z.z.: $r(T) \geq r$, wobei $r = \inf \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$,

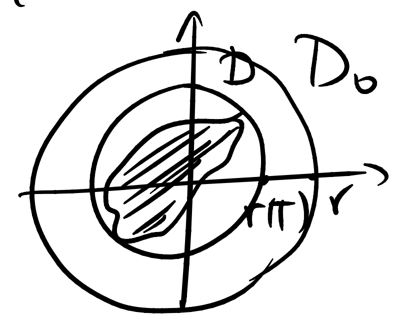
d.h., $\exists\, \lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| \geq r$.

Ang., es wäre nicht so, d.h., $r(T) < r$

Sei $\varphi \in (\mathcal{L}(X))'$ und betrachte

$$f(\lambda) := \varphi(R(\lambda, T)),$$

$$f : \underbrace{\{\lambda : |\lambda| > r(T)\}}_{=:D} \longrightarrow \mathbb{C}$$



Wir wissen:

- f ist holom. auf D (siehe 1.4)
- Auf $D_0 := \{\lambda : |\lambda| > r\}$ konv.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$ (siehe $(*)$ in Teil 1)

und damit

$$f(\lambda) \underset{\text{Neum. Reihe}}{=} \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right) \underset{\varphi \in (\mathcal{L}(X))'}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(T^n)}{\lambda^{n+1}}$$

Laurentreihe!

Erinnere: Funktionentheorie:

f holom. in einem Ring (insb. in D) $\Rightarrow$ f ist dort überall durch eine Laurentreihe gegeben (dieselbe wie in D_0!)

D.h., $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(T^n)}{\lambda^{n+1}}$ gilt auf ganz D,

insb. die Reihe konv. auf ganz D.

Nimm $\mu \in D \setminus D_0$, d.h., $r(T) < |\mu| < r$.

Wir wissen: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(T^n)}{\mu^{n+1}}$ konv.

$$\Rightarrow \frac{\varphi(T^n)}{\mu^{n+1}} = \varphi\left(\frac{T^n}{\mu^{n+1}}\right)$$ ist beschr. in n

für alle φ

Prinzip der gleichm. Beschränktheit (FA 1):

$\exists\, C > 0$: $\left\|\frac{T^n}{\mu^{n+1}}\right\| \leq C \quad \forall\, n$,

$\exists C>0: \quad \left\|\frac{T^n}{\mu^{n+1}}\right\| \le C \quad \forall n$,

d.h., $(\|T^n\|)^{1/n} \le (C|\mu|\,|\mu|^n)^{1/n} = (C|\mu|)^{\frac{1}{n}} \cdot |\mu|$

$n \to \infty$: $\quad r \le |\mu|$ ↯ $\blacksquare$

Bem. Leider ist die Formel

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (= \inf \ldots)$$

oft schwierig nachzuprüfen (eine der Ausnahmen: T nilpotent $\Rightarrow r(T)=0 \Rightarrow \sigma(T)=\{0\}$)

Aber andersrum: Information über $r(T)$ liefert Information über $(T^n)_{n=1}^{\infty}$.

z.B.: Wenn $r(T)<1 \Rightarrow \|T^n\| \to 0$ exponentiell schnell

Prop. 1.9 Sei H Hilbert und $T \in \mathcal{L}(H)$ normal, d.h., $T^*T = TT^*$. Dann gilt

$$r(T) = \|T\|$$

Insbesondere impliziert $\sigma(T)=\{0\}$, dass $T=0$.

Bem. 1) T s.a. oder T unitär $\Rightarrow$ T normal

2) „insbesondere" falsch i.A. (auch $r(T) \neq \|T\|$ i.A.)

z.B. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beweis Schritt 1 Zeige:

$$S \text{ s.a.} \Rightarrow \|S^2\| = \|S\|^2$$

$$\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle \underset{S \text{ s.a.}}{=} \langle S^2x, x\rangle \le \|S^2\| \cdot \|x\|^2,$$

d.h., $\|Sx\| \le \sqrt{\|S^2\|} \cdot \|x\|$, d.h.,

$$\|S\|^2 \le \|S^2\|.$$

$\geq$ gilt immer.

Schritt 2 Zeige: $\|T^2\| = \|T\|^2$ (T normal)

Es gilt: $T^*T =: S$ ist s.a. (auch $T \cdot T^*$ s.a.)

Erinnerung (FA 1, Sektion 3.4): $\forall S \in \mathcal{L}(H)$

$$\|S^*S\| = \|SS^*\| = \|S\|^2$$

Erinnerung (FA I, Section ...):

$$\|S^*S\| = \|SS^*\| = \|S\|^2$$

Es folgt:

$$\|T^2\|^2 = \|T^2(T^2)^*\| \overset{*}{=} \|(T\cdot T^*)^2\| \overset{*}{=} \|T\cdot T^*\|^2 \overset{T \text{ normal}}{=} \|T\|^4$$

$*$: $T\cdot T^*$ s.a. + Schritt 1

<u>Schritt 3</u> Analog zu Schritt 2 (da T^n normal $\forall n$)

$$\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k} \quad \forall k$$

und damit $r(T) = \lim\limits_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \|T\| = \|T\|$ ∎

$\boxed{\text{Satz 1.10}}$ <u>(Spektrum des Adjungierten)</u>

Es gilt $\boxed{\sigma(T) = \sigma(T')}$.

