Wir zeigen: $\lambda \in P_\sigma(T')$ (dann: ↯)

Sei $z \in Z_2' = z'|_{Z_2}$ (erinnere: $Z = Z_1 \oplus Z_2$, $S = \lambda_0 \cdot I$)

und def. $x' \in X'$ durch:

$$x'(x) := z'\left(P_{\lambda_0}(x+Y)\right)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "x'"'] & (X/Y)^\sim = Z \arrow[r, "P_{\lambda_0}"] & Z_2 \arrow[r, "z'"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Wir zeigen: $T'x' = \lambda_0 x'$

$$(T'x')(x) = x'(Tx) = z'\big(P_{\lambda_0}(\underbrace{Tx + y}_{S(x+y)})\big)$$

$$= z'\big(\underbrace{P_{\lambda_0} \cdot S}_{= S P_{\lambda_0},\ \text{da}\ P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint R(\lambda, S)\, d\lambda}(x+y)\big)$$

$$= z'\big(S \underbrace{P_{\lambda_0}(x+y)}_{\in Z_2,\ \text{wo}\ S = \lambda_0 \cdot I}\big) = z'\big(\lambda_0 \cdot P_{\lambda_0}(x+y)\big) = \lambda_0 \cdot x'(x)$$

$\forall x \Rightarrow T'x' = \lambda_0 x'$.

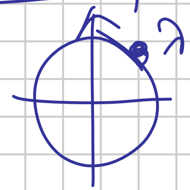
Noch z.z.: $x' \neq 0$ für ein z.

Wenn $Y \neq X$, d.h., $Z \neq \{0\}$, dann auch $Z_2 \neq \{0\}$.

Nimm $z' \neq 0 \Rightarrow x' \neq 0$ (warum?)

$\Rightarrow \lambda_0 \in P_\sigma(T') \quad ⚡$ $\blacksquare$

Bem. 1) $P_\sigma(T') \cap \mathbb{T} = \emptyset$ ist notwendig für starke Stab.! (sogar: schwache)

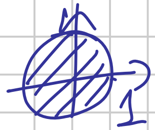


$$T' x' = \underset{\underset{\mathbb{T}}{\in}}{\lambda} x' \quad \Rightarrow \quad x'(T^n x) = (\underbrace{(T')^n x'}_{\lambda^n \cdot x'})(x) = \lambda^n x'(x)$$

$\not\to 0$ sobald $x'(x) \neq 0$.

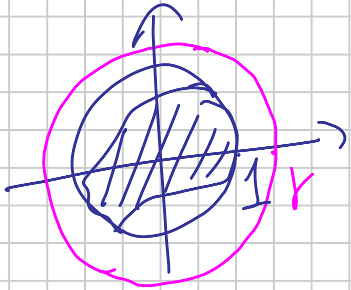
also ist T nicht mal schwach stabil

2) Die Bedingung $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ höchst. abzählbar ist dagegen sehr stark:

$\boxed{\text{Bsp}}$ ℓ^2, $\leftarrow$ ist stark stabil, aber $\sigma(\leftarrow) =$ 

3) Es gibt eine Charakterisierung von Tomilov (2001) mit Hilfe der Resolvente:

Sei T kontr. auf einem Hilbertraum H. Dann gilt:



$$\|T^n x\| \longrightarrow 0 \iff (r-1)\int_0^{2\pi} \|R(re^{i\varphi}, T)x\|^2 \, d\varphi \xrightarrow[r \searrow 1]{} 0$$

(d.h., die Resolvente wächst nicht zu schnell, wenn $r \to 1$)

Für Banachräume gilt $\Leftarrow$.

3. Schwache Stabilität

Erinnere: T schwach stabil, wenn $x'(T^n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in X \quad \forall x' \in X'$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\rightarrow$ auf ℓ^2, c_0, ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$

Analog: $\rightarrow$ und $\leftarrow$ auf $c_0(\mathbb{Z})$ oder $\ell^p(\mathbb{Z})$, $p<\infty$.

Diese Operatoren sind Isometrien und damit nicht stark stabil.

Bem.: 1) Erinnere: T kontr. $\Rightarrow \|T^n x\| \downarrow$

insb. gilt: $\|T^n x\| \to 0 \iff \exists (n_j): \|T^{n_j} x\| \to 0$.

