Notiztitel 18.04.2018

c) $\boxed{\operatorname{Ker} T' = \{ \varphi \in X' : \varphi|_{\operatorname{Bild} T} = 0 \}}$.

Genauso gilt: Für Hilberträume

$$\boxed{\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Bild} T)^\perp}$$

<u>Bew.</u> $y \in \operatorname{Ker} T^* \Leftrightarrow T^* y = 0 \Leftrightarrow \langle x, T^* y \rangle = 0 \ \forall x \in X$

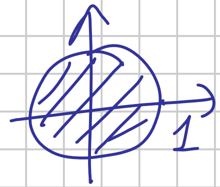
$\Leftrightarrow \langle Tx, y \rangle = 0 \ \forall x$

$\Leftrightarrow y \perp \operatorname{Bild} T$. ■

$\boxed{\text{Bsp}}$ Rechtsshift auf ℓ^2:

$$(t_1, t_2, \ldots) \longmapsto (0, t_1, t_2, \ldots)$$

Satz: $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ = R Linksshift!



Ü $P\sigma(T) = \emptyset$

$\boxed{\text{Thm } 1.12}$ (Spektraler Abbildungssatz für Resolvente)

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt $\forall \lambda \in \rho(T)$

$$\sigma(R(\lambda, T)) = \frac{1}{\lambda - \sigma(T)}$$

$$:= \left\{ \frac{1}{\lambda - z},\ z \in \sigma(T) \right\}$$

Beweis Schritt 1: Z.z.: OBdA $\lambda = 0$, d.h.,

$$\sigma(S^{-1}) = \frac{1}{\sigma(S)}.$$

Def. $S := \lambda - T$. Dann:

- $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1} = S^{-1}$
- $\mu \in \sigma(T) \iff \mu - T$ nicht inv.

$\iff (\mu - \lambda) + \underbrace{(\lambda - T)}_{S}$ nicht inv.

$\iff \lambda - \mu \in \sigma(S)$

D.h.,
$$\frac{1}{\lambda - \sigma(T)} = \frac{1}{\sigma(S)}$$

<u>Schritt 2</u> zz: S inv. $\Rightarrow \sigma(S^{-1}) = \frac{1}{\sigma(S)}$.

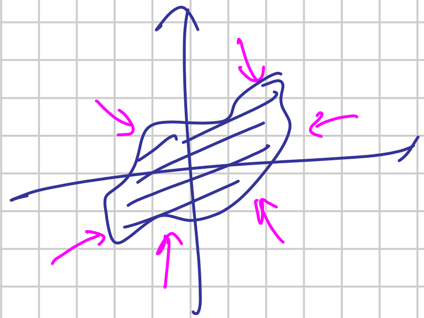
Beobachtung: $\mu - S^{-1} = \mu\Big(\underbrace{S - \frac{1}{\mu}\Big) S^{-1}}_{\text{invert.}}$

D.h., $\mu - S^{-1}$ inv. $\iff$ $\frac{1}{\mu} - S$ inv.

$\mu \in \sigma(S^{-1}) \iff \frac{1}{\mu} \in \sigma(S)$ ∎

$\boxed{\text{Folgerung 1.13}}$ Für $\lambda \in \rho(T)$ gilt:

$$\|R(\lambda, T)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}.$$



Insbesondere gilt:

$$\|R(\lambda, T)\| \xrightarrow[\lambda \to \sigma(T)]{} \infty$$

Beweis

$$\|R(\lambda,T)\| \geq r(R(\lambda,T))$$
$$= \max\{|\mu| : \mu \in \sigma(R(\lambda,T))\}$$
Satz 2.12
$$= \frac{1}{\min\{|\lambda - z| : z \in \sigma(T)\}} = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$$
$\blacksquare$

2. Einteilung des Spektrums

$\boxed{\text{Def. 2.1}}$ Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ Banach. Def. das approximative Punktspektrum

„approx. Eigenvektoren“

$$A\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X \text{ mit } \|x_n\| = 1 \ \forall n \text{ s.d. } \|\lambda x_n - Tx_n\| \longrightarrow 0\}$$

und das <u>Residualspektrum</u>

$$R\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Bild}(\lambda - T) \text{ nicht dicht in } X\}$$

$\boxed{\text{Prop. 2.2}}$ Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Es sind äquiv.:

(i) $\lambda \notin A\sigma(T)$

(ii) $\lambda - T$ ist inj und Bild$(\lambda - T)$ abg.

