Notiztitel 20.06.2018

Bsp 3.5 (TranslationsHG)

$X = C_{ub}(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, $T_\ell(\cdot) \leftarrow$

beschr. gleichm. stet.

Behauptung $D(A) = \{ f \in X : f' \in X \}$

$Af = f'$

Wir zeigen: $D(A) \subset \{ \dots \}$, $Af = f'$, „$\supset$" kommt später.

1) $X = C_{ub}(\mathbb{R})$. Da $\delta_0 \in (C_{ub}(\mathbb{R}))'$, ist der Orbit

Punktauswertung in 0

$$t \longmapsto \delta_0(T_\ell(t)f) = f(t)$$

diff'bar auf $\mathbb{R}_+$ $\forall f \in D(A)$.

$\Rightarrow$ diff. auf $\mathbb{R}$ (warum?)

Also ist f diff'bar auf $\mathbb{R}$. Außerdem gilt $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\frac{(T(t)f)(s) - f(s)}{t} = \frac{f(s+t) - f(s)}{t} \xrightarrow[t \searrow 0]{} f'(s)$$

Wir wissen: $\exists \; \|\cdot\|_\infty$ – Limes von $\frac{T(t)f - f}{t}$ (da $f \in D(A)$),

also ist der Limes $= f'$ (da $\|\cdot\|_\infty$-konv. punktw. konv. impliziert)

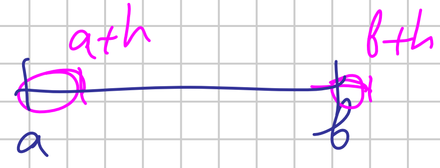
D.h., $f \in D(A) \Rightarrow \exists f' = Af$

2) $X = L^p(\mathbb{R})$ – Skizze

Sei $f \in D(A)$ und def. $g := Af$

Wir haben für $[a,b] \subset \mathbb{R}$

$$\int_a^b \frac{f(s+h)-f(s)}{h}\,ds = \frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h} f - \int_a^b f\right]$$



$$= \underbrace{\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f}_{\substack{\xrightarrow{h\downarrow 0}\ f(b) \\ \text{für f.a. } b}} - \underbrace{\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f}_{\substack{\xrightarrow{h\downarrow 0}\ f(a) \\ \text{für f.a. } a}}$$

, da $f \in L^p \Rightarrow f$ f.ü. stetig.

Da $\left\| \frac{f(\cdot+h)-f(\cdot)}{h} - g \right\|_p \longrightarrow 0$, konv. die linke Seite gegen $\int_a^b g$.

Also gilt für f.a. a und b

$$\int_a^b g = f(b) - f(a)$$

Damit (warum?) ist f f.ü. diff'bar mit $f' = g$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp } 3.6}$ (Reskalierte HG)

Sei $T(\cdot)$ eine C_0-HG mit Generator $(A, D(A))$, $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$,

$$S(t) := e^{\mu t} \cdot T(\alpha t).$$

Der Generator $(B, D(B))$ von $S(\cdot)$ erfüllt

$$D(B) = D(A), \quad B = \alpha A + \mu \cdot I.$$

Beweis

$$\frac{e^{\mu t} T(\alpha t)x - x}{t} = \underbrace{\frac{e^{\mu t} T(\alpha t)x - e^{\mu t} x}{t}}_{= e^{\mu t} \alpha \cdot \frac{T(\alpha t)x - x}{\alpha t} \to \alpha A x} + \underbrace{\frac{e^{\mu t} x - x}{t}}_{\xrightarrow{t \downarrow 0} \mu x}$$

$$\xrightarrow[t\downarrow 0]{} \lambda A x + \mu x$$

Schneller: $x \in D(B) \Leftrightarrow x \in D(A)$ und $B = \lambda A + I$

$\forall x \in D(A)$, d.h., $D(A) \subset D(B)$ und $B = \lambda A + \mu$ auf $D(A)$

„$\supset$" folgt aus der obigen Rechnung auch. $\blacksquare$

Bsp 3.7 (e^{tA} für $A \in \mathcal{L}(X)$)

Sei $T(t) = e^{tA}$ für $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist A $(= (A, X))$ der Generator von $T(\cdot)$.

X = $D(A)$

Beweis

$$\frac{T(t)x - x}{t} - Ax = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x - x}{t} - Ax$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n x}{n!} - Ax = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n x}{n!}$$

$$= tA^2 \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{t^n A^n x}{(n+2)!}}_{\|\cdot\| \leq e^{t\|A\|}\|x\|} \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0 \quad \forall x \in X.$$

$\boxed{\text{Prop. 3.8}}$ (Charakterisierung normstet. HG'en)

Für eine C_0-HG $T(\cdot)$ mit Gener. $(A, D(A))$ sind äquiv.:

(i) $A \in \mathcal{L}(X)$

(ii) $D(A) = X$

(iii) $T(\cdot)$ ist normstetig.

