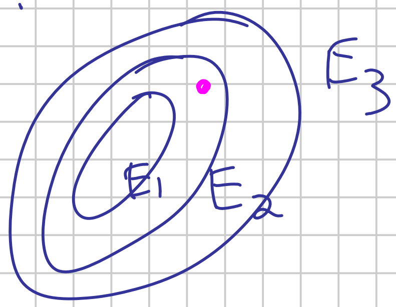
Notiztitel 15.05.2018

Def. $E_n := \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$. Sie erfüllen:

- $TE_n \subset E_n$
- $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq E_3 \subsetneq \dots$



Lemma von Riesz: $\forall n \geq 2 \; \exists y_n \in E_n$ mit $\|y_n\| = 1$, $d(y_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$.

Bemerke: Wenn $y_n = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$, dann $Ty_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \lambda_j x_j$,

also: $\lambda_n y_n - Ty_n = \sum_{j=1}^{n-1} b_j (\lambda_n - \lambda_j) x_j \in E_{n-1}$

insgesamt haben wir für $n > m$:

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - \underbrace{(\underbrace{Ty_m}_{\in E_m \subset E_{n-1}} + \underbrace{\lambda_n y_n - Ty_n}_{\in E_{n-1}})}_{\in E_{n-1}}\|$$

$$\geq \underbrace{|\lambda_n|}_{\geq \varepsilon} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}. \quad \lightning \ (T \text{ komp.}) \quad \blacksquare$$

4. Dunfordsches Funktionalkalkül, Spektralprojektionen und das „$T = I$" Theorem.

<u>Frage</u>: Sei $T \in \mathcal{L}(X)$, X Banach, $f: \mathbb{C}$ oder $D \subset \mathbb{C}$ $\to \mathbb{C}$:
Wie def. man $f(T) \in \mathcal{L}(X)$?

Bem. 1) Für Polynome klar:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$$

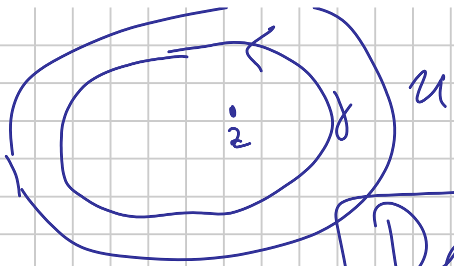
$$p(T) := a_0 \cdot I + a_1 \cdot T + \dots + a_d T^d$$

2) Für $f(z) = \frac{1}{\lambda - z}$, $\lambda \in \rho(T)$, $f(T) := (\lambda I - T)^{-1}$ – Resolvente

3) Für Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

def. $f(T) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$, falls die Reihe konv. (wann?)

Idee: Für allgemeine holom. Fkt'en (eventuell nicht auf ganz $\mathbb{C}$ def.), benutze die Cauchysche Integralformel:

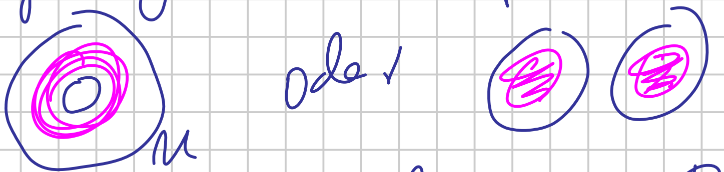


$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda$$

$\boxed{\text{Def. 4.1}}$ Sei $T \in \mathcal{L}(X)$, X Banach. Def.

$\mathcal{F}(T) := \{ f \text{ holom. in einer Umgebung von } \sigma(T) \}$.

<u>Bem.</u> Umgebung $U = U(f)$

$\boxed{\text{Bsp}}$ 

$\boxed{\text{Def}}$ Sei $f \in \mathcal{F}(T)$, $f : U \to \mathbb{C}$ holom., $\sigma(T) \subset U$.