(iii) $\lambda - T$ ist von unten beschränkt, d.h., $\exists\, C > 0$:

$$\|(\lambda - T)x\| \geq C\|x\| \quad \forall x.$$

Insbesondere gilt

$$A\sigma(T) = P\sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Bild}(\lambda - T) \text{ nicht abg.}\}$$

<u>Beweis</u>

OBdA $\lambda = 0$ (sonst setze $S := \lambda - T$)

(i) $\Rightarrow$ (iii) Ang., T ist nicht von unten beschr., d.h.,

$\forall n \; \exists x_n \neq 0$: $\|Tx_n\| < \frac{\|x_n\|}{n}$

notwendigerweise

Def $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Dann gilt:

- $\|y_n\| = 1 \; \forall n$
- $\|Ty_n\| < \frac{\|y_n\|}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

D.h., $0 \in A\sigma(T)$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Ang., T von unten beschr.

Dann ist T inj und Bild T abg. nach Bem. 1.11. a)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $Y := \text{Bild}\, T$ abg. Wir haben:

$T: X \to Y$ ist bij., stetig, Y BR

Satz vom stetigen Inversen: $\exists\, S: Y \to X$ stetig

mit $ST = I_X$, $TS = I_Y$.

Also gilt $\forall x \in X$ mit $\|x\| = 1$

$$1 = \|x\| = \|\underbrace{ST}_{I}x\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\|,$$

d.h., $\|Tx\| \geq \frac{1}{\|S\|}$ $\quad \forall x$ mit $\|x\| = 1$

$\Rightarrow 0 \notin A_\sigma(T)$. ∎

$\boxed{\text{Folgerung 2.3}}$ Es gilt:

$$\boxed{\sigma(T) = A\sigma(T) \cup R\sigma(T)}$$

(Achtung: keine disj. Vereinigung i. A.)

__Bew.__ $\lambda \in \sigma(T) \iff (\lambda - T)$ nicht bij

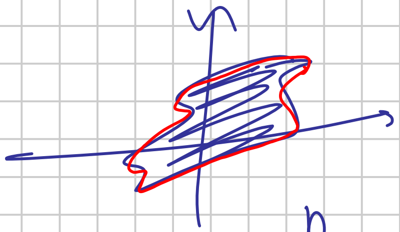
$\iff (\lambda - T)$ nicht inj oder nicht surj

Bild$(\lambda - T)$ nicht dicht oder nicht abg.

$\overset{\text{Prop. 2.2.}}{\iff} \lambda \in A\sigma(T)$ oder $\lambda \in R\sigma(T)$ ∎

Bsp $T = I$: $\sigma = \{1\} = A\sigma = P\sigma = R\sigma$ (Zerlegung nicht disjunkt)

Satz 2.4 Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ und sei $\partial\sigma(T)$ der top. Rand von $\sigma(T)$ in $\mathbb{C}$. Dann gilt:



$$\partial\sigma(T) \subset A\sigma(T).$$

insbesondere ist $A\sigma(T) \neq \emptyset$.

<u>Beweis</u> Sei $\lambda \in \partial\sigma(T)$ und sei $(\lambda_n) \subset \rho(T)$ mit
$$\lambda_n \longrightarrow \lambda.$$

Nach Folgerung 1.13:
$$\|R(\lambda_n, T)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda_n, \sigma(T))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

$\forall n \; \exists x_n$ mit $\|x_n\| = 1$ s.d.
$$\|R(\lambda_n, T)x_n\| \geq \|R(\lambda_n, T)\| - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Def. $y_n := \dfrac{R(\lambda_n, T)x_n}{\|R(\lambda_n, T)x_n\|}$. Dann gilt:

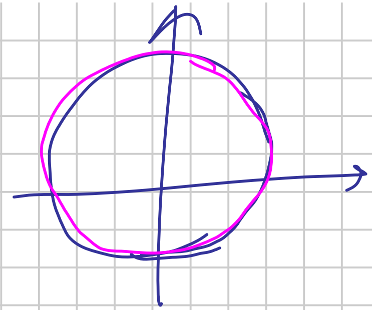
- $\|y_n\| = 1 \quad \forall n$
- $$(\lambda - T)y_n = (\lambda-\lambda_n)y_n + (\lambda_n - T)y_n = \underbrace{(\lambda-\lambda_n)}_{\to 0}\underbrace{y_n}_{\|\cdot\|=1} + \frac{\overbrace{x_n}^{\|\cdot\|=1}}{\underbrace{\|R(\lambda_n,T)x_n\|}_{\to\infty}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

„insbesondere": $\partial\sigma(T) \neq \emptyset$, da $\sigma(T) \neq \emptyset$ und $\neq \mathbb{C}$. ∎

Bsp:

$\boxed{\text{Prop. 2.5}}$ (Spektrum von Isometrien)
Seien X Banach und $T \in \mathcal{L}(X)$ eine Isometrie, d.h.,
$$\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x.$$
Dann gelten:

(a) $A_\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ – Einheitskreis

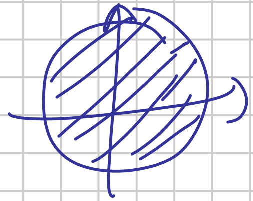


(b) Wenn T invert. ist, so gilt

$$\sigma(T) \subset \mathbb{T}$$

(c) Wenn T nicht invert.,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$$



Insbesondere gilt

$$R\sigma(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$$

(d) In (b) kann $\forall K \subset \mathbb{T}$ abg. als $\sigma(T)$ $(= A_\sigma(T))$ vorkommen.

<u>Beweis</u>

(a) Sei $\lambda \in A_\sigma(T)$. Dann $\exists (x_n)$ mit $\|x_n\| = 1$!

$$\Big|\,|\lambda|\underbrace{\|x_n\|}_{=1} - \underbrace{\|Tx_n\|}_{=1}\Big| \leq \|\lambda x_n - Tx_n\| \longrightarrow 0$$

(da T isom.) umgek. Δ-Ungl.

$$\| \lambda| - 1|$$

D.h., $|\lambda| - 1 = 0$, also: $\lambda \in \mathbb{T}$.

(b) Ang., $0 \in \rho(T)$

Nach a) gilt $\partial\sigma(T) \subset \mathbb{T}$, d.h.,

$\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \rho(T)$ oder $\underbrace{\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T)}_{\text{ausgeschlossen, da } 0 \in \rho(T)}$

Da $\|T\| = 1$, gilt also $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

(c) Analog zu (b) gilt

$\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T)$.

Da $\|T\| = 1$ und $\sigma(T)$ abg., gilt

$$\sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}.$$

(d) Sei $K \subset \mathbb{T}$ komp. Sei $(a_n) \subset K$ dicht.

Def. auf ℓ^2

$$M(t_1, t_2, \ldots) := (a_1 t_1, a_2 t_2, \ldots)$$

Isometrie: $\|Mx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j t_j|^2 \overset{|a_j|=1}{=} \|x\|^2$.

Es gilt: $\sigma(M) = \overline{\{a_n, n \in \mathbb{N}\}}$ (siehe früher)

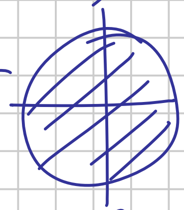
$= K$.

(Oder nimm $C(K)$ und M_z). ∎

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = \ell^\infty, \ell^p, c_0, c, \dots$

$T = \to$ $\quad T(t_1, t_2, \dots) = (0, t_1, t_2, \dots)$

Isometrie: klar ; T nicht surj $\Rightarrow$ nicht inv.

$\Rightarrow \sigma(T) =$  (Satz oben, (c)).