Falsch für schwache Stabilität:

$\exists$ Kontr. T auf einem HR (sogar unitär)

$\exists (n_j), (m_j)$:

$$T^{n_j} \xrightarrow{\text{schwach}} 0$$

$$T^{m_j} \xrightarrow{\text{schwach}} I$$

(sogar $\mathbb{T} \cdot I \subset \overline{\{T^n, n\}}^{\text{schwach}}$).

2) T schw. stabil $\Longrightarrow \begin{cases} P_\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \emptyset \\ P_\sigma(T') \cap \mathbb{T} = \emptyset \end{cases}$,

$\not\exists$ Resolventenbedingung wie für starke stab.

Zerlegungssätze für Kontraktionen auf HR'en

$\boxed{\text{Thm. 3.1}}$ (Sz.-Nagy, Foiaş, 1960)

Szökefalvi

Sei H Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ Kontraktion.

Dann gilt $$H = H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2$$

mit

- H_1, H_2 sind T- und T^*-inv. TR'e
- H_1 ist max. s.d. $T|_{H_1}$ und $T^*|_{H_1}$ unitär ist.
- $T|_{H_2}$ und $T^*|_{H_2}$ sind schwach stabil.

__Beweis__ __Schritt 1__ (Konstruktion von H_1)

Def. $H_1 := \{ x \in H : \|T^n x\| = \|T^{*n} x\| = \|x\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \}$

Wir zeigen zuerst: $\forall x \in H_1$ gilt

(*) $\quad T^{*n} T^n x = T^n T^{*n} x = x \quad \forall n.$

Sei $x \in H_1$. Dann:

$$\|x\|^2 = \|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x \rangle = \langle T^{*n} T^n x, x \rangle$$

$$\leq \|T^{*n} T^n x\| \cdot \|x\| \leq \|x\|^2,$$

T' kontr.

d.h., „=" überall, insb. in Cauchy-Schwarz,

d.h., $T^{*n} T^n x = c \cdot x$. Einsetzen $\Rightarrow c = 1$, d.h.,

$T^{*n} T^n x = x$. Analog $T^n T^{*n} x = x$.

Rückrichtung: $(*) \Rightarrow H_1$:

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x\rangle = \langle \underbrace{T^{*n} T^n x}_{x}, x\rangle = \|x\|^2$$

analog für T^*.

Wir haben bewiesen:

$$H_1 = \{x \in H : T^{*n} T^n x = T^n T^{*n} x = x \ \forall n\}$$

Insb. ist H_1 abg. lin. TR und H_1 max. mit $T|_{H_1}$ unitär.

Def. weiterhin $H_2 := H_1^{\perp}$ – abg. lin. TR.

Noch z.z.: H_1, H_2 sind T-, T^*-invariant.

Sei $x \in H_1$. Dann: $\|T^n(Tx)\| = \|x\| = \|Tx\|$. Außerdem:

$$\|T^{*n}Tx\| = \|T^{*(n-1)}(\underbrace{T^*Tx}_{x})\| = \|T^{*(n-1)}x\| = \|x\| = \|Tx\|$$

Analog für T^*.

Sei $x \in H_2 \iff \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in H_1$. Daraus folgt:

- $\langle Tx, y\rangle = \langle x, \underbrace{T^*y}_{\in H_1}\rangle = 0 \quad \forall y \in H_1$
- $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, \underbrace{Ty}_{\in H_1}\rangle = 0 \quad \forall y \in H_1$,

d.h., $Tx, T^*x \in H_2$.

<u>Schritt 2</u> $T|_{H_2}$, $T^*|_{H_2}$ schwach stabil.

Ang. $\exists x \in H_2 : T^n x \overset{\text{schwach}}{\not\to} 0$, d.h., $\exists y \in H : \langle T^n x, y\rangle \not\to 0$,

d.h., $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists (n_j) : |\langle T^{n_j} x, y\rangle| \geq \varepsilon \quad \forall j$.