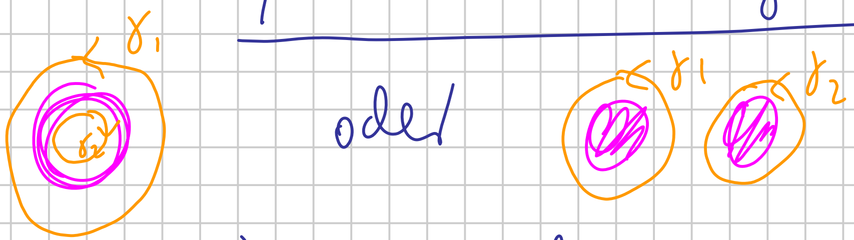
Sei $\gamma := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ eine Familie von Jordankurven (stückweise linear reicht) mit pos. Orientierung s.d.

Warum?

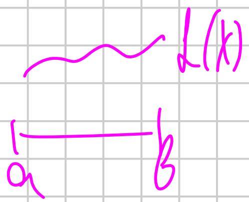
$\sigma(T)$ im Inneren von γ liegt. Def.

$$\boxed{f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) R(\lambda, T)\, d\lambda}$$

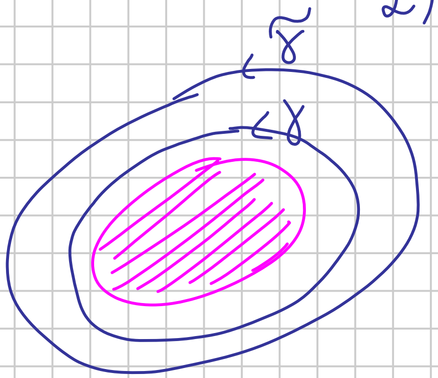
Bsp



Bem. 4.2 1) $\lambda \longmapsto f(\lambda) R(\lambda, T)$ ist holom. und insb. stetig auf γ. Das Integral $\int_\gamma$ ist def. als Riemannintegral (Riemannsummen...)



ü: stetige Banachraumwertige Fkt'en sind Riemann-integr.



2) Wohldef.

Behauptung: $f(T)$ hängt nicht von γ ab.

Beweis: Seien $\gamma, \tilde{\gamma}$ zwei solche Jordankurven.

zz: $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma} \cup \gamma_-} f(\lambda) R(\lambda, T) \, d\lambda = 0.$ (✱)

andere Orientierung

Sei $\varphi \in (\mathcal{L}(X))'$ und betrachte $\lambda \longmapsto \underbrace{\varphi(f(\lambda) R(\lambda, T))}_{\in \mathbb{C}}$

die ist holomorph in $\mathcal{U}$ (warum?)

Cauchyscher Integralsatz: $0 = \displaystyle\int_{\tilde{\gamma} \cup \gamma_-} \varphi(f(\lambda) R(\lambda, T)) \, d\lambda =$

$$\overset{\text{Warum?}}{=} \varphi\Big(\int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} f(\lambda)\, R(\lambda, T)\, d\lambda\Big) \qquad \forall \varphi \in (\mathcal{L}(X))'$$

Hahn-Banach: $\int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} = 0$, d.h. $(*)$. $\blacksquare$

Th. 4.3 (Eigenschaften des Funktionalkalküls)

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$, $f, g \in \mathcal{F}(T)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}(T)$ und $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$ Linearität

(b) $f \cdot g \in \mathcal{F}(T)$ und $(f \cdot g)(T) = f(T) \cdot g(T)$ Multiplikativität.

insb. kommutieren $f(T)$ und $g(T)$

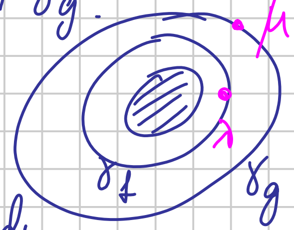
(c) Wenn $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in einer Umg. von $\sigma(T)$, dann gilt $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$

(d) $f \in \mathcal{F}(T')$ und $f(T') = (f(T))'$.