Außerdem (Satz oben, (a)): $A\sigma(T) \neq \mathbb{T}$

$\subset$ $\supset$ $\mathbb{T} \overset{(a)}{=} \partial\sigma(T)$

Daraus folgt: $R\sigma(T) \supset \{\lambda : |\lambda| < 1\}$.

Behauptung: $P\sigma(T) = \emptyset$!

$Tx = \lambda x$: $\quad 0 = \lambda t_1$
$t_1 = \lambda t_2 \dots$

Fall 1: $\lambda = 0 \Rightarrow t_1 = 0$
$t_2 = 0 \dots$

Fall 2 $\lambda \neq 0$: $t_1 = 0 = t_2 \dots$

$\Rightarrow x = 0$ $\blacksquare$

Bsp vom appr. EV:

$\lambda = 1$ $X = \ell^\infty$ Finde (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - Tx_n\| \to 0$.

Betrachte $x_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1, 1, \dots\right)$

$Tx_n = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1, \dots\right)$

$$\|x_n - Tx_n\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ü $X = \ell^p, c_0, c, \quad \lambda \in \mathbb{T}$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = \ell^\infty, \ell^p, c_0, c$.

$$T(t_1, t_2, \dots) := (0, t_1, 0, t_2, 0, t_3, \dots)$$

– dasselbe $\sigma(T)$, $A\sigma(T)$, $P\sigma(T)$.

sei $T \in \mathcal{L}(X)$, X Banach,

Bem.: (a) $A\sigma(T)$ ist immer abg.

(b) $P\sigma(T') = R\sigma(T)$ und, wenn X Hilbert,

$$P\sigma(T^*) = \overline{R\sigma(T)}$$

$$R\sigma(T^*) = \overline{P\sigma(T)}$$

komplexe konj.?

Beweis: Ü

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = \ell^2$, $T \rightarrow$, $T^* \leftarrow$

$$R\sigma(\rightarrow) = \overline{P\sigma(\leftarrow)} \overset{?}{=} \{\lambda : |\lambda| < 1\}$$

Früher: $A\sigma(\rightarrow) = \mathbb{T}$, d.h., $A\sigma$ und $R\sigma$ hier disjunkt

$$R\sigma(\leftarrow) = \overline{P\sigma(\rightarrow)}^{?} = \emptyset$$

Genauso für $X = \ell^p$, $p \in [1, \infty)$ (da $(\ell^p)' = \ell^q$)

und für $X = c_0$ (da $c_0' = \ell^1$).

Für Isometrien auf Hilberträumen gilt zusätzlich:

$\boxed{\text{Prop. 2.6}}$ Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ eine Isometrie. Dann sind (Hilbert)

je 2 EV zu verschiedenen EW orthogonal.

Beweis Seien x, y: $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, $\lambda \neq \mu$.

Wir wissen: $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ (da T isom.: $\|Tx\| = \|x\|$, $\|Ty\| = \|y\|$)

Es gilt: $\langle x,y\rangle \overset{T \text{ isom.}}{=} \langle Tx, Ty\rangle = \langle \lambda x, \mu y\rangle = \lambda \cdot \overline{\mu} \langle x,y\rangle.$

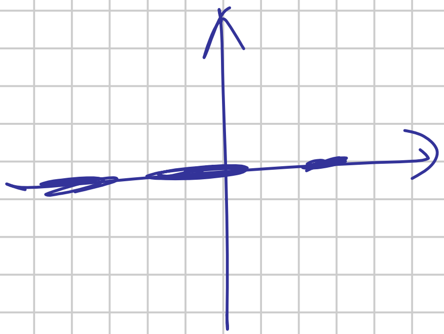
T isom. (Warum?)

$\frac{\lambda}{\mu} \neq 1$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle = 0$

$\boxed{\text{Thm 2.7}}$ (Spektrum von s.a. Operatoren)

Seien H Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ s.a.

