Bsp 3.5 (TranslationsHG)

$X = C_{ub}(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, $T_\ell(\cdot) \leftarrow$

beschr. gleichm. stet.

<u>Behauptung</u> $D(A) = \{ f \in X : f' \in X \}$

$Af = f'$

Wir zeigen: $D(A) \subset \{ \dots \}$, $Af = f'$, „$\supset$" kommt später.

1) $X = C_{ub}(\mathbb{R})$. Da $\delta_0 \in (C_{ub}(\mathbb{R}))'$, ist der Orbit

Punktauswertung in 0

$$t \longmapsto \delta_0(T_\ell(t) f) = f(t)$$

diff'bar auf $\mathbb{R}_+$ $\forall f \in D(A)$.

$\Rightarrow$ diff. auf $\mathbb{R}$ (warum?)

Also ist f diff'bar auf $\mathbb{R}$. Außerdem gilt $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\frac{(T(t)f)(s) - f(s)}{t} = \frac{f(s+t) - f(s)}{t} \xrightarrow[t \searrow 0]{} f'(s)$$

Wir wissen: $\exists\ \|\cdot\|_\infty$-Limes von $\frac{T(t)f - f}{t}$ (da $f \in D(A)$),

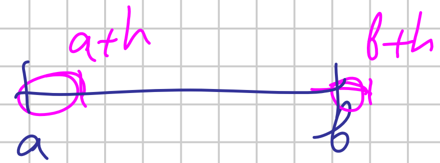
also ist der Limes $= f'$ (da $\|\cdot\|_\infty$-Konv. punktw. Konv. impliziert)

D.h., $f \in D(A) \Rightarrow \exists f' = Af$

2) $X = L^p(\mathbb{R})$ – <u>Skizze</u>

Sei $f \in D(A)$ und def. $g := Af$

Wir haben für $[a,b] \subset \mathbb{R}$



$$\int_a^b \frac{f(s+h)-f(s)}{h}\,ds = \frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h} f - \int_a^b f\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f}_{\substack{\xrightarrow{h \downarrow 0}\, f(b) \\ \text{für f.a. } b}} - \underbrace{\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f}_{\substack{\xrightarrow{h \downarrow 0}\, f(a) \\ \text{für f.a. } a}}$$

, da $f \in L^p \Rightarrow f$ f.ü. stetig.

Da $\left\| \frac{f(\cdot+h)-f(\cdot)}{h} - g \right\|_p \longrightarrow 0$, konv. die linke Seite gegen $\int_a^b g$.

Also gilt für f.a. a und b

$$\int_a^b g = f(b) - f(a)$$

Damit (warum?) ist f f.ü. diff'bar mit $f' = g$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp 3.6}}$ (Reskalierte HG)

Sei $T(\cdot)$ eine C_0-HG mit Generator $(A, D(A))$, $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$,

$$S(t) := e^{\mu t} \cdot T(\alpha t).$$

Der Generator $(B, D(B))$ von $S(\cdot)$ erfüllt

$$D(B) = D(A), \quad B = \alpha A + \mu \cdot I.$$

__Beweis__

$$\frac{e^{\mu t} T(\alpha t)x - x}{t} = \underbrace{\frac{e^{\mu t} T(\alpha t)x - e^{\mu t} x}{t}}_{\underbrace{e^{\mu t}}_{\to 1}\,\alpha \cdot \underbrace{\frac{T(\alpha t)x - x}{\alpha t}}_{\to Ax}} + \underbrace{\frac{e^{\mu t} x - x}{t}}_{\xrightarrow{t \downarrow 0} \mu x}$$

$$\xrightarrow[t \downarrow 0]{} \lambda A x + \mu x$$

Schneller: $x \in D(B) \Leftrightarrow x \in D(A)$ und $B = \lambda A + I$

$\forall x \in D(A)$, d.h., $D(A) \subset D(B)$ und $B = \lambda A + \mu$ auf $D(A)$

„$\supset$" folgt aus der obigen Rechnung auch. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp } 3.7}$ (e^{tA} für $A \in \mathcal{L}(X)$)

Sei $T(t) = e^{tA}$ für $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist A ($= (A, \underbrace{X}_{D(A)})$) der Generator von $T(\cdot)$.

Beweis

$$\frac{T(t)x - x}{t} - Ax = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x - x}{t} - Ax$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n x}{n!} - Ax = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n x}{n!}$$

$$= \underbrace{tA^2}_{\xrightarrow{t\downarrow 0}\, 0} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{(n+2)!}}_{\|\cdot\| \le e^{t\|A\|}\|x\|} \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0 \quad \forall x \in X. \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Prop. 3.8}}$ (Charakterisierung normstet. HG'en)

Für eine C_0-HG $T(\cdot)$ mit Gener. $(A, D(A))$ sind äquiv.:

(i) $A \in \mathcal{L}(X)$

(ii) $D(A) = X$

(iii) $T(\cdot)$ ist normstetig.

In diesem Fall gilt $T(t) = e^{tA}$ $\forall t \geq 0$.

