):



$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-1} dz$$

Analog:

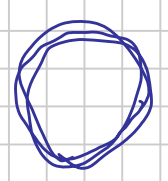


$$\int_{\gamma} \frac{1}{z+1} dz = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1}$$

Wgv.

2.3 Die Cauchysche Integralformel

Frage: Sei $f: M_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ holom. und



$M_{\mathbb{C}}(z_0) \subset M$. Ang., man kennt $f|_{\{z: |z-z_0|=r\}}$
 Wenn man $f|_{M_{\mathbb{C}}(z_0)}$ rekonstruieren?

Satz 2.16 (Cauchy'sche Integralformel für ein Kreisscheib)

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen mit $\overline{\mathcal{U}}(z_0) \subset \mathcal{U}$,
 Sei $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holom. Dann gilt $\forall z \in \mathcal{U}(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$



Bem. Wenn nicht anders gesagt wird,
 ist die Orientierung positiv
 (Man schreibt auch $\oint$)



Beweis Sei $\varepsilon > 0$ s. d.

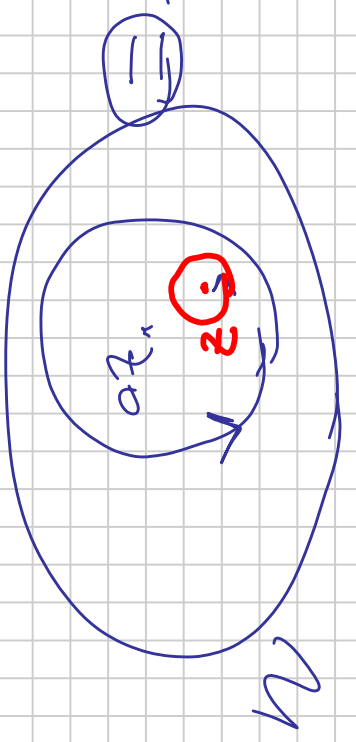
$$\overline{\mathcal{U}_\varepsilon(z)} \subset \mathcal{U}(z_0)$$

Nach CJS (Bsp 2.10) gilt:

$$\int \frac{f(w)}{w-z} dw = \int \frac{f(w)}{w-z} dz$$

$$|w-z_0|=r$$

$$|w-z|=r$$

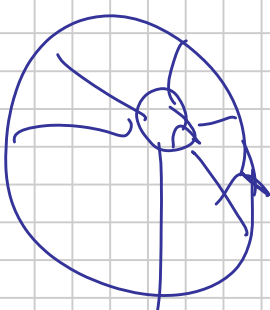


(da die Fkt $\frac{f(w)}{w-z}$ in $U \setminus \{z\}$ holom. ist)

$$\equiv \int \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw + f(z) \int \frac{dw}{w-z}$$

$$|w-z|=r$$

$$|w-z|=r$$



$$z \rightarrow z_0$$

Betrachte

$$g(w) := \int \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw$$

f ist holom.

$\Rightarrow g$ ist stetig auf U

$$f'(z), \quad w=z$$

$\Rightarrow$ gilt beschr. auf $\overline{U_r(z_0)}$

Setze $\mu := \sup_{w \in U_r(z_0)} |g(w)|$

$$\text{Es gilt: } \int_{|w-z|= \varepsilon} g(w) dw \Big| \leq 2\pi \varepsilon \cdot \mu \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Gesamt: $\int \frac{f(w)}{w-z} dw = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi \varepsilon \cdot \mu) + f(z) \cdot 2\pi i$

$$|w-z_0| > r$$

$$= f(z) \cdot 2\pi i$$

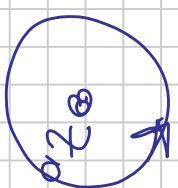


Folgerung 2.17 (Der Mittelwertsatz

für holom. Fkt'n)

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ holom. mit $\overline{U_r(z_0)} \subset M$.