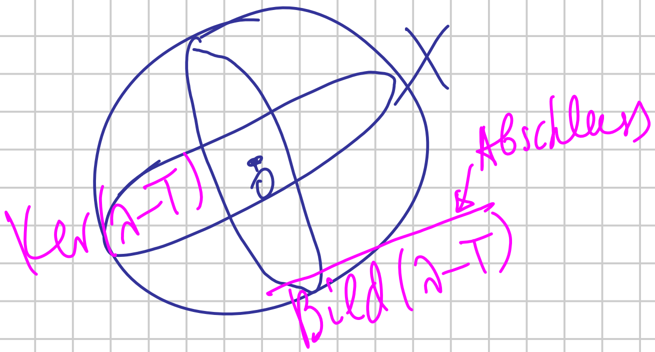


(a) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $\sigma(T) = A_\sigma(T)$.

(b) $P_\sigma(T) = R_\sigma(T)$ und

$\operatorname{Ker}(\lambda - T) = (\operatorname{Bild}(\lambda - T))^\perp.$

Insbesondere gilt:



$\lambda - T$ bij $\Leftrightarrow$ surj.

<u>Bem.</u> Erinnere (WS, Sekt. 3.5):

- $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. $Tx = \lambda x$

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$$
$$\lambda \cdot \|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2$$
$$x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

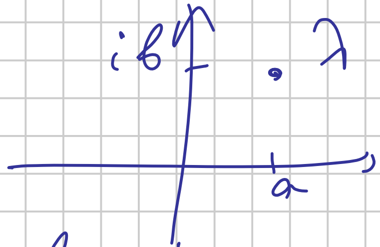
- EV zu verschiedenen EW sind $\perp$.

$Tx = \lambda x$
$Ty = \mu y$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$
$$\lambda \cdot \langle x, y\rangle = \bar{\mu} \cdot \langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0.$

- $r(T) \overset{T \text{ normal}}{=} \|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$



<u>Beweis (von 2.7)</u>

(a) Sei $\lambda = a + i\cdot b,\ b \neq 0$

Wir zeigen: $\lambda - T$ ist von unten beschränkt

(Dann gilt: $\lambda \notin A\sigma(T)$ – siehe Prop. 2.2

$\Rightarrow \lambda \notin \partial\sigma(T)$. Da $\sigma(T)$ beschr. ist,

gilt $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset \rho(T)$).

$$\|(\lambda - T)x\|^2 = \langle [(a-T)+ib]x, [(a-T)+ib]x \rangle$$

$$= \|(a-T)x\|^2 + \cancel{i \cdot b \langle x, (a-T)x\rangle + \underbrace{\bar{i}}_{=-i} \cdot b \cdot \underbrace{\langle (a-T)x, x\rangle}_{\langle x, (a-T)x\rangle}}$$
$$+ |b|^2 \|x\|^2$$
$$\geq |b|^2 \cdot \|x\|^2.$$

Also ist $\|(\lambda-T)x\| \geq |b| \, \|x\|$, d.h., $\lambda - T$ von unten beschr.

„Insbesondere" folgt aus $\sigma(T) = \partial\sigma(T)$ (in $\mathbb{C}$).

(b) Wir wissen (Bem. 1.11):

$$\operatorname{Ker}(\lambda-T)^* = (\operatorname{Bild}(\lambda-T))^\perp$$

Aber: $(\lambda-T)^* = \bar{\lambda} - T^* \overset{\uparrow}{=} \lambda - T$

λ reell und T s.a.

(sonst klar)

$\Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(\lambda - T) = (\mathrm{Bild}(\lambda - T))^\perp$

insb.: • $P\sigma(T) = R\sigma(T)$

• $\lambda - T$ surj $\Rightarrow$ inj. ∎

Bemerkung 2.8 (Weitere/alternative Einteilung des Spektrums)

Oft benutzt man auch:

$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T)$ inj, nicht surj, mit dichtem Bild$\}$

stetiges Spektrum

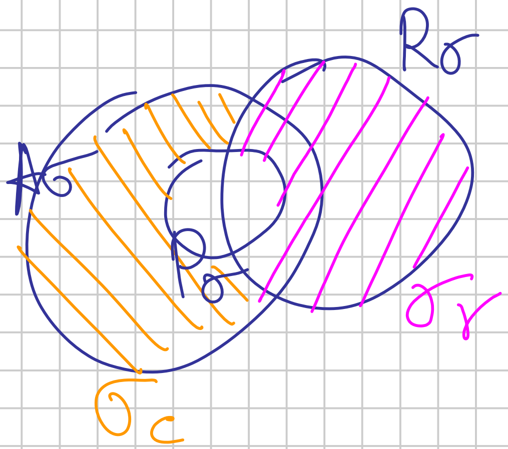
und $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T)$ inj, ohne dichtes Bild$\}$