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (iii) Eindeutigkeit der generierten HG + Bsp 3.7 + Normstet. von (e^{tA})

(iii) ⇒ (i) Wir wissen (Thm. 2.2):

$T(\cdot)$ normstet. $\Rightarrow T(t) = e^{tB}$ für ein $B \in \mathcal{L}(X)$,

Bsp 3.7: $B = A$, d.h., $A \in \mathcal{L}(X)$.

(i) ⇒ (ii) klar

(ii) ⇒ (i) $D(A) = X$, A abg. $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{L}(X)$

Satz vom abg. Graphen

$\blacksquare$

Einschub: Spektraltheorie für abg. Operatoren

Sei $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ abg., lin., X Banach.

Def.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : \underline{D(A)} \to X \text{ bij}\}$$

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} \quad \forall \lambda \in \rho(A)$$

$R(\lambda, A) : X \to \underline{D(A)}$

Bem. Es gilt: $(A: D(A) \to X$ bij$)$

- A abg. $\iff$ A^{-1} abg. (da $\Gamma(A^{-1}) = \{(y, \underbrace{A^{-1}y}_{=:x}), y \in X\} = \{(Ax, x), x \in D(A)\}$, $y = Ax$)
- A abg. $\Rightarrow$ $A - \lambda \cdot I$ abg. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$
- A abg. $\iff$ $-A$ abg.

Also ist $\forall \lambda \in \rho(A)$ $\quad R(\lambda, A): X \to D(A)$ abg. $\Rightarrow$ beschr.!

Genauso wie früher (für $A \in \mathcal{L}(X)$) gilt die Resolventengleichung: Satz vom abg. Graphen

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A) \quad ü$$

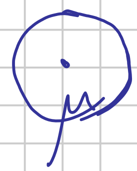
Man hat auch:

$\boxed{\text{Prop. 3.9}}$ (Eigenschaften der Resolvente)

Für einen lin., abg. Operator $A: D(A) \subset X \to X$, X Banach, gelten:

a) $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ ist offen und $\forall \mu \in \rho(A)$ gilt:

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \, R(\mu, A)^{n+1}$$

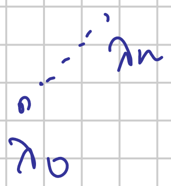


$\forall \lambda$ mit $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$.

b) Die Resolventenabb. $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ ist holom. auf $\rho(A)$ mit

$$R^{(n)}(\lambda, A) = (-1)^n \, R(\mu, A)^{n+1} \cdot n!$$

$\forall n$.



c) Sei $(\lambda_n) \subset \rho(A)$ mit $\lambda_n \to \lambda_0$. Dann gilt:

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \|R(\lambda_n, A)\| \longrightarrow \infty$$

und es gilt $\forall \lambda \in \rho(A)$

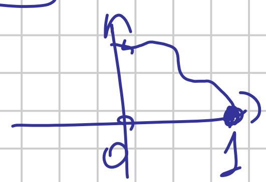
$$\|R(\lambda, A)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))}.$$

Beweis: Analog wie für $A \in \mathcal{L}(X)$. „■"

Bem. $\sigma(A)$ ist also abg.

Achtung: $\sigma(A) = \emptyset$, $\sigma(A) = \mathbb{C}$ möglich!

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = C[0,1]$, $Af = f'$, $Bf = f'$,



$D(A) = C^1[0,1]$ – maximaler Def'Bereich

$D(B) = \{f \in C^1[0,1] : f(1) = 0\}$

A, B sind lin., abg., $\sigma(A) = \mathbb{C}$, $\sigma(B) = \emptyset$

$\boxed{\text{Def}}$ (Einteilung des Spektrums)

Sei $(A, D(A))$ lin., abg. auf X, X Banach.

$P_\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A : D(A) \to X \text{ nicht inj}\}$

$$A_\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ nicht inj } \underline{\text{oder}} \text{ Bild}(\lambda - A) \text{ nicht abg.}\}$$

analog wie davor

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset D(A),\ \|x_n\| = 1 !\ \|(\lambda - A)x_n\| \to 0\}$$

$$R_\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Bild}(\lambda - A) \text{ nicht dicht in } X\}$$

Wie davor gelten:

- $\sigma(A) = A_\sigma(A) \cup R_\sigma(A)$ (i.A. nicht disj.)
- Der top. Rand $\partial\sigma(A) \subset A_\sigma(A)$
- Spektraler Abbildungssatz für die Resolvente:

$$\sigma(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} = \left\{\frac{1}{\lambda_0 - \mu},\ \mu \in \sigma(A)\right\} \quad \forall \lambda_0 \in \rho(A)$$

Achtung: $0 \in \sigma(R(\lambda_0, A)) \iff R(\lambda_0, A)$ nicht stetig invertierbar

$\iff A \notin \mathcal{L}(X)$

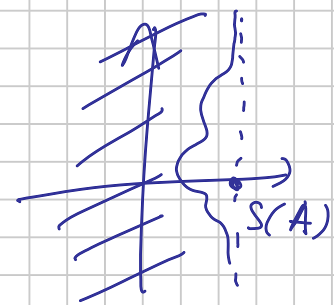
Dasselbe gilt auch für P_σ, A_σ, R_σ.

