Notiztitel 22.05.2018

Bemerkung 4.8 1) Also kann man im Falle $\sigma = \sigma_1 \dot{\cup} \sigma_2$, abg., disj.

$T|_{X_1}$ und $T|_{X_2}$ getrennt untersuchen, was oft einfacher ist.

2) (invariantes Teilraumproblem)

Eins der berühmtesten offenen Probleme der Funktionalanalysis:

Frage: $\exists\, T \in \mathcal{L}(H)$, H Hilbert, ∞-dim., ohne $\underbrace{\text{nicht-triviale}}_{\neq 0,\, \neq H}$ abg. lin. invariante Teilräume?

Offen seit > 60 Jahren.

Enflo '76: Gegenbsp auf einem BR

klar: $P_\sigma(T) \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ inv. TR ($Y = \mathbb{C} \cdot x_0$) Eigenvektor

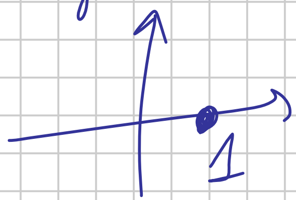
Wir wissen jetzt: $\exists$ Spektralzerlegung $\sigma = \sigma_1 \dot\cup \sigma_2$

$\Rightarrow \exists$ inv. TR'e (X_1, X_2).

Eine Anwendung des Funktionalkalküls: das „$T = I$" Theorem

<u>Frage</u>: Wann impliziert $\sigma(T) = \{1\}$, dass $T = I$ gilt?

<u>Bem.</u> Nicht immer: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



<u>Idee</u> Für Matrizen: Jordansche Normalform.

Man kann nachrechnen $\ddot{u}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

etwas

d.h., $T = I \iff$ kein Jordanblock hat Größe ≥ 2

$\iff \sup_{n \geq 1} \|T^n\| < \infty$.

Die Antwort für ∞-dim. BR'e ist:

$\boxed{\text{Thm. 4.9}}$ (Gelfand, „$T = I$" Theorem)

Für X BR, $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sigma(T) = \{1\}$. Dann gilt

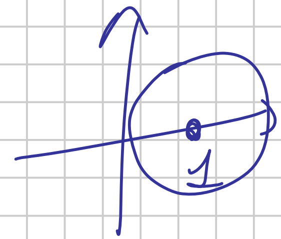
$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T^n\| < \infty \Rightarrow T = I$.

Bem. 1) $\exists T^{-n}$, da $0 \in \rho(T)$

2) „$\Leftarrow$" gilt immer

3) „$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$" reicht i. A. nicht, Bsp: $I + V$ (Volterra)

(ohne Beweis)



Beweis Der Hauptzweig des Logarithmus ist holom. in $U_1(1)$, also def.

$$S := -i \cdot \log T$$

Wir haben:

- $T = e^{iS}$ (Kettenregel)
- $\sigma(S) = \{0\}$ (Spektraler Abbildungssatz: $\log 1 = 0$)

Wir zeigen: $S = 0$ (dann gilt $T = e^{i0} \overset{\text{z.B. Reihendarst.}}{=} I$)

Dafür zeigen wir: $\|nS\|$ ist beschr. in n.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und betrachte den komplexen Sinus

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{– holom. auf } \mathbb{C}.$$

Betrachte

$$\sin(nS) = \frac{1}{2i}\Big(\underbrace{e^{inS}}_{T^n} - \underbrace{e^{-inS}}_{T^{-n}}\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(T^n - T^{-n}\right)$$

Nach Voraus. gilt:

$$\|[\sin(nS)]^k\| = \left\| \left[\frac{T^n - T^{-n}}{2i}\right]^k \right\|$$

$$= \frac{\| T^{nk} - \binom{k}{1} T^{n(k-1)} T^{-n} + \dots + (-1)^{k-1} T^{-nk} \|}{2^k}$$

$$\leq M \cdot \frac{\left(1 + \binom{k}{1} \cdot 1 + \dots + 1\right)}{2^k} = M \cdot \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^k}} = M.$$