<u>Beweis</u> (a) klar

(b) $f \cdot g \in \mathcal{F}(T)$ klar. Seien f, g holom. in U (verkleinere U_1 und U_2), und sei OBdA γ_f im inneren von γ_g.

Dann gilt:



$$f(T)g(T) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_f} f(\lambda) R(\lambda, T)\, d\lambda \cdot \int_{\gamma_g} f(\mu) R(\mu, T)\, d\mu$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_f} \int_{\gamma_g} f(\lambda) f(\mu) \underbrace{R(\lambda,T) R(\mu,T)}_{= \frac{R(\lambda,T) - R(\mu,T)}{\mu - \lambda}.} \, d\mu \, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_f} f(\lambda) R(\lambda,T) \underbrace{\left[\int_{\gamma_g} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda} \, d\mu \right]}_{=2\pi i \, g(\lambda)} d\lambda$$

: Cauchysche Integralformel (λ liegt drin)

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_g} f(\mu) R(\mu,T) \underbrace{\left[\int_{\gamma_f} \frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda} \, d\lambda \right]}_{=0} d\mu$$

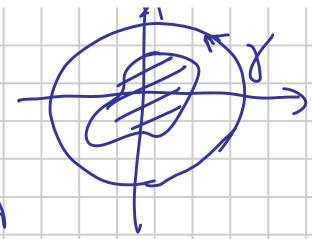
((CIS, μ liegt draußen)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} f(\lambda) g(\lambda) R(\lambda,T) \, d\lambda = \underline{(f \cdot g)(T)}.$$

(c) Nach Voraus. $\exists \, \gamma =$ Kreis mit Radius $> r(T)$ um 0 s.d.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gleichm. auf γ konv.

Wir haben damit



$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma^n \right) R(\lambda, T)\, d\lambda$$

$$\underset{\text{gl. Konv.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma \lambda^n \underbrace{R(\lambda, T)}_{= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}}\, d\lambda \quad \text{(Neumannsche Reihe)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T^j \underbrace{\int_\gamma \frac{\lambda^n}{\lambda^{j+1}}\, d\lambda}_{= \begin{cases} 0, & n \neq j \\ 2\pi i, & n = j \end{cases}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n.$$

(d) folgt aus $\sigma(T') = \sigma(T)$ und $R(\lambda, T') = (R(\lambda, T))'$. ∎

<u>Bemerkung</u> Es gilt allgemein, dass

$f_n \to f$ gleichm. auf $U \supset \sigma(T) \implies f_n(T) \to f(T)$ in $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Grund: $\left|\int_\gamma (f_n(\lambda) - f(\lambda)) R(\lambda, T)\, d\lambda\right| \leq \text{Länge}(\gamma) \cdot \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\to 0} \cdot \sup_{\lambda \in \gamma} \|R(\lambda, T)\|$.

Thm. 4.4 (Spektraler Abbildungssatz)

Für $f \in \mathcal{F}(T)$ gilt

$$\boxed{\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))}.$$

Beweis $\supset$ Sei $\lambda \in \sigma(T)$. Zz.: $f(\lambda) \in \sigma(f(T))$.

Def. $g(z) := \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z}$ - holom. fortsetzbar auf ein $U \supset \sigma(T)$.

Nach Thm. 4.3 c) und b),

$$f(\lambda) - f(T) = (\lambda - T)\, g(T)$$
$$= g(T)\,(\lambda - T).$$

Da $\lambda - T$ nicht invert. ist, ist auch $f(\lambda) - f(T)$ nicht invert.

c) Sei $\mu \in \sigma(f(T))$. Ang.: $\mu \notin f(\sigma(T))$. Dann ist

$$h(z) := \frac{1}{f(z) - \mu} \in \mathcal{F}(T).$$

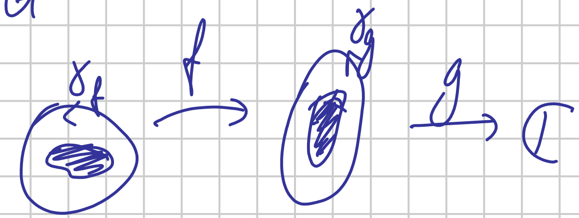
Nach Thm. 4.3, $h(T)(f(T) - \mu) = I = (f(T) - \mu)\, h(T)$ ↯ $\blacksquare$

<u>Bem.</u> Für $f(z) = \frac{1}{\lambda - z}$ wissen wir das schon. (Warum gilt $f(T) = (\lambda - T)^{-1}$?)