Zurück zu Generatoren

Def 3.10 (Spektralschranke von A)

Für einen abg. lin. Operator $(A, D(A))$ heißt

$$s(A) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda,\ \lambda \in \sigma(A)\}$$



die Spektralschranke von A.

Bem. $s(A) = -\infty$ ist (für $\sigma(A) = \emptyset$) möglich für Generatoren (kommt später)

Außerdem gilt für Generatoren $s(A) < +\infty$ – folgt aus

Thm 3.11 Für $A \rightsquigarrow \mathbb{T}(\cdot)$ auf X, X Banach, gelten:

a) $-\infty \leq \boxed{s(A) \leq \omega_0(T)}$

für die Wachstumsschranke $\omega_0(T)$ von $\mathbb{T}(\cdot)$.

b) $\omega_0(T) = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|\mathbb{T}(t)\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbb{T}(t)\|$

$= \frac{1}{t_0} \ln r(T(t_0)) \quad \forall t_0 > 0.$

insbesondere gilt $\boxed{r(\mathbb{T}(t)) = e^{\omega_0 t}} \quad \forall t \geq 0.$

Spektralradius

Zuerst brauchen wir

$\boxed{\text{Lemma 3.12}}$ Sei $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ beschr. von oben auf $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$ und subadditiv, d.h.,

$$f(t+s) \leq f(t) + f(s) \quad \forall t, s \geq 0.$$

Dann gilt:

$$\inf_{t>0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}.$$

Beweis: Analog zu Folgen (siehe oben)

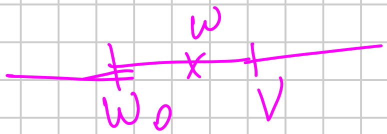
Beweis von Thm. 3.11, b)

Die Fkt $t \longmapsto \ln\|T(t)\|$ ist subadditiv und beschr. auf $\forall [a,b]$:

$$\ln\|\underbrace{T(t+s)}_{T(t)\cdot T(s)}\| \leq \ln\left(\|T(t)\|\cdot\|T(s)\|\right) = \ln\|T(t)\| + \ln\|T(s)\|.$$

Lemma 3.12: $\quad \nu := \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\|T(t)\|$

Es gilt: $\quad e^{\nu t} \leq \|T(t)\| \quad \forall t \geq 0$ und damit $\nu \leq \omega_0$



Wenn $\nu > \omega_0$ wäre, $\exists\, \omega < \nu$, $M_\omega \geq 1$:

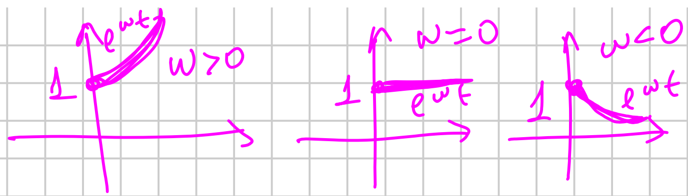
$$e^{\nu t} \leq \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad ⚡$$

Sei $\omega > \nu$. Wir zeigen: $\omega \geq \omega_0$ (damit: $\omega_0 \leq \nu$)

Nach Def. von ν $\quad \exists t_0: \forall t \geq t_0$

$$\underbrace{\frac{1}{t} \ln \|T(t)\| \leq \omega}_{\|T(t)\| \leq e^{\omega t}} \quad \forall t \geq t_0.$$

Da $t \mapsto \|T(t)\|$ beschr. auf $[0, t_0]$ ist, $\exists M \geq 1$:



$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$

D. h., $\omega_0 \leq \omega$ und damit $\omega_0 = \nu$

Noch zz: $\forall t_0$ gilt $\omega_0 = \frac{1}{t_0} \ln r(T(t_0))$.

Erinnere:

$$r(T(t)) = \lim_{n\to\infty} \|\underbrace{T(t)^n}_{T(nt)}\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{t \cdot \frac{1}{nt} \ln \|T(nt)\|}$$

$$= e^{t \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nt} \ln \|T(nt)\|}_{\omega_0(T)}} = e^{t \cdot \omega_0(T)} \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Thm. 3.13}}$ Sei $A \sim T(\cdot)$ auf X, X Banach, und seien $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ mit Thm. 3.11, b)

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

a) Wenn für ein $\lambda \in \mathbb{C}$

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds$$

$\forall x \in X$ existiert, dann gilt $\lambda \in \rho(A)$ und $R(\lambda, A) = R(\lambda)$

b) $\forall \lambda$ mit $\boxed{\mathrm{Re}\,\lambda > \omega}$ ist $\lambda \in \rho(A)$ und

$$\boxed{R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds} \quad \forall x$$

Integraldarstellung der Resolvente.

c) $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega}$ $\quad \forall \lambda$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$.