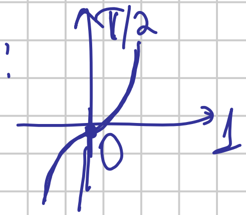
$= (1+1)^k$

$M := \sup_{n \in \mathbb{Z}} \| T^n \|$

Erinnere: Der Hauptzweig des Arc sin ist holom. in einer Umg. von 0 ($\sin 0 = 0$:

$\cos 0 = 1 \neq 0$)

$(\sin)'$



Sei $\arcsin z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ die Taylorentw. von arcsin

Ana I: • $c_k \geq 0$

- $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \arcsin 1 = \pi/2$

Insgesamt haben wir:

$$\|nS\| \underset{\text{Kettenregel}}{=} \|\arcsin(\underbrace{\sin(nS)}_{\sigma(\dots)=\{0\}})\|$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \underbrace{\|[\sin(nS)]^k\|}_{\le M}$$

$$\le M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k = M \cdot \pi/2 \qquad \forall n!$$

$\Rightarrow \|S\| = 0$, also $S = 0$ und $T = I$ ∎

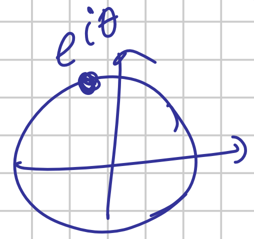
$\boxed{\text{Folgerung 4.10}}$ Seien X BR, $T \in \mathcal{L}(X)$ eine Isometrie mit $\sigma(T) = \{1\}$. Dann gilt $T = I$.

Beweis $\|Tx\| = \|x\| \; \forall x$, also: $\|T^n\| = 1 \; \forall n \geq 1$.

T^{-1} auch eine Isom. $\Rightarrow \|T^{-n}\| = 1$ –"– .

+ Gelfand. ∎

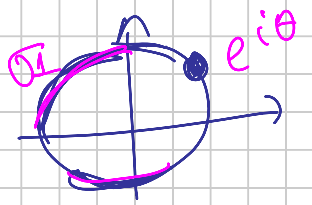
Bem. 1) 1 kann durch $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ ersetzt werden



(Betr. $S := e^{-i\theta}T$, dann $\sigma(S) = \{1\}$ und $\|S^n\|$ beschr. $\Leftrightarrow \|T^n\|$ beschr.)

2) Wenn T z.B. Isometrie ist, $\sigma = \sigma_1 \cup \{e^{i\theta}\}$,

abg.



dann gilt nach Gelfand + Spektralzerlegung:
$X = X_1 \oplus X_2$, $\sigma(T|_{X_1}) = \sigma_1$, $T|_{X_2} = e^{i\theta} \cdot I$.

III Asymptotik von Operatoren

1. Einleitung

Frage: Wie verhält sich T^n, $n \to \infty$.

$\boxed{\text{Bsp 1.1}}$ (Matrizen)

1) Sei $J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_{d \times d}$.

Es gilt: $J = \lambda \cdot I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{=:\, R}$

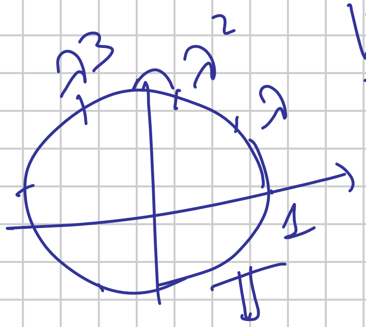
$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad R^d = 0$

$$J^n = (\lambda I + R)^n = \lambda^n \cdot I + n \cdot \lambda^{n-1} \cdot R + \dots + \binom{n}{d-1} \lambda^{n-d+1} R^{d-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n \cdot \lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{d-1} \lambda^{n-d+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

<u>Fall 1</u> $|\lambda| > 1 \Rightarrow \|J^n\| \to \infty$ exp. schnell

<u>Fall 2</u> $|\lambda| < 1 \Rightarrow \|J^n\| \to 0$ exp. schnell



Fall 3 $|\lambda| = 1$, $d \geq 2 \Rightarrow \|J^n\| \to \infty$ polynomiell schnell (wie n^{d-1})

Fall 4 $|\lambda| = 1$, $d = 1$, d.h., $J^n \doteq (\lambda^n)$ und $\|J^n\| = 1$

- J^n konv. $\Leftrightarrow \lambda = 1$
- J^n periodisch $\Leftrightarrow \lambda$ rational (d.h., $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, $\theta \in \mathbb{Q}$)
- λ irrat. $\Leftrightarrow \lambda^n$ dicht in $\mathbb{T}$ (ü ?)