Restspektum

Dann hat man:

- eine <u>disjunkte</u> Zerlegung
$$\sigma(T) = P_\sigma(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

- $$\sigma_r(T) = R_\sigma(T) \setminus P_\sigma(T)$$
$$\sigma_c(T) = A_\sigma(T) \setminus (P_\sigma(T) \cup R_\sigma(T))$$



Prop. 2.2: $\lambda \in A_\sigma(T) \Longleftrightarrow \lambda - T$ nicht inj oder Bild nicht abg

D.h., $\lambda \in A_\sigma(T) \setminus P_\sigma(T) \Longleftrightarrow \lambda - T$ inj und Bild nicht abg.

Also: $\lambda \in A_\sigma(T) \setminus (P_\sigma(T) \cup R_\sigma(T))$
$\Longleftrightarrow (\lambda - T)$ inj, Bild dicht, aber nicht abg.

$\boxed{\text{Bsp}}$ T s.a. $\Rightarrow P_\sigma = R_\sigma$, d.h., $\sigma_r = \emptyset$ und man hat $\sigma(T) = P_\sigma(T) \dot{\cup} \sigma_c(T)$

3. Spektrum von kompakten Operatoren auf Banachräumen:

Theorie von Riesz

Personen:

- Frigyes Riesz (1880–1956)
- Erik Ivar Fredholm (1866–1927)

- Juliusz Schauder (1899–1943)

Sei X Banach. Erinnerung (WS)

- T heißt kompakt, wenn $T(\underbrace{B_X}_{=\{x\in X : \|x\|\le 1\}})$ rel. kompakt, d.h., $\overline{T(B_X)}$ komp.
  $\iff \forall$ beschr. Folge $(x_n)\subset X$ $\exists (n_k)$: (Tx_{n_k}) konv. (Sektion 2.2 WS)
- $\mathcal{K}(X)$ ist ein Ideal in $\mathcal{L}(X)$, d.h., T komp., S beschr. $\Rightarrow$ TS und ST komp.
- I komp. $\iff \dim X < \infty$

- T komp. $\iff T' \in \mathcal{L}(X')$ komp. (Satz von Schauder, Bsp. 2.11 im WS)
- H Hilbert, T komp. + s.a.
  $\Rightarrow \exists$ ONS $(e_n)_{n \in I}$ mit
  endlich / abz.

$$Tx = \sum_{n \in I} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

(d.h., $\exists$ ONB aus EV von T)

Aber: X Banach (oder T nicht s.a.)

$\Rightarrow P\sigma(T) = \emptyset$ möglich.

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Volterra-Operator)

$X = C[0,1]$, $(Vf)(s) := \int_0^s f(t)\,dt$

- $P\sigma(V) = \emptyset$:

sei $(Vf)(s) = \int_0^s f(t)\,dt = \lambda \cdot f(s) \quad \forall s$

Fall 1: $\lambda = 0$: $\int_0^s f = 0 \ \forall s \ \overset{(\,)'}{\Rightarrow} f(s) = 0 \ \forall s$

Fall 2: $\lambda \neq 0$: f diff'bar und

$\begin{cases} f(s) = \lambda \cdot f'(s) \quad \forall s \\ f(0) = 0 \end{cases}$ $\iff f(s) = C \cdot e^{\frac{1}{\lambda} s}$

$f(0) = 0$: $C = 0$,

also $f \equiv 0$.