Prop. 4.5 (Kettenregel)

Sei $f \in \mathcal{F}(T)$, $g \in \mathcal{F}(f(T))$. Dann gilt

$$\boxed{(g \circ f)(T) = g(f(T))}$$



Beweis $g \circ f \in \mathcal{F}(T)$ folgt aus Thm. 4.4.
Seien γ_g um $\sigma(T)$ und γ_g um $\sigma(f(T))$. OBdA gelte:
$f(\gamma_f)$ liegt innerhalb von γ_g (sonst verkleinere γ_f).

γ_g Sei $\lambda \in \gamma_g$ und def.

$$A(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} \frac{R(z,T)}{\lambda - f(z)} \, dz \in \mathcal{F}(T).$$

Es gilt

$$A(\lambda) = \frac{1}{\lambda - f(\cdot)}(T)$$

und damit (Thm. 4.3):

$$(\lambda - f(T))A(\lambda) = A(\lambda)(\lambda - f(T)) = I,$$

d.h., $A(\lambda) = R(\lambda, f(T))$. Daraus folgt

$$g(f(T)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_g} g(\lambda) \underbrace{R(\lambda, f(\lambda))}_{= A(\lambda)} d\lambda$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_g} \int_{\gamma_f} \frac{g(\lambda)\, R(z,T)}{\lambda - f(z)}\, dz\, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_f} R(z,T) \underbrace{\left[\int_{\gamma_g} \frac{g(\lambda)}{\lambda - f(\lambda)}\, d\lambda \right]}_{= 2\pi i\, g(f(z))} dz$$

CIS

$= (g \circ f)(T)$. ∎

Bem. Insbesondere gilt $f^{-1}(f(T)) = T$.

Def. 4.6 (Spektralmengen und Spektralprojektionen)

Ang.: $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, σ_j abg. und disjunkt

(d.h.: $\sigma(T)$ ist nicht zshgd.)

1) jedes σ_j heißt Spektralmenge von T.

2) Die Operatoren $P_{\sigma_j} := \mathbb{1}_{\sigma_j}(T)$

heißen Spektralprojektionen (auf σ_j)

Bem.: 1) Die Fkt

$$\mathbb{1}_{\sigma_j}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \sigma_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1 0 und 0 1

ist holom. in einer Umg. von σ. Außerdem gilt

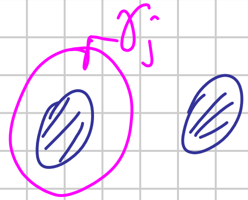
$$\mathbb{1}_{\sigma_j}^2 = \mathbb{1}_{\sigma_j} \Rightarrow P_{\sigma_j}^2 = P_{\sigma_j},$$

d.h., P_{σ_j} ist tatsächlich eine Projektion.

2) Es gilt

$$\boxed{P_{\sigma_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} R(\lambda, T)\, d\lambda}$$

um σ_j



Thm. 4.7 (Spektralzerlegung)

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, σ_j abg., disjunkt.

Dann $\exists X_1, X_2$ mit

1) $X = X_1 \oplus X_2$

2) X_1, X_2 sind T-inv. $(TX_j \subset X_j)$

3) $\sigma(T|_{X_1}) = \sigma_1$, $\sigma(T|_{X_2}) = \sigma_2$.

<u>Beweis</u> Def. $X_j := P_{\sigma_j}(X) = \text{Bild}(P_{\sigma_j})$.