D.h., J^n konv. gegen $P \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ und $\|T^n\|$ beschr. in $n \geq 1$.

dim = 1.

2) Sei T eine beliebige Matrix:

$$T = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} S$$

$$T^n = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{pmatrix} S.$$

Nach 1) gilt:

- T potenzbeschränkt, d.h., $\sup_{n\geq 1} \|T^n\| < \infty$

  $\iff r(T) \leq 1$ und $\dim \mathcal{J}_k = 1$, sobald $\lambda_k \in \mathbb{T}$.

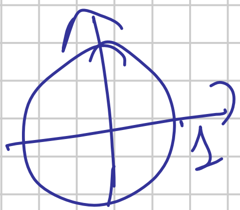
- $T^n \to P_{\neq 0}$ $\iff$ $\underbrace{\lambda = 1}_{\text{muss vorkommen}}$ oder $|\lambda| < 1$ $\forall \lambda \in \sigma(T)$

  und alle Blöcke zu 1 haben Größe 1.

d.h., $T \sim \begin{pmatrix} \boxed{I} & 0 \\ 0 & \boxed{\ast} \end{pmatrix}$ etwas mit $r(T) < 1$

und $T^n \to P \sim \begin{pmatrix} \boxed{I} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$

Allgemeine Operatoren: keine Jordansche Normalform, mehr Phänomene.



$\boxed{\text{Beobachtung}}$ $T \in \mathcal{L}(X)$ potenzbeschr. $\Rightarrow r(T) \leq 1$.
Banach

Beweis

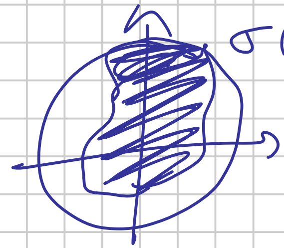
$r(T) = \lim \underbrace{\sqrt[n]{\|T^n\|}}_{\leq \sqrt[n]{M}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$ ∎

Bem.: • $r(T) < 1 \Rightarrow \|T^n\| \leq q^n$ für ein $q<1$ und alle großen n

$\Rightarrow \|T^n\| \to 0$ exp. schnell.

• $r(T) > 1 \Rightarrow \|T^n\| \geq q^n$ für ein $q>1$ und alle großen n

$\Rightarrow \|T^n\| \to \infty$ exp schnell.



Wir werden $r(T) = 1$ annehmen.

$\boxed{\text{Frage}}$ Wann konv. T^n?

Arten der Konvergenz:

Normkonv.: $\|T^n - P\| \to 0$

$\Downarrow$

Starke Operatorkonv.: $T^n x \to Px \quad \forall x$

$\Downarrow$

Schwache Operatorkonv.: $T^n x \xrightarrow{\text{schwach}} Px \quad \forall x,$

d.h., $\varphi(T^n x) \to \varphi(Px) \quad \forall x \in X, \ \forall \varphi \in X'$

Bem. Normkonv. $\overset{1}{\not\Leftarrow}\!\!\Rightarrow$ starke Op'konv. $\overset{2}{\not\Leftarrow}\!\!\Rightarrow$ schwache Op'konv.

Ü

Gegenbsp für 1: $T = \leftarrow$ auf ℓ^2 oder c_0

- $\|T^n\| = 1 \not\to 0$
- $\|T^n x\| \longrightarrow 0$

Gegenbsp für 2: $T = \rightarrow$ auf ℓ^2.