Dann ist $f(z_0)$ der Mittelwert der Funktionswerte von f auf dem Kreis:



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Bem. C)F (Cauchy'sche Integralformel)

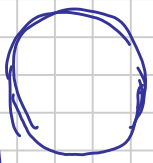
für $z := z_0$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{it})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} \cdot i \cdot r \cdot e^{it} dt$$

Bemerkung Da u harmonische Fkt n auf einem Gebiet der Rekt. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ einer harmon. Fkt gilt

der Mittelwertsatz auch für jede harmonische Fkt.

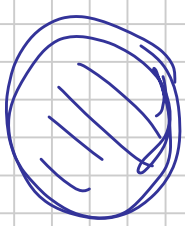


$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt$$



$$f|_{\partial U_r(z_0)} \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ in } U_r(z_0)$$

Mir werden bald eine viel stärkere Aussage beweisen: Wenn die Menge



der Nullstellen von f einen Häufungspunkt in U hat $\Rightarrow f \equiv 0$ in U (falls U ein Gebiet)



Beobachtung:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z} dw$$

und $\frac{1}{w-z}$

ist ∞ -oft diff'bar in $U_r(z_0)$.

Vermutung: f ist ∞ -oft diff'bar und

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} f(w) \left(\frac{1}{w-z} \right)^{n+1} dw$$

Th 2.18 (Satz von Goursat und die C.I.F. für Ableitungen)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holom., U offen. Dann

ist f ∞ -oft (komplex) diff'bar. Außerdem

gilt $\forall r > 0, z_0 \in U$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset U$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$



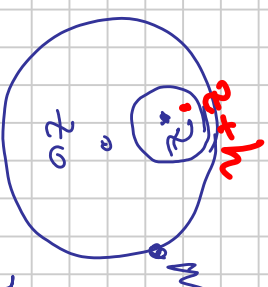
$\forall z \in U_V(z_0)$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bem. Ineinander ist $\forall f(n)$ ist holom.

Beweis Fall $n=1$

Sei $z \in U_V(z_0)$, wobei $\overline{U_V(z_0)} \subset U$

Nimm $h : z+h \in U_V(z_0)$



$$\text{CIF: } \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{\underbrace{\left(\frac{1}{w-z-h} - \frac{1}{w-z} \right)}} dw$$

$$|w-z_0| = r$$

Eigenschaften von g_n :

$$=: g_n(w)$$

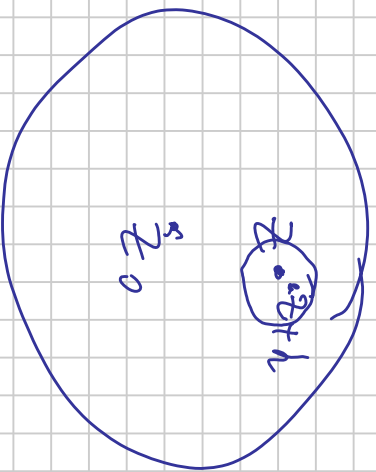
$\circ g_n$ sind stetig auf $\partial U_V(z_0)$ ($\forall n$)

$$\circ g_n(w) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{w-z} \right)' = \frac{1}{(w-z)^2} \quad \forall w \in \partial U_V(z_0)$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in w :

$$g_h(w) = \frac{1}{h} \cdot \frac{\cancel{w-z} - \cancel{w+z} + h}{(w-z-h)(w-z)} = \frac{1}{(w-z-h)(w-z)}$$

$$g_h(w) - \frac{1}{(w-z)^2} = \frac{\cancel{w-z} - \cancel{w+z} + h}{(w-z-h)(w-z)^2} =$$



$$= h \cdot \frac{1}{(w-z-h)(w-z)^2}$$

$$|f| \leq \frac{1}{\underbrace{\text{dist}(z, \partial U_r(z_0))}_{2} \cdot \text{dist}(z, z_0)}$$

für alle h mit

$h \in U_{\text{dist}(z, \partial U_r(z_0))}$

Also konv. $g_h(w) - \frac{1}{(w-z)^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

gleichmäßig in w .