Bem. 1) Hier ist $\int_0^\infty := \lim\limits_{t \to \infty} \int_0^t$

2)

Thm 3.13 b) $\Rightarrow$ Thm. 3.11 a):

Sei λ mit $\mathrm{Re}\,\lambda > w_0$. Sei $\omega \in (w_0, \mathrm{Re}\,\lambda)$ und M_ω mit $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$

Nach Thm. 3.13 b) gilt: $\lambda \in \rho(A)$, d.h., $\lambda \notin \sigma(A)$

und $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda > w_0\} \subset \rho(A)$,

also muss $\sigma(A) \subset \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \leq w_0\}$ gelten, d.h., $s_0 \leq w_0$. $\blacksquare$

Thm. 3.11, a) (bis auf Beweis von 3.13)

Beweis 3.13

a) OBdA: $\lambda = 0$ (sonst betr. $T_1(t) := e^{-\lambda t} T(t)$ mit Generator $(-\lambda + A, D(A))$):

$$R_1(0)x = \int_0^\infty T_1(s)x\,ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\,ds,$$

und $\quad 0 \in \rho(A_1) \Leftrightarrow \lambda \in \rho(A)$ und $R(0, A_1) = R(\lambda, A))$.

Sei also $\lambda = 0$: $R(0)x := \int_0^\infty T(s)x\,ds$ ex. $\forall x \in X$.

Wir haben:

$$\frac{T(h)-I}{h} R(0)x = \frac{T(h)-I}{h} \int_0^\infty T(s)x\,ds$$

$$= \frac{1}{h} \underbrace{\int_0^\infty T(s+h)x\,ds}_{\int_h^\infty T(s)x\,ds} - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x\,ds$$

$$= -\frac{1}{h} \int_0^h T(s)x\,ds \xrightarrow[h \downarrow 0]{} -T(0)x = -x \quad . \ \forall x \in X$$

Also gilt: $R(0)x \in D(A)$ und $-AR(0)x = x \quad \forall x$, d.h., $-A \cdot R(0) = I$ auf X.

Sei $x \in D(A)$, zz: $R(0)(-Ax) = x$. Wir haben:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)\,x\,ds = R(0)x$$

$$\lim_{t\to\infty} A \int_0^t T(s)\,x\,ds = \lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)\,Ax\,ds = R(0)Ax$$

da $x \in D(A)$ + Mitternachtsformel

Da A abg. ist, muss $R(0)x \in D(A)$ und $\underbrace{AR(0)x}_{-x} = R(0)Ax$.

Damit gilt: $0 \in \rho(A)$ und $\underbrace{(-A)^{-1}}_{R(0,A)} = R(0)$.

b) + c) Sei λ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.
Wir haben:

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x \, ds \right\| \le \int_0^t e^{-\mathrm{Re}\lambda \cdot s} \underbrace{\|T(s)x\|}_{\le M e^{\omega s} \|x\|} ds$$

$$\le M \cdot \|x\| \underbrace{\int_0^t e^{(\omega - \mathrm{Re}\lambda)s} \, ds}_{\frac{e^{(\omega-\mathrm{Re}\lambda)t} - 1}{\omega - \mathrm{Re}\lambda} \to \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega} \cdot \|x\|$$

$$0 \xleftarrow[t\to\infty]{} e^{(\omega-\mathrm{Re}\lambda)t}$$

insb. $\exists \int_0^\infty$ und $\left\| \int_0^\infty \ldots \right\| \le \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega} \|x\|$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Korollar 3.14}}$ Sei $A \sim T(\cdot)$ mit
$\|T(t)\| \le M e^{\omega t}$ $\forall t \ge 0$.

Dann gilt $\forall \mathrm{Re}\lambda > \omega$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in X$

(1) $$R(\lambda, A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x$$

(2) $$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t) x \, dt$$

insbesondere gilt $\forall n$ $\forall \lambda$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}$$

Beweis (1) folgt aus der Potenzreihenentw. für die Resolvente, siehe Prop. 3.9 b)

Nach Thm. 3.13 gilt $\forall \lambda$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = \frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right)$$

$$\underset{\text{da abs. konv.}}{=} -\int_0^\infty t\, e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$$

usw. (induktiv):

$$R(\lambda, A)^n x \underset{(1)}{=} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A) \underset{\text{induktiv}}{=} \frac{\cancel{(-1)^{n-1}}}{(n-1)!} \cancel{(-1)^{n-1}} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$$

zu (3):

$$\|R(\lambda, A)^n x\| = \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt \right\|$$

$$\leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)t}\,dt \cdot \|x\|$$

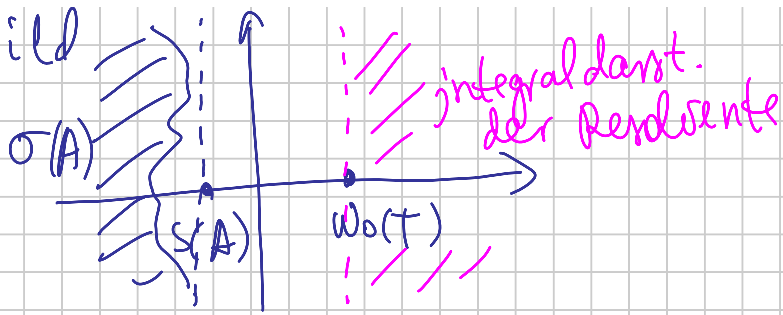
$$= \left[\underset{(n-1)\text{ mal}}{\text{part. integration}}\right] = \frac{M}{\cancel{(n-1)!}}\|x\| \cdot \frac{\cancel{(n-1)!}}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{n-1}} \underbrace{\int_0^\infty e^{(\omega-\operatorname{Re}\lambda)t}\,dt}_{\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda-\omega}}$$

$$= \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^n} \cdot \|x\| \qquad \blacksquare$$