- $\|Tx\| = \|x\|$ – isometrie, also gilt: $T^n x \to 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $T^n x \xrightarrow{\sigma} 0 \quad \forall x$

schwach

$\boxed{\text{Prop. 1.2}}$ (Von Neumann)

Sei T eine Kontraktion auf einem HR H. Dann gilt:

$$H = \mathrm{Fix}\,T \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Bild}(I-T)}$$

Bem. 1) Hier ist $\mathrm{Fix}\,T = \{x : Tx = x\}$ – ein abg. lin. T-inv. TR.

2) Der Satz gilt für eine viel größere Klasse von Operatoren, z. B. $\forall$ potenzbeschr. Operatoren auf refl. Räumen.

Beweis Beobachtung: $Tx = x \Rightarrow T^* x = x$

Bew. der Beob.:

$$\langle \underset{\text{kontr.}}{T^*} x, x \rangle = \langle x, \underbrace{Tx}_{x} \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

„=" in Cauchy-Schwarz $\Rightarrow T^* x = c \cdot x$

und $c = 1$ (oder $x = 0$) $\blacksquare$ - Beob.

1) zz: $\mathrm{Fix}\,T \perp \mathrm{Bild}(I - T)$

Sei $x \in \mathrm{Fix}\,T$, $y \in H$. Dann gilt:

$$\langle x, y - Ty\rangle = \langle x, y\rangle - \underbrace{\langle x, Ty\rangle}_{\langle Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle} = 0$$

Beobachtung

2) Sei $x \perp \mathrm{Bild}(I - T)$. zz: $x \in \mathrm{Fix}\,T$.

Wir haben insb.

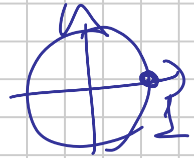
$$0 = \langle x, x - Tx\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, Tx\rangle,$$

d.h., $\langle x, Tx\rangle = \|x\|^2$

kontr.

„=" in Cauchy-Schwarz: $Tx = c \cdot x$, und $c = 1$ (oder $x = 0$) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Prop. 1.3}}$ Sei X Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$, $T^n \longrightarrow P$ in Norm, stark oder schwach. Dann gelten:



a) $r(T) \leq 1$, $P\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$

b) P ist eine Projektion mit

$$\operatorname{Bild} P = \operatorname{Fix} T$$

$$\operatorname{Ker} P = \overline{\operatorname{Bild}(I-T)},$$

d.h., $X = X_1 \oplus X_2$, $T|_{X_1} = I$

$T^n|_{X_2} \longrightarrow 0$ (in Norm, stark bzw. schwach)

<u>Beweis</u> a) $r(T) \leq 1$, da $\|T^n\|$ beschr. in n (Satz von der

gleichm. Beschr.)

Ang.: $\exists \lambda_{\neq 1} \in \mathbb{T}$ EW mit EV x.

$T^n x = \lambda^n x$ — keine konv. (nicht mal schwache).

konv. nicht

b) <u>Annahme</u> T kontr., X Hilbert

Sei $x \in \operatorname{Fix} T \Rightarrow T^n x = x \ \forall n$

$\Rightarrow Px = x$, also $x \in \operatorname{Bild} P$ und $P = I$ auf $\operatorname{Fix} T$.

Sei $x \in \operatorname{Bild}(I-T)$, d.h., $x = y - Ty$ für ein y.

Dann: $T^n x = \underbrace{T^n y}_{Py} - \underbrace{T^{n+1} y}_{Py} \to Py - Py = 0$, d.h., $Px = 0$ und $P = 0$ auf $\overline{\text{Bild}(I-T)}$

Von Neumann: $P^2 = P$ + Zerlegung. $\blacksquare$

D.h., man kann $\text{Fix}\,T$ „wegnehmen" und $\underbrace{\text{Konvergenz gegen } 0}_{\text{„Stabilität"}}$ untersuchen.

$\boxed{\text{Def 1.4}}$ Sei $T \in \mathcal{L}(\underbrace{X}_{\text{Banach}})$. T heißt

- normstabil, wenn $\|T^n\| \longrightarrow 0$ $\left(\Leftrightarrow r(T) < 1\right)$
- stark stabil, wenn $\|T^n x\| \longrightarrow 0$ $\forall x$
- schwach stabil, wenn $T^n x \xrightarrow{\text{schwach}} 0$ $\forall x$.