Insgesamt haben wir (siehe Prop. 2.6):

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} f(w) \cdot g_h(w) dw$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} f(w) \cdot \frac{1}{(w-z)^2} dw$$

Fall 2: n beliebig.
Induktion in n : $n=1$

$n \rightsquigarrow n+1$:

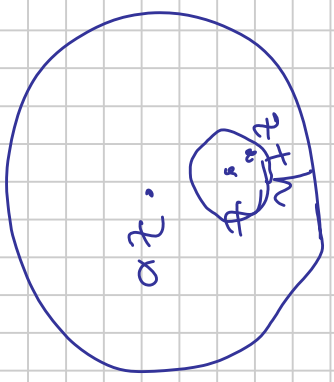
Ang: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$

für $z \in W(z_0)$, $h \in V$

$$\frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{?}$$

j' Voranm.

$$\frac{\text{dist}(z, \partial U_r(z_0))}{2}$$



$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} f(w) \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{(w-z-h)^{n+1}} - \frac{1}{(w-z)^{n+1}} \right) dw \right]$$

• g_h stetig auf $\partial U_r(z_0) \forall h \implies g_h(w)$

• $g_h(w) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{n+1}{(w-z)^{n+2}}$ gleichm. in U

$$g_h(w) = \frac{1}{h} \cdot \frac{(w-z)^{n+1} - (w-z-h)^{n+1}}{(w-z-h)^{n+1} \cdot (w-z)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{(w-z-h)^{n+1} \cdot (w-z)^{n+1}} \cdot \left((w-z)^{n+1} - \cancel{(w-z)^{n+1}} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{(w-z-h)^{n+1} \cdot (w-z)^{n+1}} \cdot \left[h \cdot (n+1)(w-z)^n + h \cdot \text{pol}(w, z, h) \right]$$

$$= \frac{n+1}{(w-z-h)^{n+1} \cdot (w-z)^{n+1}} + h \cdot \frac{\text{pol}(w, z, h)}{(w-z-h)^{n+1} \cdot (w-z)^{n+1}}$$

Es gilt

$$\underbrace{g_h(w)}_{=: \tilde{g}_h(w)} = \underbrace{r_h(w)}_{=: r_h(w)}$$

• $|r_h(w)| \leq |h| \cdot \underbrace{\left(\frac{\text{dist}(z, \partial U_r(z_0))}{2} \right)^{n+1} \cdot \text{dist}(z, \partial U_r(z_0))^{n+1}}_{\text{Polynome sind beschr. auf beschr. Mengen}}$

gleichm. in w

$$\begin{aligned} \tilde{g}_h(w) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ \tilde{g}_h(w) &= \frac{h+1}{(w-z)^{n+2}} = (h+1) \cdot \frac{(w-z)^{n+1} - (w-z-h)^{n+1}}{(w-z-h)^{n+1} (w-z)^{n+2}} \\ &= h \cdot \frac{\text{pol}(w, z, h)}{1} \end{aligned}$$

$$| \cdot | \leq |h| \cdot \frac{C}{\text{dist} \dots} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

gesamt gilt (siehe prop. 2.6): gleichm. in w .
 $\exists R_{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} f(w) \cdot \frac{h+1}{(w-z)^{n+2}} dw$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int \dots \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw$$

Erste Folgerungen

der $\mathbb{C}^{\mathbb{F}+}$

Goursat

"Umkehrung"

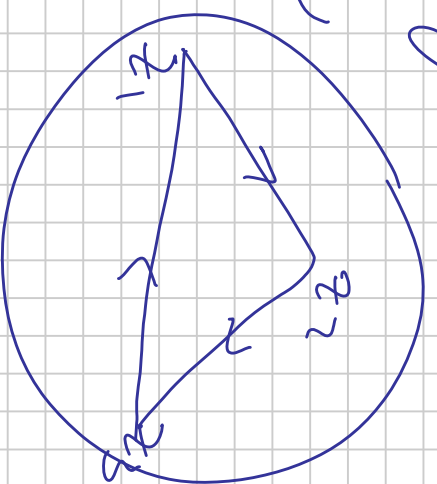
Satz 2.19 (Satz von Morera) - ein "Umkehrung" des CTS's

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Wenn $\forall$ Dreiecksweg $\triangle z_1, z_2, z_3$,

für den die zugeh. Dreiecksfläche in M liegt,

$$\int f = 0$$



gilt, dann ist f holom.