Satz von Banach-Alaoglu: Einheitskugel von X' ist schwach*-komp.
(oder: $\forall$ beschr. Folge in X' hat eine schwach*-konv. TF)

$\exists x_0 \in H \quad \exists (m_j)$

eine Teilfolge von (n_j): $T^{m_j} x \xrightarrow{\text{schwach}} x_0$

(Beschr. Folgen in Hilberträumen haben schwach konv. Teilfolgen).

Da $T^{m_j} x \in H_2$ und H_2 abg. ist, gilt $x_0 \in H_2$. Warum? (H.-B.)

Wir zeigen: $x_0 = 0$. (dann $\lightning$, da $|\langle x_0, y\rangle| \geq \varepsilon$)

Dafür zeigen wir: $x_0 \in H_1$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann haben wir:

$$\|T^{*k} T^k T^n x - T^n x\|^2 = \|T^{*k} T^k T^n x\|^2 + \|T^n x\|^2 - 2 \cdot \mathrm{Re} \underbrace{\langle T^{*k} T^k T^n x, T^n x \rangle}_{\langle T^k T^n x,\, T^k T^n x \rangle = \|T^{n+k} x\|^2}$$

$$\leq \|T^{n+k} x\|^2 - \|T^n x\|^2 - 2 \|T^{n+k} x\|^2$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \text{ da } \|T^n x\| \text{ konv.}$$

Wir haben bewiesen:

(1) $\|T^{*k} T^k T^n x - T^n x\| \longrightarrow 0. \quad \forall k$

Erinnere: $T^{m_j} x \xrightarrow{\text{schw.}} x_0$

Daraus folgt: $S T^{m_j} x \xrightarrow{\text{schw.}} S x_0$

$\left(\langle S T^{m_j} x, y \rangle = \langle T^{m_j} x, S^* y \rangle \longrightarrow \langle x_0, S^* y \rangle = \langle S x_0, y \rangle \right)$

insbesondere:

(2) $\quad T^{*k} T^k T^{m_j} x \xrightarrow{\text{schw.}} T^{*k} T^k x_0$

Es gilt aber:

(3) $\quad T^{*k} T^k T^{m_j} x \xrightarrow{\text{schw.}} x_0$,

da $\forall z \in H$

$$|\langle T^{*k} T^k T^{m_j} x - x_0, z \rangle| \leq \underbrace{|\langle T^{*k} T^k T^{m_j} x - T^{m_j} x, z \rangle|}_{\to 0 \text{ nach } (1)} + \underbrace{|\langle T^{m_j} x - x_0, z \rangle|}_{\xrightarrow[j \to \infty]{} 0 \text{ nach Def. von } (m_j)} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0.$$

$(2)+(3) \Rightarrow T^{*k}T^k x_0 = x_0 \quad \forall k.$

Analog: $T^k T^{*k} x_0 = x_0 \quad \forall k$, d.h. $x_0 \in H_1$

$\Rightarrow x_0 \in H_1 \cap H_2 = \{0\}, \quad x_0 = 0 \quad ⚡ \quad (|\langle x_0, y\rangle| \geq \varepsilon)$

Analog: $T^{*n}x \xrightarrow{\text{schwach}} 0$ $\blacksquare$

<u>Bem.</u> $T|_{H_2}$ heißt vollständig nicht unitär:

$\nexists\, Y \subset H_2$ Teilraum $\neq \{0\}$ s.d. $T|_Y$ unitär

Wir haben insb. also: $T|_{H_1}$ unitär, $T|_{H_2}$ vollst. nicht unitär

Thm 3.2 (Foguel, 1963)

Sei T kontr. auf H, H Hilbert. Def.

$$W := \{x \in H : \langle T^n x, x\rangle \longrightarrow 0\}.$$

Es gelten:

- $W = \{x \in H : T^n x \xrightarrow{\text{schw.}} 0\} = \{x \in H : T^{*n} x \xrightarrow{\text{schw.}} 0\}$
- W ist T, T^*-inv. abg. Teilraum
- $T|_{W^\perp}$ ist unitär.