2. Starke Stabilität

Bsp $\leftarrow$ auf c_0, ℓ^p $(1 \le p < \infty)$

Prop. 2.1 Sei X Banach, T kontr. und stark stabil.
Dann ist T isometrisch isomorph zu $T_\ell = \leftarrow$ auf einem abg. TR von $\underbrace{c_0(X)}_{\{(x_n) \subset X \text{ mit } \|x_n\| \to 0\} \text{ mit Supnorm.}}$,

d.h., $\exists\, Y \subset c_0(X)$ abg. TR, $j : X \to Y$ invert. Isometrie mit $j T j^{-1} = T_\ell$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "T_\ell"] & Y \end{tikzcd}$$

Beweis Setze $j : x \mapsto (x, Tx, T^2x, \dots) \in c_0(X)$

j ist isom.: $\|jx\|_\infty = \|x\|$ (da T kontr.)

Def: $Y := \text{Bild } j$, dann ist $j: X \to Y$ isom. + bij

Y abg., da j eine Isometrie ist.

(Isometrien haben abg. Bild – warum?)

$jTj^{-1} = T_\ell$ klar (?). ∎

Analog:

$\boxed{\text{Prop. 2.2}}$ Sei H Hilbert, T kontr. und stark stabil.

Dann ist T unitär isom. zu einem Linksshift auf einem (Unterraum von) $\ell^2(Y)$ Hilbert,

d.h., $\exists Y$ Hilbert, $\exists H_1 \subset \ell^2(Y)$ abg. TR,

$U: H \to H_1$ unitär mit $UTU^{-1} = T_e$.

<u>Beweis</u> Teleskopsumme:

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\|T^n x\|^2 - \|T^{n+1}x\|^2\right) = \|x\|^2 - \underbrace{\|T^{N+1}x\|^2}_{\to 0} \xrightarrow[N\to\infty]{} \|x\|^2 ,$$

d.h.,
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\|T^n x\|^2 - \|T^{n+1}x\|^2\right) = \|x\|^2.$$

Def. die Halbnorm
$$\|x\|_Y^2 := \|x\|^2 - \|Tx\|^2 \quad \forall x \in H.$$

($\|x\|_Y \geq 0$, da T kontr.) Ü Halbnorm

$$H_0 := \{x : \|x\|_Y = 0\} = \{x : \|x\| = \|Tx\|\}$$

$Y := \left(H / H_0, \|\cdot\|_Y\right)^{\sim}$ – Vervollständigung – Hilbertraum.

Def. $j: H \to \ell^2(Y)$
$x \mapsto (x, Tx, T^2x, \dots)$ (Ä' Klasse)

j ist isom., da $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n x\|_Y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\|T^n x\|^2 - \|T^{n+1} x\|^2\right)$
$= \|x\|^2$

$H_1 := \text{Bild}\, j \subset \ell^2(Y)$,

$j: H \to H_1$ $\underbrace{\text{unitär } (= \text{invert. Isometrie})}_{\text{Ü}}$

$j T j^{-1} = T_\ell$ ~~k~~lar.

$\boxed{\text{Frage}}$ Gibt es spektrale Bedingungen für starke Stab. ?

Vorbereitung:

$\boxed{\text{Lemma 2.3}}$ Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ eine Kontraktion auf einem BR X. Dann gelten:

(a) $\forall x \in X \quad \exists \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|$

(b) $\{x : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0\}$ ist abg., T-inv. lin. TR.

(∀T, nicht nur Kontr.)

Beweis (a) folgt, da $\|T^n x\| \searrow$.

(b) ü

"■"

Konstruktion des isometrischen Limesoperators (Lyubich, Vũ)

Sei T Kontr. auf X, X BR, und def.

$$Y := \{x : \|T^n x\| \to 0\}$$

Lemma 2.3 (b): Y abg., lin., T-inv.

Betr. $(X/Y, \|\cdot\|_T)$, wobei

$$\|x+Y\|_T := \lim_{n\to\infty} \|T^n x\| \quad (\exists \text{ nach Lemma 2.3(a)})$$

(Warum wohldef. und Norm auf X/Y ?)