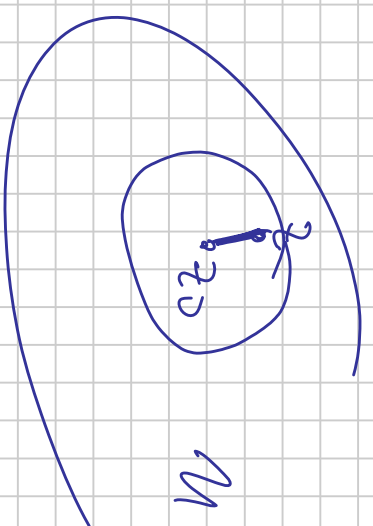
Beweis

$\forall z_0 \exists \overline{U}(z_0) \subset M$



Es reicht z.z. $f|_{U_r(z_0)}$ holom.

Def. Sei $z \in U_r(z_0)$



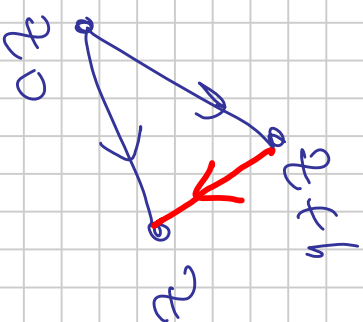
$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f$$

wobei $[z_0, z]$ die gerade Verbindungsstrecke ist.

Wie im Beweis von 2.5 zeigen wir, dass F eine Stammfkt von f in $U_r(z_0)$ ist.

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h}$$

$$\stackrel{\text{nach Verw. 2.5}}{=} \frac{1}{h} \cdot \int_{[z, z+h]} f$$



$$= \frac{1}{h} \cdot \int_{[z+h, z]} (f(w) - f(z)) dw + \frac{1}{h} \cdot f(z) \int_{[z+h, z]} dw$$

$$\underbrace{1. \left| \leq \frac{1}{h} \cdot h \cdot \sup_{w \in (z+h, z)} |f(w) - f(z)| \right|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ (Stetigkeit von } f \text{)}}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(z).$$

Nach Th. 2.18 ist $F \in C^1$ diff'bar
 $\Rightarrow f$ auch $\Rightarrow f$ ist holom.



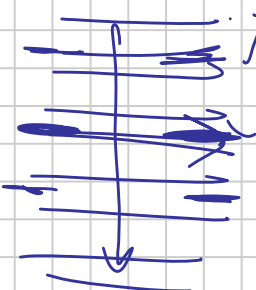
Ein weitere Folgerung (erinnere: f ist ganz
 $\Leftrightarrow f$ holom. auf $\mathbb{C}$)

Th. 2.20 (Satz von Liouville)

jede beschränkte ganze Fkt ist konstant.

Thm. Anders gesagt: $f: G \rightarrow G$ holom., $f \neq \text{id}$ bewirkt
 $\Rightarrow f$ ist unbeschränkt

Bsp $\sin z$, $\cos z$ sind beschr. auf $\mathbb{R}$ aber
 unbeschr. auf $\mathbb{C}$: $\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$



Beweis von 2.20

Sei f ganz und beschränkt mit $\mathbb{C} := \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \{f(z)\}$.

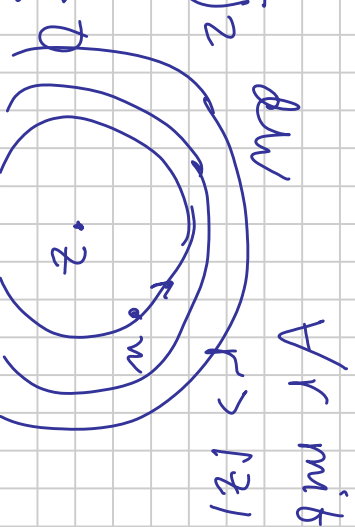
Wir zeigen: $f' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$.