__Beweis__ Wir zeigen zuerst: $x \in W \iff T^n x \xrightarrow{\text{schw}} 0$.

$\Leftarrow$ klar

$\Rightarrow$ OBdA sei $x \in H_1$ (siehe Thm. 3.1)

sei $y = T^k x$ für ein k. Dann gilt für $n \geq k$

$$\langle T^n x, y \rangle = \langle T^n x, T^k x \rangle = \langle T^{*k} T^k \underbrace{T^{n-k} x}_{\in H_1}, x \rangle$$

$$\underset{\text{Eigenschaft von } H_1}{=} \langle T^{n-k} x, x \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{nach Vorauss.}$$

Also gilt $\langle T^n x, y \rangle \longrightarrow 0 \quad \forall y \in \text{lin}\{x, Tx, T^2 x, \dots\}$

Approximationsargument ü: —"— $\forall y \in \overline{\text{lin}}\{x, Tx, \dots\}$

Aber $\forall y \perp \overline{\text{lin}}\{x, Tx, \dots\}$ gilt

$$\langle T^n x, y \rangle = 0 \longrightarrow 0.$$

$\Rightarrow \langle T^n x, y\rangle \longrightarrow 0 \quad \forall y \in H.$

Analog: $\quad x \in W \Leftrightarrow T^{*n} x \xrightarrow{\text{schwach}} 0$

- W ist T-inv.:

  $x \in W \Leftrightarrow T^n x \xrightarrow{\text{schw.}} 0 \Rightarrow T^n(Tx) \xrightarrow{\text{schw.}} 0$

  Analog: T^*-inv. $\qquad \Leftrightarrow Tx \in W.$

- W ist abg. Ü

- $T|_{W^\perp}$ unitär, da $W \supset H_2$, also $W^\perp \subset H_1$, und $T|_{H_1}$ unitär ∎

$\boxed{\text{Thm 3.3}}$ (Zerlegung von Kontraktionen auf Hilberträumen)

Sei H Hilbert und $T \in \mathcal{L}(H)$ ~~k~~kontraktiv. Dann gilt die orthogonale Zerlegung $H = \tilde{H}_1 \overset{\perp}{\oplus} \tilde{H}_2 \overset{\perp}{\oplus} H_3$

in T-, T^*- inv. Teilräume, wobei

- $T_1 := T|_{\tilde{H}_1}$ unitär ist und keinen schwach stabilen Orbit hat;
- $T_2 := T|_{\tilde{H}_2}$ unitär und schwach stabil ist;
- $T_3 := T|_{\tilde{H}_3}$ vollständig nicht unitär und schwach stabil ist.

<u>Beweis</u>: Def. $\tilde{H}_1 := H_1 \cap W^\perp$

$\tilde{H}_2 := H_1 \cap W$ + Thm. 3.1 und 3.2.

$\tilde{H}_3 := H_2 \subset W.$ $\blacksquare$

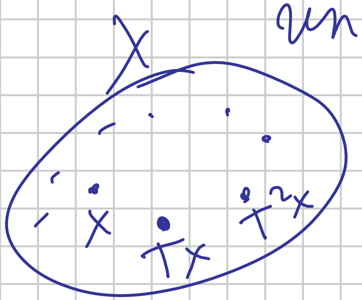
II Stark stetige Operatorhalbgruppen

0. Motivation

Was ist ein dynamisches System?

Sei X ein Raum mit Struktur, $T : X \to X$ struktur erhaltend. Ein diskretes dynamisches System ist $(T^n)_{n=0}^{\infty}$

und der Orbit von x ist $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$.



„Hier läuft die Zeit diskret.

In der Physik („im echten Leben") läuft die Zeit kontinuierlich:

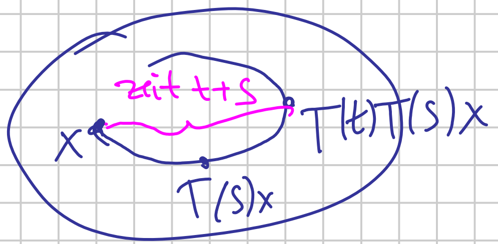
Ein kontinuierliches dynamisches System ist eine Familie $(T(t))_{t\geq 0}$, wobei $\forall\, T(t): X \to X$ Struktur erhält und:

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) & \forall\, t,s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

(wie für diskrete Systeme: $T^{n+m} = T^n T^m$, $T^0 = I$).