1) $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{\sigma_1} + \mathbb{1}_{\sigma_2}$ in einer Umg. von $\sigma(T)$.

Linearität: $I = P_{\sigma_1} + P_{\sigma_2}$, d.h.,

$$X = \underbrace{P_{\sigma_1}(X)}_{X_1} + \underbrace{P_{\sigma_2}(X)}_{X_2}.$$

Außerdem gilt $\mathbb{1}_{\sigma_1} \cdot \mathbb{1}_{\sigma_2} = 0$, d.h.,

$$P_{\sigma_1} P_{\sigma_2} = P_{\sigma_2} P_{\sigma_1} = 0,$$

also $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. (Ang., $x \in X_1 \cap X_2 = \mathrm{Bild}(P_{\sigma_1}) \cap \mathrm{Bild}(P_{\sigma_2})$.
Dann gilt $0 = P_{\sigma_1} \underbrace{P_{\sigma_2} x}_{=x,\text{ da } P_{\sigma_2} \text{ Projektion}} = P_{\sigma_1} x = x$).

2) $T P_{\sigma_j} X \subset P_{\sigma_j} X$ folgt aus

$$T P_{\sigma_j} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} T R(\lambda, T) x \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} R(\lambda, T) T x \, d\lambda$$

$$= P_{\sigma_j}(Tx) \in P_{\sigma_j}(X).$$

3) ⊃ Sei $\lambda \in \sigma_1$. Ang., $\lambda \notin \sigma(T_1)$, wobei $T_1 := T|_{X_{\sigma_1}}$.

Dann $\exists\, A_1 \in \mathcal{L}(X_1)$ mit

$$A_1(\lambda - T) = (\lambda - T)A_1 = I \quad \text{auf } X_1.$$

Def.

$$g(z) := \begin{cases} 0, & z \in \sigma_1 \\ \frac{1}{\lambda - z}, & z \in \sigma_2 \end{cases} \quad , \quad g \in \mathcal{F}(T)$$

warum?

Wir haben

$$P_{\sigma_2} = g(T)(\lambda - T) = (\lambda - T)\,g(T) \quad \text{auf } X_2,$$

da $\mathbb{1}_{\sigma_2}(z) = g(z)(\lambda - z) = (\lambda - z)\,g(z)$.

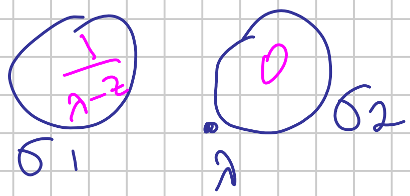
Def. $A \in \mathcal{L}(X)$, $A := A_1 P_{\sigma_1} : X \longrightarrow X_1$. Es gilt

$$\underbrace{(\lambda - T)(A_1 + g(T))}_{= I_{X_1} + I_{X_2} = I} = (A_1 + g(T))(\lambda - T) = I \quad ↯ \quad (\lambda \in \sigma_1 \in \sigma(T_1))$$

σ_2 : analog.

c) Sei $\lambda \notin \sigma_1$. Zz.: $\lambda \notin \sigma(T|_{X_1})$.

Sei $f(z) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda - z}, & z \in \text{Umg. von } \sigma_1 \text{, die } \lambda \text{ nicht enthält} \\ 0, & z \in \sigma_2. \end{cases}$



Wir haben $f \in \mathcal{F}(T)$ und

$$f(z) \cdot (\lambda - z) = (\lambda - z) f(z) = \mathbb{1}_{\sigma}.$$

Multiplikativität des Kalküls:

$$f(T)(\lambda - T) = (\lambda - T) f(T) = P_{\sigma_1}.$$

Einschränkung auf X_1:

$$f(T)|_{X_1} (\lambda - T|_{X_1}) = (\lambda - T|_{X_1}) f(T)|_{X_1} = I|_{X_1},$$

und damit $\lambda \notin \sigma(T|_{X_1})$. $\blacksquare$