Beobachtung: $\|x+Y\|_T \leq \|x\| \quad \forall x$ (da T Kontr.)

Def. S auf X/Y durch

$$S(x+Y) := Tx+Y. \quad \text{(warum wohldef.?)}$$

Schließlich def.

$$Z := \widetilde{(X/Y, \|\cdot\|_T)}$$ Vervollständigung.

$\boxed{\text{Lemma 2.4}}$ Die Fortsetzung von S auf Z ist eine Isometrie, genannt isometr. Limesoperator von T.

Es gilt: $\sigma(S) \subset \sigma(T)$.

<u>Beweis</u> $\|S(x+Y)\|_T = \|Tx+Y\|_T = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^{n+1}x\| = \|x+Y\|_T$.

weg

$\Rightarrow$ S isom. auf X/Y $\Rightarrow$ auf Z.

Sei $\lambda \in \rho(T)$. zz: $\lambda \in \rho(S)$

Def. $R(\lambda)$ auf $(X/Y, \|\cdot\|_T)$ durch

$R(\lambda)(x+Y) := R(\lambda,T)x + Y \quad \forall x.$

(warum wohldef.?
Prüfe: Y ist $R(\lambda,T)$-inv.)

Es gilt: $\|R(\lambda)(x+y)\|_T = \lim_{n\to\infty} \|T^n R(\lambda,T)x\|$

kommut.

$\leq \|R(\lambda,T)\| \cdot \|x+Y\|_T$,

d.h., $\|R(\lambda)\| \leq \|R(\lambda,T)\|$, also ist $R(\lambda)$ beschr. auf X/Y $\Rightarrow$ auf Z.

Außerdem hat man:

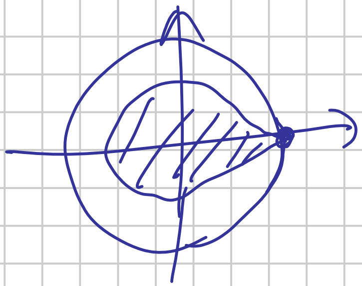
$(\lambda - S)R(\lambda) = I = R(\lambda)(\lambda - S)$ auf X/Y

$\Rightarrow$ auf Z, d.h., $\lambda \in \rho(S)$ und $R(\lambda, S) = R(\lambda)$. ∎

$\boxed{\text{Thm. 2.5}}$ (Katznelson–Tzafriri, 1986)

Seien X BR, $T \in \mathcal{L}(X)$ kontraktiv mit $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$.

Dann gilt:

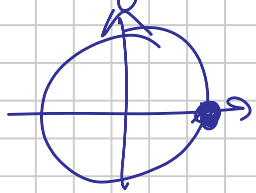


$$\|T^{n+1} - T^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Beweis **Schritt 1** Wir zeigen zuerst:

(*) $\|T^{n+1}x - T^n x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in X.$

Sei S der isom. Limesop. zu T. Nach Lemma 2.4 gilt



$$\sigma(S) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$$

Da für Isometrien $\sigma(S) = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$ oder $\sigma(S) \subset \mathbb{T}$ gilt (Prop. 2.5 in Kapitel I), gilt

$$\sigma(S) = \{1\}.$$

Korollar aus dem „$T = I$"-Satz von Gelfand für

Isometrien: $\quad S = I.$

D.h., $\quad Tx + Y = x + Y \quad \forall x,$

d.h., $\quad Tx - x \in Y = \{ y \in X : \|T^n y\| \to 0 \}$

<u>Schritt 2</u> $\quad$ Zz.: $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^{n+1} - T^n\| = 0.$

Betr. $\mathcal{L}(X)$ und einen Multiplikator $\mathcal{U} : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$

def. durch

$$\mathcal{U} R := T \cdot R, \quad R \in \mathcal{L}(X).$$

- $\|\mathcal{U}\| \le \|T\| \le 1$
- Wir zeigen: $\sigma(\mathcal{U}) \subset \sigma(T)$ $\left(\Rightarrow \sigma(\mathcal{U}) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}\right)$

Sei $\lambda \in \rho(T)$. z.z.: $\lambda \in \rho(\mathcal{U})$.