Der <u>Orbit</u> von x ist

$$\mathrm{Orb}(x) := \{T(t)x,\ t \geq 0\}$$



In der FA: X ein normierter VR (in dieser VL: Banach oder Hilbert),

$T(t): X \to X$ lin., beschr. $\forall t$.

Oft ist $T(t)x$ die Lösung einer Diff'Gleichung und ist damit gesucht.

1. Definition und Beispiele

$\boxed{\text{Def. 1.1}}$ Sei X Banach. Eine Familie $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$

heißt <u>stark stetige (Operator)Halbgruppe</u> (oder: <u>C_0-Halbgruppe</u>):

(H1) $\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s), \ \forall t,s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$ – <u>Halbgruppengesetz</u>

(H2) $T(\cdot)$ ist <u>stark stetig</u>, d.h., $\forall x \in X$ ist die Abb. $\begin{cases} t \longmapsto T(t)x \\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \end{cases}$ stetig.

Analog heißt eine Familie $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine <u>stark stetige Gruppe</u> (oder <u>C_0-Gruppe</u>), wenn (H1) + (H2) für alle $s,t \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{R}_+$ gelten.

Der Orbit von $x \in X$ unter einer Gruppe ist

$$\mathrm{Orb}_{\mathbb{R}}(x) = \{T(t)x,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

(Zeit läuft auch rückwärts)

<u>Bem.</u> Aus (H1) folgen sofort:

- $T(t)T(s) = T(s)T(t)$ $\forall s,t$ - Kommut.
- $T(t) = 0 \Rightarrow T(s) = 0$ $\forall s \geq t$

  Solche HG'en heißen <u>nilpotent</u>.
- $T(\cdot)$ eine Gruppe $\Rightarrow T(-t) = (T(t))^{-1}$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ (1-dimensionale HG'en)

Halbgruppen

Sei $X = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, $f : X \to X$ stetig.

Dann impliziert $\begin{cases} f(t+s) = f(t)\, f(s) \\ f(0) = 1 \end{cases}$, dass $f(t) = e^{a \cdot t}$ für ein $a \in \mathbb{C}$ und alle $t \geq 0$.

– siehe Analysis: man zeigt: f ist diff'bar und erfüllt

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = a f(t) \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{Bsp. 1.2}}$ $\left((e^{tA}) \text{ für } A \in \mathcal{L}(X) \right)$

Sei X Banach und $A \in \mathcal{L}(X)$.

Def. $e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Bem.: $\|e^{tA}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = e^{|t| \cdot \|A\|}$,

insb. gilt $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$.

<u>Behauptung</u> $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine <u>normstetige Gruppe</u>,

d.h., (H1) und

$$\begin{aligned} t &\mapsto e^{tA} \\ \mathbb{R} &\to \mathcal{L}(X) \end{aligned}$$

ist stetig.

<u>Beweis</u> $T(0) = I$ klar. HG'Gesetz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n A^n}{n!} \overset{\text{Cauchyprodukt für Reihen}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{s^k A^k}{k!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n$$

Normstetigkeit:

$$\| e^{(t+h)A} - e^{tA} \| = \| e^{tA} (e^{hA} - I) \|$$
$$\leq \| e^{tA} \| \cdot \| e^{hA} - I \|$$

zz: $\| e^{hA} - I \| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$$\| e^{hA} - I \| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!} \right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n \|A\|^n}{n!}$$

$$= e^{|h| \|A\|} - 1 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

insbesondere ist (e^{tA}) auch starke stetig:

$$\| e^{(t+h)A} x - e^{tA} x \| \le \| e^{(t+h)A} - e^{tA} \| \cdot \|x\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \blacksquare$$

Wir sagen: $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ ist die von A erzeugte Gruppe.

Bsp (konkrete Matrizen):

1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_d} \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ – Jordanblock der Dimension d.

$$A = \lambda \cdot I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{=: R}$$

$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, R^{d-1} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{tR} = I + tR + \ldots + \frac{t^{d-1} R^{d-1}}{(d-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ & 1 & t & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Da $\lambda \cdot I$ und R kommutieren, gilt:

$$e^{tA} \overset{\text{ü}}{=} e^{t\lambda} \cdot e^{tR} \boxed{=}$$

ü $(e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B}$, falls $AB = BA)$

$$= e^{t\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $A = S^{-1}BS \Rightarrow e^{tA} = S^{-1}e^{tB}S$

da $(S^{-1}BS)^n = S^{-1}B^nS$

So bekommt man e^{tA} für beliebige Matrizen mit Hilfe der Jordanschen Normalform.