Wir haben also das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & (T(t))_{t\geq 0} \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, "\text{für } \lambda \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda > \omega_0(T):\ R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt"] & \\
(A, D(A)) \arrow[ur, dashed, bend left] \arrow[rr, shift left, "R(\lambda,T) = (\lambda-A)^{-1}"] & & (R(\lambda,A))_{\lambda\in\rho(A)} \arrow[ll, shift left, "A = \lambda - R(\lambda,A)^{-1}"] \arrow[ul, bend right, "\text{fehlt}"']
\end{tikzcd}$$

und das Bild



<u>Frage:</u> Wie bestimmt man $D(A)$ in konkreten Beispielen?

Erinnere: man hat oft $(C, D(C))$ mit $D(A) \subset D(C)$ und $C|_{D(A)} = A$. Wie zeigt man $D(A) = D(C)$?

$\boxed{\text{Prop. 3.15}}$ Seien $(A, D(A))$, $(B, D(B))$ Operatoren auf X, X Banach, mit $\underline{A \subset B}$, d.h.,

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \\ B|_{D(A)} = A. \end{cases}$$

Ang., $\exists \lambda \in \mathbb{C}$: $(\lambda - A)$ surj und $(\lambda - B)$ inj. Dann gilt

$$D(A) = D(B), \text{ d.h., } A = B.$$

Dies ist insb. der Fall, wenn A, B abg. mit $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$.

<u>Beweis</u> z.z.: $D(B) \subset D(A)$

Sei $x \in D(B)$. Da $(\lambda - A)$ surj, $\exists y \in D(A)$ mit

$$\underbrace{(\lambda - A) y}_{(\lambda - B) y} = (\lambda - B) x.$$

Da $(\lambda - B)$ inj., muss $x = y \in D(A)$. ∎

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Multiplikator HG, Endversion)

Sei $X = C_0(\mathbb{R}),\ L^p(\mathbb{R})\ (1 \le p < \infty),\ C(K),\ L^p[0,1], \ldots$

$$T(t)f = e^{tq} f, \quad \sup_s \operatorname{Re} q(s) < \infty.$$

(siehe Bsp 3.4). Wir wissen:

$$D(A) \subset \{ f \in X : q \cdot f \in X \} =: D(B)$$

$$Af = q \cdot f \quad \forall f \in D(A).$$

Betr. B mit $Bf := q \cdot f$ auf $D(B)$

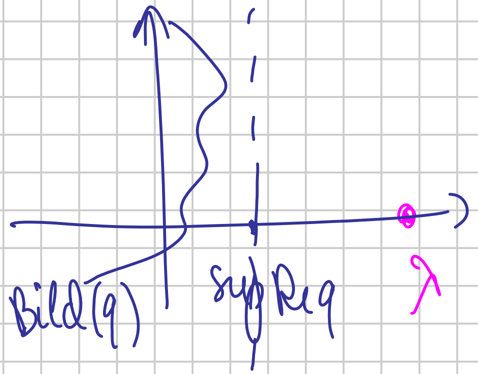
Wir zeigen: $(\sup \operatorname{Re} q, \infty) \subset \rho(B)$

Sei $\lambda >$ sup Re q und betr. R mit
reell

$$(Rf)(s) = \frac{1}{\lambda - q(s)} f(s).$$

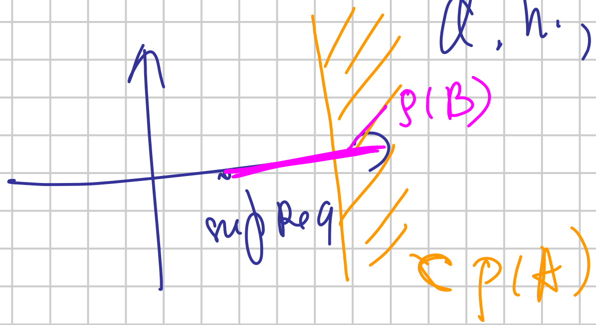
R ist ein beschr. Op.:

$$\|Rf\|_\infty \le \underbrace{\left\|\frac{1}{\lambda-q}\right\|_\infty}_{\frac{1}{\inf_s|\lambda-q(s)|} = \frac{1}{d(\lambda,\,\mathrm{Bild}\,q)} \le \frac{1}{\lambda-\sup\mathrm{Re}\,q}} \cdot \|f\|_\infty$$



und $(\lambda-B)R = I = R(\lambda-B)$,

d.h., $\lambda\in\rho(B)$ und $R(\lambda,B)=R$.