Def. $R(\lambda): \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ durch

$$R(\lambda)R := (\lambda - T)^{-1} R \quad , R \in \mathcal{L}(X).$$

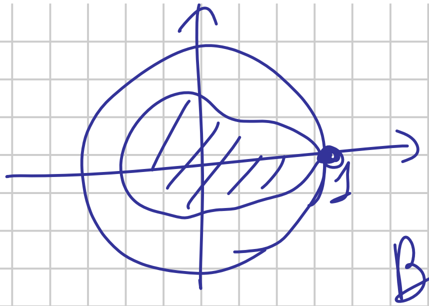
$R(\lambda)$ beschr. und $\quad R(\lambda)(\lambda - \mathcal{U}) = I = (\lambda - \mathcal{U}) R(\lambda)$;
d.h., $\lambda \in \rho(\mathcal{U})$.

Nach Schritt 1 gilt: $\| \underbrace{\mathcal{U}^{n+1} R - \mathcal{U}^n R}_{T^{n+1}R - T^n R} \| \longrightarrow 0 \quad \forall R$

Nimm $R = I$. $\blacksquare$

Als Korollar bekommen wir:

$\boxed{\text{Thm 2.6}}$ Seien X BR, $T \in \mathcal{L}(X)$ eine Kontraktion mit $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$. Dann gilt:



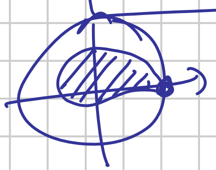
$$\|T^n x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall x \in \overline{\mathrm{Bild}(I-T)}$$

Beweis Sei $y \in X$, $x := Ty - y$.

Katznelson-Tzafriri (sogar schon $(*)$):

$$\|T^n x\| = \|T^{n+1}y - T^n y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Aussage für $x \in \mathrm{Bild}(I-T)$. Abgeschlossenheit von Y: $\forall x \in \overline{\mathrm{Bild}(I-T)}$ ∎



$\boxed{\text{Corollar 2.7}}$ Sei H Hilbert, T Kontr. auf H mit $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$. Dann gilt:

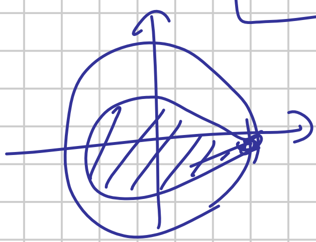
$$H = \mathrm{Fix}\,T \oplus \{x : \|T^n x\| \to 0\}.$$

Insbesondere gilt:

$$T \text{ stark stabil} \iff 1 \notin P_\sigma(T)$$

<u>Beweis</u> Von Neumannsche Zerlegung 1.2 + Thm. 2.6. ∎

$\boxed{\text{Korollar 2.8}}$ Sei X BR, T Kontr. auf X mit



$\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$ mit $1 \notin P_\sigma(T')$. Dann ist T stark stabil.

<u>Beweis</u> Wir zeigen: $\overline{\mathrm{Bild}(I-T)} = X$. (Dann: Thm. 2.6)

Wir wissen aus Kapitel 1:

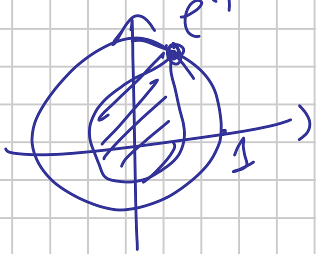
$$\operatorname{Ker}(I-T') = \{\varphi \in X' : \varphi|_{\overline{\operatorname{Bild}(I-T)}} = 0\}$$

$1 \notin P_\sigma(T')$: $\left(\varphi|_{\overline{\operatorname{Bild}(I-T)}} = 0 \Rightarrow \varphi = 0\right) \quad \forall \varphi$

Hahn-Banach: $\overline{\operatorname{Bild}(I-T)} = X$. $\blacksquare$

Bem. 1) ($\nexists$ Spektralbedingung für schwache Stabilität)