<u>Bem.</u>: 1) Analog zu $X = \mathbb{C}$ zeigen wir später:

$T(\cdot)$ ist normstetig $\Rightarrow T(t) = e^{tA}$ für einen $A \in \mathcal{L}(X)$ und $\forall t$.

2) Da normstetig = stark stetig für $X = \mathbb{C}^d$ (Warum?) ist $\forall$ C_0-HG auf $\mathbb{C}^d$ autom. von der Form e^{tA}.

$\boxed{\text{Prop. 1.3}}$ Sei $T(\cdot)$ eine HG (d.h., mit (H1)) auf X, X Banach. Es sind äquiv.:

(i) $T(\cdot)$ ist stark stetig

(ii) $\lim\limits_{t \downarrow 0} T(t)x = x \quad \forall x \in X$

(iii) Es gelten:

(a) $T(\cdot)$ ist normbeschr. auf einem Intervall $[0, \delta]$, d.h.,

$\exists M \geq 1, \exists \delta > 0: \|T(t)\| \leq M$ auf $[0, \delta]$.

(b) $\exists D \subset X$ dicht s.d.

$\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x \quad \forall x \in D$.

Beweis ((i) ⇒ (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i))

(i) ⇒ (iii) (b) klar

(a): PGB – Prinzip der Gleichm. Beschr.

Sei $\delta > 0$. $\forall x$ ist $\|T(t)x\|$ beschr. auf $[0, \delta]$

$\Rightarrow \|T(t)\|$ –"–

(iii) ⇒ (ii) Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Nimm $y \in D$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$

Wir haben:

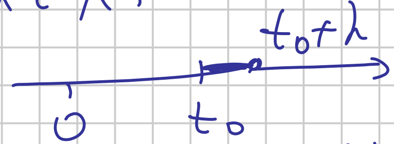
$$\|T(t)x - x\| \leq \underbrace{\|T(t)(x-y)\|}_{\leq M\varepsilon,\ \text{falls } t \in [0,\delta]} + \|T(t)y - y\| + \underbrace{\|y - x\|}_{<\varepsilon}$$

Nach Vorauss. $\exists \tilde{\delta} \in [0,\delta] : \|T(t)y - y\| < \varepsilon$ auf $[0,\tilde{\delta}]$

Für $t \in [0,\tilde{\delta}]$:

$$\|T(t)x - x\| \leq M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2+M)$$

$((ii) \Rightarrow (i))$ Seien $t_0 > 0$, $x \in X$.



<u>Rechtsstetigkeit:</u>

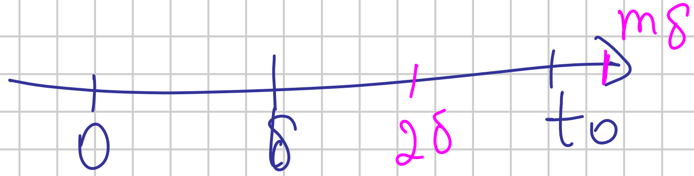
$$\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| \underset{(H1)}{\leq} \|T(t_0)\| \, \|T(h)x - x\| \xrightarrow[h \searrow 0]{} 0$$

<u>Linksstetigkeit</u>

Wir zeigen zuerst: $\exists \delta > 0 \ \exists M : \|T(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0,\delta]$

Ang., es ist nicht so: $\exists t_n \searrow 0$ mit $\|T(t_n)\| \longrightarrow \infty$.

PGB: $\exists x \in X : \|T(t_n)x\| \longrightarrow \infty$ $\lightning$



Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $t_0 \leq m\delta$.

