Notiztitel 12.06.2018

Analog def. man Multiplikations Hb auf $L^p(\mathbb{R})$: siehe Ü'Blatt.

c) Translations Hb'en auf $C_0(\mathbb{R})$

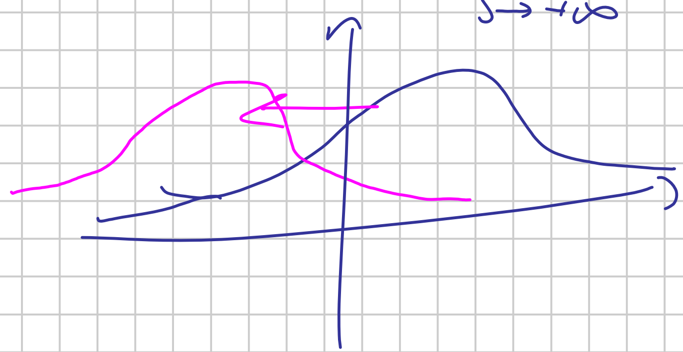
sei $X = C_0(\mathbb{R})$ oder $X = C_0([0,\infty)) = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stetig mit $\lim_{s \to +\infty} f(s) = 0\}$

mit Supnorm.

Def. die Linkstranslationen

$$(T_l(t) f)(s) := f(s+t)$$

$\forall$ $T_l(t)$ ist eine Kontraktion,

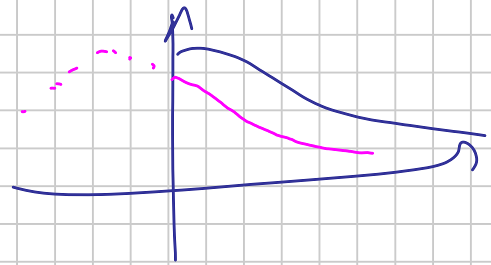


$T_\ell(0) = \mathbb{1}$

HG'Gesetz: $(T_\ell(t_1)T_\ell(t_2)f)(s) =$

$= (T_\ell(t_2)f)(s+t_1) = f(s+t_1+t_2)$

$= (T_\ell(t_1+t_2)f)(s).$



Starke Stetigkeit: Sei $f \in C_c(\mathbb{R})$

Gleichm. Stetigkeit von f:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Sei $h \in (0, \delta)$. Dann gilt:

$\|T(h)f - f\| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s+h) - f(s)| \leq \varepsilon$

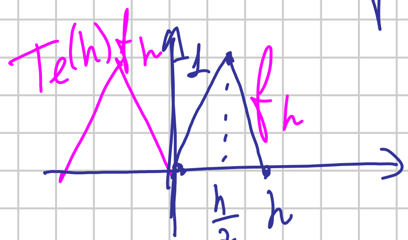
$\Rightarrow$ $T(\cdot)f$ ist stetig in Null.

Prop. 1.3 ($C_c(\mathbb{R})$ ist dicht in $C_0(\mathbb{R})$) $\Rightarrow$ $T_\ell(\cdot)$ ist C_0-HG.

(Man kann starke Stetigkeit auch direkt zeigen: $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$ ist gleichm. stetig (warum?))

Die HG $T_\ell(\cdot)$ ist nicht normstetig:

$$\|T_\ell(h) - I\| = \sup_{f : \|f\|_\infty \le 1} \|T_\ell(h) f - f\| \underset{h \downarrow 0}{\not\to} 0$$



: $\|T_\ell(h) f_h - f_h\| = 1 \not\to 0.$

Auf $C_0(\mathbb{R})$ ist $(T_\ell(t))$ eine Gruppe (erweitere durch die Rechtstranslationen)

d) Translations HG auf $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$

$X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, $(T_\ell(t)f)(s) = f(s+t)$ Linkstranslation

- $\|T_\ell(t)\| = 1 \quad \forall t$
- HG' Gesetz OK
- starke Stetigkeit:

Erinnere: $C_c(\mathbb{R})$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R})$

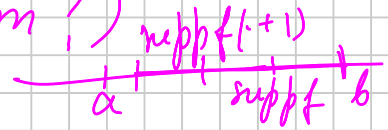
Sei $f \in C_c(\mathbb{R})$.

$$\|T(h)f - f\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(h+s) - f(s)| \xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0$$

gleichm. Stetigkeit von f

$$\Rightarrow \|T(h)f - f\|_p \xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0$$

(Warum?)



Prop. 1.3: $T_l(\cdot)$ ist C_0-HG.

<u>Achtung</u>: $T_l(\cdot)$ ist nicht stark stetig auf L^∞!