- V ist kompakt

Satz von Arzelà–Ascoli (Sekt. 1.6 WS):

z.z.: $V(B_X)$ ist beschr. und gleichgradig stetig

<u>Beschr.</u>: $\|f\|_\infty \le 1 \Rightarrow \|Vf\|_\infty \le 1$

<u>Gleichgr. stet.</u>: z.z.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall f \in B_X$

$\forall s,t: \left(|s-t| < \delta \Rightarrow \underbrace{|(Vf)(s) - (Vf)(t)|}_{= \left|\int_t^s f\right| \le |s-t| \cdot \underbrace{\|f\|_\infty}_{\le 1} \le |s-t|} < \varepsilon \right)$

d.h., $\varepsilon := \delta$ passt.

<u>Bem.</u> Auch folgende Integralop. sind komp.:

1) $(Tf)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t)\,dt$

2) $(Tf)(s) = \int_0^s K(s,t) f(t)\,dt$

Fredholm-Operatoren vom Typ 1 bzw. 2.

Ü für eine gegebene (stetige) Fkt $K(\cdot,\cdot) : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$.

<u>Frage</u> Wie sieht $\sigma(T)$ für $T \in \mathcal{K}(X)$ aus?

komp. Op.

Wir interessieren uns also für $\lambda - T$, T komp.

$\boxed{\text{Satz 3.1}}$ (<u>Riesz-Schauder</u>)

Seien X Banach, $T \in \mathcal{K}(X)$ und $S := I - T$.

Dann gelten:

(a) $\dim \operatorname{Ker} S < \infty$

(b) $\operatorname{Bild} S$ ist abg. und $\dim (X / \operatorname{Bild} S) < \infty$,

(c) $\dim(\operatorname{Ker} S) = \dim (X / \operatorname{Bild} S) = \dim(\operatorname{Ker} S') =$
$= \dim (X' / \operatorname{Bild} S')$

Insbesondere gilt:

$$\boxed{S \text{ inj} \Leftrightarrow \text{surj} \Leftrightarrow \text{bij}.}$$

<u>Bem.</u> 1) Um <u>Existenz</u> einer Lösung von $Sx = y$ $\forall y$

zu sichern, reicht es also, Eindeutigkeit von $Sx = 0$ zu prüfen, was viel leichter ist.

2) Operatoren S mit Eigenschaften (a)+(b) heißen **Fredholmoperatoren** und die Zahl

$$\operatorname{ind}(S) := \dim(\operatorname{Ker} S) - \dim(X / \operatorname{Bild} S)$$

heißt **Index** von S.

D.h., $\operatorname{ind}(\underbrace{1-T}_{\text{komp}}) = 0$

Beweis von (a) und (b)

(a) Es gilt:

$\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker}(1-T)$ ist abg., T-inv. lin. TR von X

$Tx = x \Rightarrow T(Tx) = Tx$

d.h., $Tx \in \operatorname{Ker}(1-T)$

Betrachte $T|_{\ker S}$ – kompakt (Warum?)

Aber: $\forall x \in \ker S$ $\quad Tx = x$, d.h., $T|_{\ker S} = I$.

Also muss $\dim(\ker S) < \infty$.

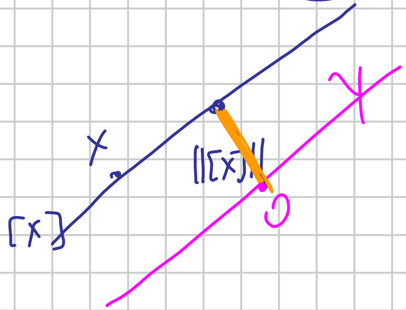
(b) <u>Teil 1: Bild S abg.</u>

Wir zeigen: Bild S isom. zu einem BR.

Ü Sei $Y \subset X$ abg. lin. TR. Dann ist der Quotient

$$X / Y$$

auch ein BR bzgl. $\|[x]\| := \inf\limits_{y \in Y} \|x + y\|$



Betrachte den induzierten Operator $\hat{S}: \underbrace{X/\mathrm{Ker}\, S}_{\text{abg. lin. TR}} \to \mathrm{Bild}\, S$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "{[\cdot]}"'] & \mathrm{Bild}\, S \\ X/\mathrm{Ker}\, S \arrow[ur, "\hat{S}"'] & \end{tikzcd}$$

mit $\hat{S}([x]) := Sx$