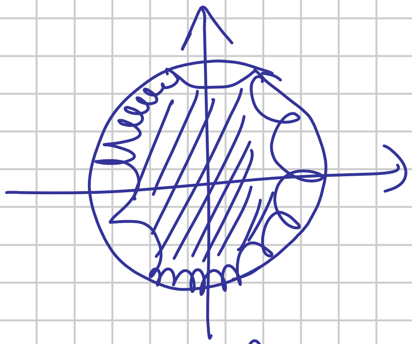
2) Durch Rotation mit $e^{i\varphi}$ (d.h., $T \rightsquigarrow e^{i\varphi}T$) kann man auch den Fall $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{e^{i\varphi}\}$ behandeln:



$$T \text{ stark stabil} \Leftrightarrow e^{i\varphi} \in P_\sigma(T')$$

$\boxed{\text{Thm. 2.9}}$ (Arendt–Batty–Lyubich–Vũ, 1988)

Sei X Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ Kontraktion. Dann gilt:



$$\left.\begin{array}{l} P\sigma(T')\cap \mathbb{T} = \emptyset \\ \sigma(T)\cap\mathbb{T} \text{ höchstens abzählbar} \end{array}\right\} \Rightarrow T \text{ stark stabil}$$

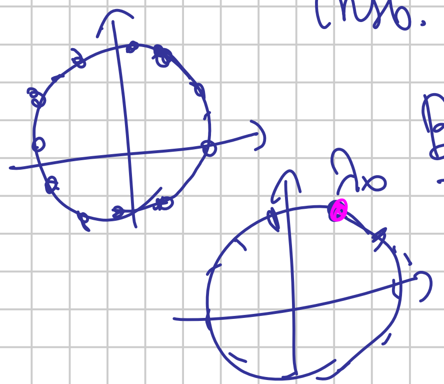
Beweis (Lyubich–Vũ)

Ang., T ist nicht stark stabil. Dann ist

$$Z = (X/_Y, \|\cdot\|_T)^{\sim} \neq \{0\}.$$

Betrachte den isometr. Limesoperator S auf Z.

Nach Lemma 2.4 gilt: $\sigma(S) \cap \mathbb{T}$ ist höchstens abz.,
insb. $\neq \mathbb{T}$. Insb. ist S invert. mit $\sigma(S) \subset \mathbb{T}$ höchstens abz.



<u>Behauptung</u>: $\exists$ isoliert. Punkt λ_0 in $\sigma(S)$

<u>Beweis</u> Satz von Baire:

$\sigma(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$, $\forall \{x_n\}$ abg. $\xRightarrow{\text{Baire}} \exists n: \{x_n\}$ hat

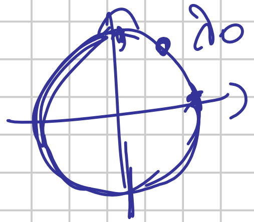
einen inneren Punkt, d.h., da $\sigma(S)$ vollst. metr. Raum

$\{x_n\}$ offen $\Rightarrow \sigma(S) \setminus \{x_n\}$ abg.; also muss

$\{x_n\}$ isoliert sein (pos. Abstand zu $\sigma(S) \setminus \{x_n\}$)

Behaupt. $\blacksquare$

Wir zeigen: $\lambda_0 \in P\sigma(S)$



Betr. die Spektralprojektion P_{λ_0} von S bzgl. $\{\lambda_0\}$ und $S_0 := S|_{\text{Bild } P_{\lambda_0}}$.

Erinnere: $X = X_1 \oplus X_2$, $X_2 = \text{Bild } P_{\lambda_0}$,

$$\sigma(S|_{X_2}) = \{\lambda_0\}, \text{ d.h., } \sigma(\underbrace{\overline{\lambda_0} \cdot S|_{X_2}}_{\text{Isometrie}}) = \{1\}$$

Satz von Gelfand: $\overline{\lambda_0} \cdot S|_{X_2} = I$, d.h., $S|_{X_2} = \lambda_0 \cdot I$

und damit $\lambda_0 \in P_\sigma(S)$.