CIF für Ableitungen (2.18):

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

Daraus folgt:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{C}{r}$$



$$\Rightarrow p'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Da (stannst eindeutig) auf eine Konstante ist
($\mathbb{C}$ ist ein Gebiet!), muss $p = \text{konst}$ 

Eine wichtige Folgerung ist

Th. 2.2.1 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nichtkonstante (komplexe) Polynom besitzt (mindestens) eine (komplexe) Nullstelle.

Beweis Sei $p(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$ mit $a_j \in \mathbb{C}$
und $d \geq 1, a_d \neq 0$
 $j=0, \dots, d$

Ang., p hat keine Nullstellen auf $\mathbb{C}$.

Def.: $g(z) := \frac{1}{p(z)}, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holom.

Wir zeigen: g ist beschr.

Behauptung: $|p(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$

Beweis der Beh.:

Für $z \neq 0$

gilt

$$|p(z)| = |z|^d \left| a_d + \dots + \frac{a_0}{z^d} \right|$$

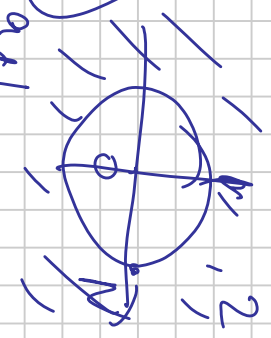
$$= |z|^d \left(|a_d| + \underbrace{\left| \frac{a_{d-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^d} \right|}_{=: r(z)} \right)$$

Da $|r(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$, $\exists N: \forall z \text{ mit } |z| > N \quad |r(z)| < \frac{|a_d|}{2}$

Für solche z gilt:

$$|p(z)| = |z|^d \cdot |a_d + r(z)| \geq |z|^d (|a_d| - |r(z)|) > |z|^d \cdot \frac{|a_d|}{2}$$

umgekehrte δ -Umgf. $< \frac{|a_d|}{2}$



Da $|p(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$, haben wir

$$|q(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0,$$

also ist q beschränkt auf $\mathbb{C}$.

Likewise: $q \equiv \text{const.}$

$\Rightarrow p \equiv \text{const.}$, aber Behauptung: $p \rightarrow \infty$

Folgerung 2.22 (Zerlegung von Polynomen in linear faktoren)

Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ (mit $\text{coeff.} \in \mathbb{C}$) mit $\delta := \text{grad } p \geq 1$

$\exists N: |q(z)| \leq 1$
 $\forall z \text{ mit } |z| \geq N$
 $\frac{p(z)}{q(z)}$ ist komp. $\Rightarrow p$ ist darauf besch.

lässt sich als Produkt von d Linearfaktoren und einer konstante schreiben;

$$p(z) = c \cdot (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_d)$$

wobei $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Beweis: $d = 0$ klar

Für $d \geq 1 \exists$ eine Nullstelle z_1 nach 2.21.

Wir ordnen p nach Potenzen von $(z - z_1)$:

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_1) + \dots + b_d(z - z_1)^d$$

(warum möglich?)

Da $p(z_1) = 0$, muss $b_0 = 0$, d.h.,

$$p(z) = (z - z_1) \cdot q(z)$$

Polynom mit Grad $D = d - 1$

Induktion nach Grad p : $p(z) = c(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_d)$ 

Eine Anwendung des Satzes von Hurwitz:

Satz 2.23 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)

Sei U offen in der Teilraumtopologie der abg. oberen Halbebene $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$.

(k.h.) $U = U_+ \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ für ein $U_+ \subset \mathbb{C}$ offen

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit

1) $f|_{U_+}$ ist holom. für $U_+ := U \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$

2) $f|_{U \cap \mathbb{R}}$ ist reellwertig.

Dann ist die Fkt $\mathcal{F}: U \cup U^- \rightarrow \mathbb{C}$, $U^- := \{\bar{z}: z \in U\}$.