$f =$  : $\|T_l(t)f - f\|_\infty = 1 \quad \forall t \neq 0.$

<u>Bemerkung</u>: Allgemein gilt:

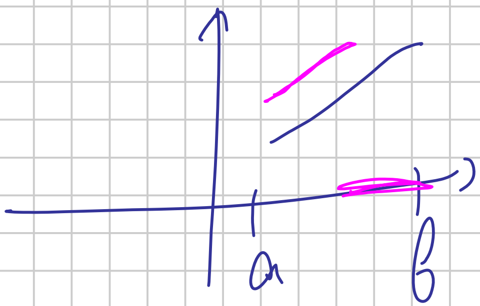
$T_l(\cdot)$ ist eine C_0-Gruppe auf $C_0(\mathbb{R})$, $C_{ub}(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$

beschr., gl. stetig

und eine C_0-HG auf $C_{ub}(\mathbb{R}_+)$, $C_0(\mathbb{R}_+)$, $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$.

e) <u>Translations HG'en auf einem Intervall</u>

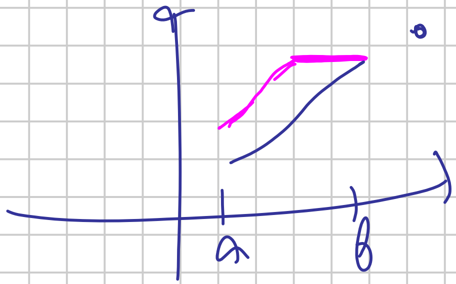
- $X = L^p([a,b])$, $1 \leq p < \infty$



$$(T_\ell(t)f)(s) = \begin{cases} f(s+t), & s+t \le b \\ 0, & s+t > b. \end{cases}$$

HG-Gesetz: OK, starke Stetigkeit wie oben.

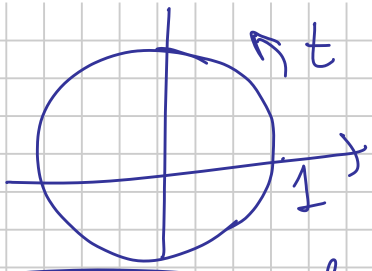
$T_\ell(\cdot)$ ist nilpotent: $T_\ell(b-a) = 0$, $T(t) = 0$ $\forall\, t \ge b-a$.



- $X = C[a,b]$: $(T_\ell(t)f)(s) = \begin{cases} f(s+t), & s+t \le b \\ f(b), & s+t > b \end{cases}$

- Periodische HG'e auf $L^p[a,b]$

Analog: Periodische HG'e auf $C_{per}[a,b]$ (d.h., $f(a)=f(b)$)



bzw. $C_{per}(\mathbb{R})$ – entspricht der RotationsHG auf $\mathbb{T}$

$\boxed{\text{Satz 1.5}}$ Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0-HG auf X, X Banach

Dann $\exists\, \omega \in \mathbb{R}\ \exists\, M \geq 1$:

$$\boxed{\|T(t)\| \leq M \cdot e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.}$$

Beweis: Wir wissen (PGB – Prinzip der gleichm. Beschr., siehe Lemma 1.3):

$\exists\, M \geq 1$: $\|T(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0,1]$.

Sei $t \geq 0$ und schreibe $t = \underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{s}_{\in [0,1)}$.

$$\|T(t)\| = \|T(n)T(s)\| \leq \|\underbrace{T(n)}_{T(1+1+\ldots+1) = T(1)^n}\| \cdot \|T(s)\|$$

$$\leq \underbrace{\|T(1)\|^n}_{\leq M^n} \cdot \underbrace{\|T(s)\|}_{\leq M} \leq M \cdot M^n = M \cdot e^{\overset{\leq t}{n} \ln M}$$

$$\leq M \cdot e^{t \cdot \ln M} \quad \ln M =: \omega \quad = M e^{t\omega} .$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Def 1.6}}$ Sei $T(\cdot)$ C_0-HG.

a) Die Zahl

$$\omega_0 := \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \exists M_\omega \geq 1 \text{ mit } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \ \forall t \}$$

heißt die Wachstumsschranke von $T(\cdot)$.

b) $T(\cdot)$ heißt

- beschränkt, wenn $\exists M \geq 1$ mit $\|T(t)\| \leq M \ \forall t$ — d.h., $\omega = 0$ passt
- kontraktiv, wenn $\|T(t)\| \leq 1 \ \forall t$ — d.h., $\omega = 0$ und $M = 1$ passen.
- isometrisch, wenn $\|T(t)x\| = \|x\| \ \forall t \geq 0 \ \forall x \in X$

Bem.: 1) Satz 1.5 $\Rightarrow$ $\omega_0 < \infty$

Achtung $\omega_0 = -\infty$ möglich

Bsp Linkstransl.'HG auf $L^p[0,1]$, $p < \infty$
- nilpotent, also gilt $\omega_0(T) = -\infty$.
(Warum?)

2) $\inf \neq \min$ in der Def. von ω_0 i.A.:

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T(t) := e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\|T(t)\|_\infty = 1+t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, aber langsamer, als $\forall\, Me^{\omega t}$, $\omega > 0$.

D.h., $\omega_0(T) = 0$, aber das inf wird nicht angenommen.

3) $M > 1$ kann passieren!

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = L^1(\mathbb{R})$,

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} 2f(s+t), & s \in [-t, 0] \\ f(s+t) & \text{sonst} \end{cases}$$

ü $T(\cdot)$ ist C_0-HG

$\|T(t)\| = 2 \quad \forall t > 0$ – $M = 2$, $\omega_0 = 0$.