Da A ein Generator ist, $\exists$ ~~rechte~~ eine Halbebene $\subset\rho(A)$, d.h., $\rho(B)\cap\rho(A)\neq\emptyset$

$\xRightarrow{\text{Prop. 3.15}}$ $A=B$

Bem.: – Analog: TranslationsHG Ü

4. Generierungssätze

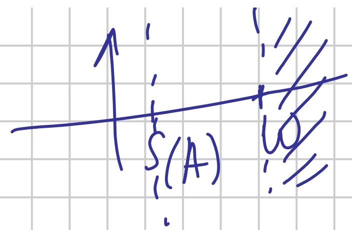
Frage: Wann ist $(A, D(A))$ ein Generator und wie kann man $T(\cdot)$ finden/zurückgewinnen?

Bem.: 1) Notwendige Bedingungen: A abg., dicht def., $s(A) < \infty$ und $\exists\, \omega > s(A)$:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \quad \forall \lambda \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda > \omega \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) Wenn $A \in \mathcal{L}(X)$, so ist

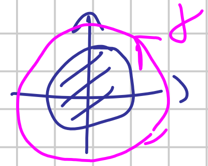
$$T(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x = e^{tA} x .$$



Die Formel hilft nicht, wenn $A \notin \mathcal{L}(X)$.

Dunfordsches Funktionalkalkül: (für $A \in \mathcal{L}(X)$)

$$T(t) = e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda$$



Man kann

so ein γ probieren,

Das integral kann aber divergieren. (Aber manchmal klappt das!)

Erinnere: Euler:

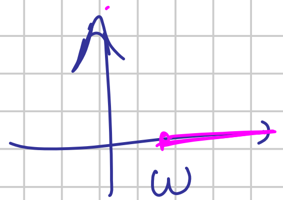
$$e^{ta} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{t}{n}a\right)^n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1-\frac{t}{n}a\right)^{-n}}_{\left[\frac{n}{t}\underbrace{\left(\frac{n}{t}-a\right)^{-1}}_{\text{Resolvente!}}\right]^n}$$

Idee: Probiere $T(t) := \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right]^n$

(Hille 1948)

Alternative Idee (Yosida 1948): „Approximiere" A mit $(A_n) \subset \mathcal{L}(X)$ und hoffe, dass $T(t) := \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}$ ex. und eine C_0-HG mit Generator A ist.

Lemma 4.1 Sei $(A, D(A))$ abg., dicht def. Ang., $\exists\, \omega \in \mathbb{R}$



$\exists\, M > 0$ mit $[\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und

$\| \lambda R(\lambda, A) \| \leq M \quad \forall \lambda \geq \omega.$

Dann gelten:

a) $\lambda R(\lambda, A) x \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} x \quad \forall x \in X$

b) $\lambda A R(\lambda, A) x = \lambda R(\lambda, A) A x \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} Ax \quad \forall x \in D(A)$

<u>Beweis</u> a) Sei $y \in D(A)$. Dann:

$$\lambda R(\lambda, A) y = \underbrace{R(\lambda, A)}_{\|\cdot\| \leq \frac{M}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0} A y + y \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} y$$

nach Voraus.

$D(A)$ ist dicht und $\lambda R(\lambda, A)$ ist beschr. in λ

$\Rightarrow \quad \lambda R(\lambda, A)x \to x \quad \forall x \in X.$

b) folgt aus a) für Ax statt x. $\blacksquare$

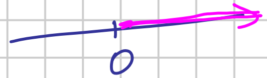
$\boxed{\text{Thm } 4.2}$ (Hille-Yosida, kontraktiver Fall)

Sei $(A, D(A))$ lin. Operator auf einem BR X. Es sind äquiv.:

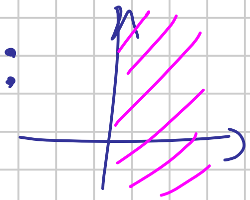
(i) $(A, D(A))$ erzeugt eine C_0-Kontraktions HG ($\|T(t)\| \leq 1 \;\; \forall t$)

(ii) $(A, D(A))$ abg., dicht def. und $\forall \lambda > 0$: $\lambda \in \rho(A)$ und

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$$



(iii) $(A, D(A))$ abg., d.d., $\forall \lambda$ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$:



gilt: $\lambda \in \rho(A)$ und

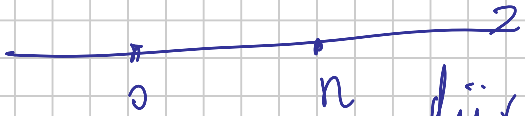
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}$$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (iii) Thm. 3.13 c) für $\omega = 0$, $M = 1$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) klar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Def. die Yosida-Approximation

$$A_n := n \cdot \underbrace{A\,R(n, A)}_{n R(n,A) - I} = n^2 R(n, A) - n\,I \in \mathcal{L}(X)$$



für $n \in \mathbb{N}$. Die Operatoren A_n sind beschr. und kommutieren. Def.

$$T_n(t) := e^{tA_n} \quad \forall t \geq 0.$$

Nach Lemma 4.1 gilt:

$$A_n x \longrightarrow Ax \quad \forall x \in D(A)$$

Wir zeigen:

1) $T(t)x := \lim\limits_{n\to\infty} T_n(t)x$ ex. $\forall x \in X, \forall t \geq 0$

2) $T(\cdot)$ ist eine C_0-KontraktionsHG

3) Der Generator von $T(\cdot)$ ist $(A, D(A))$.