Ist X ein <u>Hilbertraum</u>, dann gilt

$$\boxed{\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}} = \{\bar{\lambda},\ \lambda \in \sigma(T)\}$$

<u>Beweis</u> <u>Teil 1</u>: X Banach.

zz.: $\lambda - T$ invert. $\Leftrightarrow$ $\lambda - T'$ inv.

$\Rightarrow$ Wir zeigen: $((\lambda - T)^{-1})' = (\lambda - T')^{-1}$:

$$\underbrace{(\lambda - T')}_{(\lambda - T)'}((\lambda - T)^{-1})' = [\underbrace{(\lambda - T)^{-1}(\lambda - T)}_{Id}]' = Id$$

Analog: andersrum.

$\Leftarrow$ OBdA $\lambda = 0$, (sonst betrachte $S := \lambda - T$)

d.h., T' inv. $\Rightarrow$ T inv.

Erinnere: $\exists$ isom. Isometrie $\pi: X \to X''$

$$x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$$

Wir identifizieren X mit (d.h., $x(\varphi) := \varphi(x)$)

Wir identifizieren X mit (d.h., $x(\varphi):=\varphi(x)$)
$\pi(X)$, d.h., schreiben $X \subset X''$

Wir zeigen zuerst: T ist <u>von unten beschr.</u>,
d.h., $\exists C>0$:

(**) $$\|Tx\| \geq C \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$$

(<u>Bem.</u>: T inv. $\Rightarrow$ von unten beschr. durch $\frac{1}{\|T^{-1}\|}$).

Nach ($\Rightarrow$) gilt: T'' ist inv.

Sei $x \in X$.

$$\|Tx\| = \|T''x\| \geq \frac{\|(T'')^{-1} \cdot T''x\|}{\|(T'')^{-1}\|}$$

weil $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\|$

$$= \frac{\|x\|}{\|(T'')^{-1}\|} \quad \forall x$$

$\Rightarrow$ (**) mit $C := \frac{1}{\|(T'')^{-1}\|}$

Aus (**) folgen:

- T ist inj.
- Bild(T) ist abg.:

<u>Bew.</u> Sei $(Tx_n) \subset$ Bild(T), $Tx_n \to y$

Dann ist (Tx_n) Cauchyfolge:

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|Tx_n - Tx_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \exists x$ mit $x_n \to x$.

T stetig: $Tx_n \to Tx$, d.h., $y = Tx \in$ Bild(T) ∎

Es bleibt z.z.: Bild(T) ist dicht in X
(dicht + abg. $= X$)

Ang., $\overline{\text{Bild}(T)} \neq X$. Hahn-Banach:

$$\exists \varphi \neq 0: \quad \varphi|_{\overline{\text{Bild}\,T}} = 0$$

Es gilt aber:

$$(T'\varphi)(x) = \varphi(Tx) = 0 \quad \forall x \in X$$

d.h., $T'\varphi = 0$ ↯ (T' inv. und $\varphi \neq 0$).

d.h., $T'\varphi = 0$ ↯ (T' inv. und $\varphi \neq 0$).

<u>Teil 2</u>: X Hilbert.

z.z.: $\lambda - T$ inv. $\Leftrightarrow$ $\overline{\lambda} - T^* = (\lambda - T)^*$ inv.

Wieder OBdA: $\lambda = 0$, d.h.,

T inv. $\Leftrightarrow$ T^* inv.

$\Rightarrow$ Wir zeigen: $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$:

$$(T^{-1})^* \cdot T^* = [T \cdot T^{-1}]^* = I$$

Analog andersrum.

$\Leftarrow$ folgt aus $\Rightarrow$, da $T^{**} = T$ ∎

$\boxed{\text{Bem. 1.11}}$ Im Beweis haben wir gezeigt:

a) T von unten beschr. (d.h., $\exists C > 0$: $\|Tx\| \geq C \cdot \|x\| \ \forall x$) $\Rightarrow$ $\begin{cases} T \text{ inj} \\ \text{Bild}\, T \text{ abg.} \end{cases}$

b) Bild T ist dicht $\Leftrightarrow$ T' inj.

<u>Bew.</u> $T'\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi(Tx) = 0 \ \forall x$

$\Leftrightarrow \varphi|_{\text{Bild}\, T} = 0$

$\underset{\varphi \text{ stetig}}{\Leftrightarrow} \varphi|_{\overline{\text{Bild}\, T}} = 0$

+ Hahn-Banach: Bild T dicht $\Leftrightarrow$ $\varphi|_{\overline{\text{Bild}}} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. ∎