In diesem Fall gilt $T(t) = e^{tA}$ $\forall t \geq 0$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (iii) Eindeutigkeit der generierten HG + Bsp 3.7 + Normstet. von (e^{tA})

((iii) $\Rightarrow$ (i)) Wir wissen (Thm. 2.2):

$T(\cdot)$ normstet. $\Rightarrow T(t) = e^{tB}$ für ein $B \in \mathcal{L}(X)$,

Bsp 3.7: $B = A$, d.h., $A \in \mathcal{L}(X)$.

((i) $\Rightarrow$ (ii)) klar

((ii) $\Rightarrow$ (i)) $D(A) = X$, A abg. $\Rightarrow A \in \mathcal{L}(X)$

Satz vom abg. Graphen

$\blacksquare$

Einschub: Spektraltheorie für abg. Operatoren

Sei $A : D(A) \longrightarrow X$ abg., lin., X Banach.

$D(A) \subset X$

Def.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : \underline{\underline{D(A)}} \to X \text{ bij}\}$$

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} \quad \forall \lambda \in \rho(A)$$

$R(\lambda, A) : X \to \underline{\underline{D(A)}}$

Bem. Es gilt:
- A abg. $\Leftrightarrow$ A^{-1} abg. (da $\Gamma(A^{-1}) = \{(y, \underbrace{A^{-1}y}_{=:x}), y \in X\} = \{(Ax, x), x \in D(A)\}$, wobei $y = Ax$)

  ($A: D(A) \to X$ bij)
- A abg. $\Rightarrow$ $A - \lambda \cdot I$ abg. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$
- A abg. $\Leftrightarrow$ $-A$ abg.

Also ist $\forall \lambda \in \rho(A)$ $\quad R(\lambda, A): \underset{=}{X} \to D(A)$ abg. $\Rightarrow$ beschr.!

Genauso wie früher (für $A \in \mathcal{L}(X)$) gilt die Resolventengleichung: (Satz vom abg. Graphen)

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

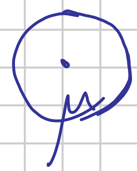
Man hat auch:

Prop. 3.9 (Eigenschaften der Resolvente)

Für einen lin., abg. Operator $A: \underset{\subset X}{D(A)} \to X$, X Banach, gelten:

a) $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ ist offen und $\forall \mu \in \rho(A)$ gilt:

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu-\lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

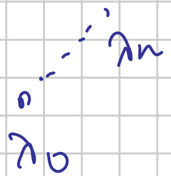


$\forall \lambda$ mit $|\mu-\lambda| < \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$.

b) Die Resolventenabb. $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ ist holom. auf $\rho(A)$ mit

$$R^{(n)}(\lambda, A) = (-1)^n R(\mu, A)^{n+1} \cdot n!$$

$\forall n$,



c) Sei $(\lambda_n) \subset \rho(A)$ mit $\lambda_n \to \lambda_0$. Dann gilt:

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \|R(\lambda_n, A)\| \longrightarrow \infty$$

und es gilt $\forall \lambda \in \rho(A)$

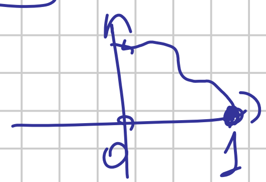
$$\|R(\lambda, A)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))}.$$

Beweis: Analog wie für $A \in \mathcal{L}(X)$. „$\blacksquare$"

Bem. $\sigma(A)$ ist also abg.

Achtung: $\sigma(A) = \emptyset$, $\sigma(A) = \mathbb{C}$ möglich!

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = C[0,1]$, $Af = f'$, $Bf = f'$,



$D(A) = C^1[0,1]$ – maximaler Def'Bereich

$D(B) = \{ f \in C^1[0,1] : f(1) = 0 \}$

A, B sind lin., abg., $\sigma(A) = \mathbb{C}$, $\sigma(B) = \emptyset$

$\boxed{\text{Def}}$ (Einteilung des Spektrums)

Sei $(A, D(A))$ lin., abg. auf X, X Banach.

$$P_\sigma(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A : D(A) \to X \text{ nicht inj} \}$$

$A_\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A$ nicht inj <u>oder</u> Bild $(\lambda - A)$ nicht abg. $\}$

analog wie davor

$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset D(A),\ \|x_n\| = 1 !\ \|(\lambda - A)x_n\| \to 0\}$

$R_\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} :$ Bild $(\lambda - A)$ nicht dicht in $X\}$