1) $\forall\, T_n(t)$ ist kontr.:

$$\|T_n(t)\| = \|e^{tA_n}\| \leq e^{-nt}\, e^{\overbrace{\|n^2 R(n,A)\|}^{\leq n \text{ nach (ii)}}\cdot t}$$

$$\leq \cancel{e^{-nt}} \cdot \cancel{e^{nt}} = 1$$

Es reicht also, 1) für $\forall x \in D(A)$ zu zeigen.

Sei $x \in D(A)$ und $n, m \in \mathbb{N}$,

$$T_n(t)x - T_m(t)x = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(T_m(t-s)T_n(s)x\right) ds$$

gl. stetig HG und ∞-oft diff'bar

$$= \int_0^t T_m(t-s)T_n(s)\left(A_n x - A_m x\right) ds$$

Produktregel + $\dot{T}_n(t) = A_n T_n(t)$, alle A_n und $T_n(s)$ kommutieren

Also haben wir:

(*) $$\|T_n(t)x - T_m(t)x\| \leq t \cdot \|A_n x - A_m x\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

gleichmäßig in $t \in [0, t_0]$ $\forall t_0$.

(da $A_n x \to Ax$ $\forall x \in D(A)$)

Da X Banach,

$\exists \lim_{n\to\infty} T_n(t)x \quad \forall x \in D(A)$ gleichm. in $t \in [0, t_0]$ $\forall t_0$.

2) $(T(t))$ erfüllt:

- $T(0)x = \lim_{n\to\infty} \underbrace{T_n(0)}_{I}x = x \quad \forall x$
- $\|T(t)x\| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|T_n(t)x\|}_{\leq \|x\|} \leq \|x\| \quad \forall x$,

  d.h., $\|T(t)\| \leq 1 \quad \forall t$.

- HG-Gesetz:

  ii $\underbrace{T_n(t)T_n(s)x}_{T(t)T(s)x} = \underbrace{T_n(t+s)x}_{T(t+s)x}$

- Starke Stetigkeit:

$\forall x \in D(A)$ $\forall t_0 > 0$ ist

$$\begin{cases} t \longmapsto T(t)x \\ [0,t_0] \longrightarrow X \end{cases}$$

stetig als gleichm. Limes stet. Fkt'en $t \mapsto T_n(t)x$.

Da $D(A)$ dicht und $\|T(t)\| \leq 1$ $\forall t$, ist $T(\cdot)$ eine C_0-HG.

3 Sei $(B, D(B))$ der Generator von $T(\cdot)$. Zz: $B = A$.

Sei $x \in D(A)$ und $t_0 > 0$. Die Fkt

$f_n : t \mapsto T_n(t)x$

konv. gleichm. gegen $t \longmapsto T(t)x$ auf $[0, t_0]$ (siehe (*))
und die Ableitungen

$$f_n' : t \longmapsto T_n(t) A_n x$$

konv. gleichm. gegen $t \mapsto T(t)Ax$ (Warum?)
Also ist $t \mapsto T(t)x$ diff'bar mit Abl. $t \mapsto T(t)Ax$
insbes. ist die Abl. in $t=0$ gleich Ax

Wir haben gezeigt: $D(A) \subset D(B)$, $Ax = Bx$ auf $D(A)$.
Sei $\lambda > 0$. Nach Vorauss. ist $\lambda \in \rho(A)$, aber auch $\lambda \in \rho(B)$
nach Thm. 3.13 b) für $\omega = 0$, $M = 1$. Also ist $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$

$\Rightarrow D(B) = D(A)$, also $A = B$. $\blacksquare$

Bem. Wenn $\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$, dann ist $S(\cdot)$ mit

$$S(t) := e^{-\omega t} T(t)$$

eine C_0-KontraktionsHG mit Generator $B = A - \omega$.

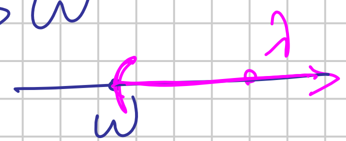
Also bekommen wir:

$\boxed{\text{Korollar 4.3}}$ Sei $\omega \in \mathbb{R}$, $(A, D(A))$ lin. auf X, X Banach.

Es sind äquiv.:

(i) $A \rightsquigarrow T(\cdot)$ mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$.

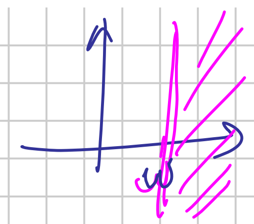
(ii) $(A, D(A))$ abg., dicht def., und $\forall \lambda > \omega$



$\lambda \in \rho(A)$ und

$$\|(\lambda - \omega) \cdot R(\lambda, A)\| \leq 1$$

(iii) $(A, D(A))$ abg., d.d., $\forall \lambda$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ $\lambda \in \rho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$



Bem. Solche HG (mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ $\forall t$) heißen quasikontr.