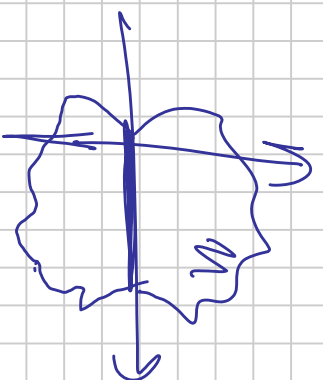
$$\mathcal{F}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in U \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in U^- \end{cases}$$

Beweis

Schritt 1: Holomorphie auf $U_+ \cup U^-$

Für $z = x + iy \in U_+$ (also $y > 0$), gilt:

$$\overline{\mathcal{F}(x + iy)} = \overline{f(x + iy)} = \overline{u(x, y) + i v(x, y)} = u(x, y) - i v(x, y)$$



$$=: \tilde{u}(x,y) + i \tilde{v}(x,y)$$

$f|_{u_0}$ ist also reell diff'bar und

$$\tilde{u}_x(x,y) = u_x(x,y) = \overline{f}_x(x,y) = \overline{u_y(x,y)} = \overline{v_y(x,y)} = \tilde{v}_y(x,y)$$

(C-R-Diff'g. für f)

$$\tilde{u}_y(x,y) = -u_y(x,y) = -\overline{u_x(x,y)} = -\overline{v_x(x,y)} = -\tilde{v}_x(x,y)$$

C-R-Diff'g. und für $f|_{u_0}$ erfüllt.

Schritt 2 Stetigkeit auf $u \cup v$ (d.h., Stetigkeit $\forall z \in u \cap \mathbb{R}$)

Sei $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, $z = x + iy \in u \cup v$ Wir haben;

$$f(z) = \overline{f(x-iy)} \xrightarrow{z \rightarrow x_0} \overline{f(x_0)} = f(x_0) = \underline{f(x_0)}$$

(da $f|_{u \cap \mathbb{R}}$ stetig ist) $\nearrow$ reell

$\Rightarrow f$ ist stetig in x_0 .

Schritt 3 Diff'barkeit auf ganz $u \cup v$.

oder: Morera (f ist ja stetig)

Sei γ ein Dreiecksweg mit $l(\gamma) < \delta$



$$\int \mathcal{F} = 0$$

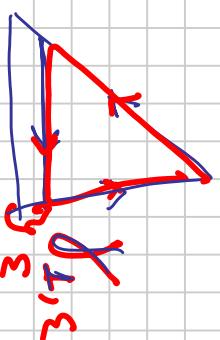
ORSA schneidet γ $\mathbb{R}$ (sonst klar nach Hebungstheorie in $\mathcal{U}^0$ oder $\mathcal{U}^1$)

$$\int_{\gamma} \mathcal{F} = \int_{\gamma_1} \mathcal{F} + \int_{\gamma_2} \mathcal{F} \quad \text{für } \gamma_1, \gamma_2 \text{ wie auf dem Bild}$$



Wir zeigen: $\int \mathcal{F} = 0 = \int \mathcal{F}$

für $\varepsilon > 0$ genügend klein und bezeichne mit γ_{ε} den Dreieck mit auf dem



Da $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}^0}$ holom. ist, ist $\int \mathcal{F} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_{2,\varepsilon}} \mathcal{F} = 0$ und

Wir haben:

$$\int_{\gamma_1} \mathcal{F} - \int_{\gamma_{1,\varepsilon}} \mathcal{F} = \int_{\gamma} \mathcal{F} = \int_{\gamma} \mathcal{F} + \int_{\gamma} \mathcal{F} + \int_{\gamma} \mathcal{F}$$



Da $\mathcal{F}$ gleichmäßig stetig ist (auf Komp. Menge da komp. $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$), aus $\mathcal{U}(\mathcal{U}^-)$:

$$\left| \int \gamma - \int \gamma \right| \leq \text{länge} \left(\text{rectangle} \right) \cdot \sup_{z \in \gamma} |f(z + i\varepsilon) - f(z)|$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

(gleichm. $\varepsilon \rightarrow 0$ Stetigkeit)

Da Länge (rectangle) $\rightarrow 0$, muss $\int \gamma = 0$
 Analog für $\int \gamma_2$