Dann gilt $\forall t \leq m\delta$, $t = \underbrace{n}_{\leq m}\delta + \underset{\substack{\uparrow \\ [0,\delta]}}{r}$

$$\|T(t)\| = \|T(n\delta + r)\| = \|T(\delta)^n \cdot T(r)\|$$
$$\leq \|T(\delta)\|^n \cdot \|T(r)\| \leq M^{n+1} \leq M^{m+1}.$$

D.h., $\|T(t)\| \leq M^{m+1}$ auf $[0, m\delta]$.

Sei $h \in [0, t_0]$. Dann:

$$\|T(t_0 - h)x - T(t_0)x\| = \|T(t_0 - h)(x - T(h)x)\|$$
$$\leq \underbrace{\|T(t_0 - h)\|}_{\leq M^{m+1}} \cdot \underbrace{\|T(h)x - x\|}_{\text{Vorauss.} \to 0} \xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0.$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp 1.4}}$ a) Multiplikations HG'en auf c_0, ℓ^p.

Sei $X = c_0$, $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Def. für $t \geq 0$

$$T(t)(s_1, s_2, \ldots) := (e^{a_1 t} s_1, e^{a_2 t} s_2, \ldots).$$

Dann gilt:

$$T(t) \in \mathcal{L}(X) \iff \sup_j |e^{a_j t}| < \infty$$

$$\iff \sup_j e^{\operatorname{Re} a_j t} < \infty$$

$$\iff \sup_j \operatorname{Re} a_j t < \infty$$

$$\iff \boxed{\sup_j \operatorname{Re} a_j < \infty}$$

– hängt von t nicht ab!

und es gilt: $\|T(t)\| = \sup_j e^{\mathrm{Re}\, a_j t}$ (Warum?)

insbesondere ist $\|T(t)\|$ beschr. in t auf $\forall\, [0,\delta]$.

(H1): Ü

(H2): Es reicht zz: $t \mapsto T(t)e_j$ stetig.
(da finite Folgen dicht in c_0 liegen) – klar

Analog: Multiplikations HG'en auf ℓ^p: Ü'Blatt.

b) <u>Multiplikations HG'en auf $C_0(\mathbb{R})$, L^p</u>

Sei $X := C_0(\mathbb{R})$, $q: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig mit $\sup_{s \in \mathbb{R}} \mathrm{Re}\, q(s) < \infty$

Def. $T(t)f := e^{tq} \cdot f$

- $\|T(t)\| \overset{\text{warum?}}{=} e^{t \cdot \sup_s \operatorname{Re} q(s)}$,
  insb. ist $\|T(t)\|$ beschr. auf $\forall [0,\delta]$.
- (H1): $T(t_1+t_2)f = e^{(t_1+t_2)q} f = e^{t_1 q} e^{t_2 q} f = T(t_1)T(t_2)f$
  $T(0) = I$
- (H2): Es reicht zz: $T(t)f \xrightarrow[t \downarrow 0]{} f$ für $f \in C_c(\mathbb{R})$.
  dicht in $C_0(\mathbb{R})$
  Sei f mit $\operatorname{supp} f \subset K$, K komp.

$$\|e^{tq} f - f\|_\infty = \sup_{s \in K} |e^{tq(s)} - 1| \cdot \underbrace{|f(s)|}_{\leq \|f\|_\infty}$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \sup_{s \in K} |e^{tq(s)} - 1|.$$

zz: $\sup_{s \in K} |e^{tq(s)} - 1| \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0$.

~~Betrachte $A := \{ t \cdot q(s) : t \in [0,1],\ s \in K \} \subset \mathbb{C}$~~

~~A ist beschränkt und kompakt~~ (warum?)

Da die e-Fkt ~~gleichm.~~ stetig ~~auf komp. Mengen~~ ist,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists t_0 \le 1 :\quad \underbrace{|e^{tq(s)} - 1| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, t_0]\ \forall s \in K}_{\sup_{s \in K} |e^{tq(s)} - 1| \le \varepsilon \quad \forall t \in [0, t_0]}$,

d.h., $\sup_{s \in K} |e^{tq(s)} - 1| \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0$.

$\Rightarrow T(\cdot)$ ist eine C_0-HG.

ii) $T(\cdot)$ ist eine Gruppe $\Leftrightarrow$ $\sup$ noch $\mathrm{Re}(-q) < \infty$, d.h., Bild $\varphi \subset$