Thm 4.4 (Hille-Yosida (-Feller-Miyadera-Phillips), der allgemeine Fall)

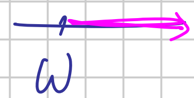
Seien $(A, D(A))$ lin. auf X, X Banach, $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$.

Es sind äquiv.:

(i) $A \rightsquigarrow T(\cdot)$ mit $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ $\forall t \geq 0$

(ii) $(A, D(A))$ abg., d.d., und $\forall \lambda > \omega$: $\lambda \in \rho(A)$ und

$$\left\| \left[(\lambda - \omega) R(\lambda, A) \right]^n \right\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



(iii) $(A, D(A))$ abg., d.d., und $\forall \lambda$ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega$:
$\lambda \in \rho(A)$ und

$$\| R(\lambda, A)^n \| \le \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (iii) Korollar 3.14.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) klar

(ii) $\Rightarrow$ (i) OBdA (sonst: Reskalierung): $\omega = 0$, d.h.,
$(0, \infty) \subset \rho(A)$ und $\| \lambda^n R(\lambda, A)^n \| \le M$, $\forall \lambda > 0$
$\forall n \in \mathbb{N}$.

Def. eine neue Norm auf X für $\forall \mu > 0$:

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\|$$

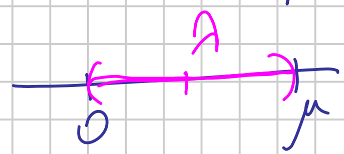
- $\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$, d.h., $\|\cdot\|_\mu$ ist eine äquiv. Norm.

  nimm $n=0$

- $\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leq 1 \quad \forall \mu > 0$.

  (da $\sup_{n \geq 1} \leq \sup_{n \geq 0}$)

- Wir zeigen: $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1 \quad \forall \lambda \in (0, \mu)$



Die Resolventengl. impliziert:

$$y := R(\lambda, A)x = R(\mu, A)x + (\mu - \lambda) R(\mu, A) y$$
$$= R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda) y).$$

Damit gilt:

$$\cancel{\|y\|_\mu} \underset{*}{\le} \frac{1}{\mu}\cdot\|x\|_\mu + \frac{\cancel{\mu}-\lambda}{\mu}\cdot\|y\|_\mu$$

$*$ da $\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \le 1$

$\lambda\|y\|_\mu \le \|x\|_\mu$, d.h., $\lambda\|R(\lambda, A)x\|_\mu \le \|x\|_\mu \;\forall x$,

also: $\lambda\|R(\lambda, A)\|_\mu \le 1$.

Wir wollen aber $\|\cdot\| \le 1 \;\forall\lambda$, nicht nur für $\lambda\in(0,\mu)$.

Def.

$$|||x||| := \sup_{\mu>0} \|x\|_\mu.$$

Wir haben:

- $\|x\| \le |||x||| \le M\|x\|$
- $|||\cdot|||$ ist eine Norm (äquiv. Norm!)

- $|||\lambda R(\lambda, A)||| \le 1 \quad \forall \lambda > 0.$ (Warum?)

Nach Hille-Yosida (kontr. Fall, 4.2) erzeugt $(A, D(A))$ eine C_0-HG $T(\cdot)$ mit $|||T(t)||| \le 1$, also:

$$\|T(t)x\| \le |||T(t)x||| \underset{\text{kontr.}}{\le} |||x||| \le M \cdot \|x\| \quad \forall x \in X,$$

d.h., $\|T(t)\| \le M \quad \forall t > 0.$ $\blacksquare$

<u>Bem.</u> 1) Man kann (ii) noch schwächer machen: Es reicht:

$$\exists (t_k) \subset (\omega, \infty),\ t_k \to \infty : \forall t_k \in \rho(A),$$

$$\|R(t_k, A)^n\| \le \frac{M}{(t_k - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall k.$$

(Im kontr. Fall schon!)

2) Für die Bedingung $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}$ braucht man alle $\|R(\lambda, A)^n\|$ zu kennen, also ist sie schwierig nachzuprüfen.

3) $\forall$ beschr. HG $T(\cdot)$ $\exists$ äquiv. Norm auf X s.d. $T(\cdot)$ kontraktiv wird:

$$|||x||| := \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\| \qquad \text{Ü}$$

Dafür braucht man aber $T(\cdot)$ zu kennen.

5. Analytische (oder: holomorphe) Halbgruppen

__Frage:__ Finde eine Klasse von HG'en bzw. Generatoren (größer als $\mathcal{L}(X)$), wo man eine explizite Formel für $T(\cdot)$ mit Hilfe von $R(\lambda, A)$ hat:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{normstetige HG} \\ \text{(beschr. } A\text{)}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{c}\text{analytische} \\ \text{HG'en}\end{array}\right\} \subset \{C_0\text{-HG}\}$$