$\boxed{\text{Bsp 1.7}}$

1) TranslationsHG'en $T_l(\cdot), T_r(\cdot)$ auf $C_0(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$: $\|T(t)\| = 1 \quad \forall t$,

d.h., $\omega_0 = 0$, $M = 1$

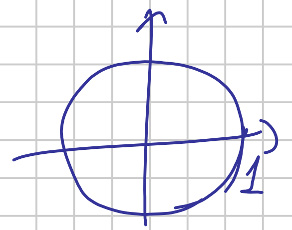
2) MultiplikationsHG auf $C_0(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$:

$T(t)f := e^{tq} f$

$\|T(t)\| = \|e^{tq}\|_\infty = e^{t \sup \operatorname{Re} q}$,

d.h., $\omega_0 = \sup \operatorname{Re} q$, $M = 1$

3) Rotation auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$



$(T(t)f)(\lambda) = f(e^{it} \cdot \lambda)$

$\|T(t)\| = 1 \quad \forall t$ – wieder $\omega_0 = 0$, $M = 1$.

Mehr Bsp von C_0-HG'en

$\boxed{\text{Bsp. 1.8}}$ (Ähnliche HG'en)

Sei $T(\cdot)$ C_0-HG auf X, $V : Y \to X$ Isomorphismus, Y Banach

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T(\cdot)} & X \\ V \uparrow & & \uparrow V \\ Y & \xrightarrow{S(\cdot)} & Y \end{array}$$

Dann ist $S(\cdot)$ mit

$$S(t) = V^{-1} T(t) V \quad , t \geq 0,$$

eine C_0-HG auf Y. Ü

(z.B. $T_e(\cdot)$ auf $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ und RotationsHG auf $C(\mathbb{T})$).

Ü $\omega_0(T) = \omega_0(S)$

$\boxed{\text{Bsp 1.9}}$ (Reskalierte HG'en)

Sei $T(\cdot)$ C_0-HG auf X, $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Dann ist $S(\cdot)$ mit

$$S(t) = e^{\mu t} T(\lambda t)$$

auch eine C_0-HG mit $\omega_0(S) = \lambda \cdot \omega_0(T) + \mathrm{Re}\,\mu$ Ü

$\boxed{\text{Bsp. 1.10}}$ (Teilraum HG'en)

Sei $T(\cdot)$ C_0-HG auf X (X Banach), sei $Y \subset X$ abg., $T(t)$-inv. TR $\forall t \geq 0$. Dann ist $(T(t)|_Y)_{t \geq 0}$ eine C_0-HG auf Y.

$\boxed{\text{Bsp. 1.11}}$ (Quotienten HG'en)

Sei $Y \subset X$ abg., $T(t)$-inv. TR $\forall t \geq 0$.

Def. $Z := X/Y$, sei $\pi : X \to Z$ kanonische Quotientenabb.

Dann ist $S(\cdot)$ auf Z def. durch

$$S(t)(x+Y) := T(t)x + Y \qquad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in X$$

(d.h., $S(t)(\pi x) := \pi(T(t)x)$) eine C_0-HG auf Z Ü

$\boxed{\text{Bsp 1.12}}$ (Adjungierte HG)

sei $T(\cdot)$ C_0-HG auf X, X Banach.

Def. $T'(t) := (T(t))'$ auf X'.

Achtung $T'(\cdot)$ ist nicht immer stark stetig!

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = L^1(\mathbb{R})$, $T(t) = \leftarrow$ (T_e) – C_0-HG,

aber $T'(t) = \rightarrow$ auf $L^\infty(\mathbb{R})$ – keine C_0-HG

Man kann aber zeigen:

$$X \text{ reflexiv} \implies T'(\cdot) \text{ ist } C_0\text{-HG}.$$

$\boxed{\text{Bsp 1.13}}$ (Produkt HG'e)

Sei X Banach, $T(\cdot)$, $S(\cdot)$ kommutierende C_0-HG'en, d.h.,

$$T(t)S(s) = S(s)T(t) \quad \forall t, s.$$

Dann ist $\quad \mathcal{U}(t) := T(t)S(t)$

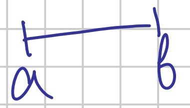
auch eine C_0-HG. Ü

Bem. Es reicht, $T(t)S(t) = S(t)T(t)$ $\forall t \geq 0$ zu überprüfen. Ü

Zusatz: Riemann-Integrierbarkeit von Banachraumwertigen Fkt'en

$\boxed{\text{Def}}$ $f: [a,b] \to X$, X Banach, heißt **Riemann-integrierbar**, wenn die Riemann-Summen konvergieren, d. h.,

$\exists z \in X : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall$ Partition $\mathcal{P}$:



$a = {}_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ mit Zwischenstellen $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$:

$$\underbrace{|\mathcal{P}|}_{= \max |t_j - t_{j-1}|} < \delta \implies \left\| \sum_{j=1}^{n} f(t_j^*)(t_j - t_{j-1}) - z \right\| < \varepsilon.$$

Eigenschaften

1) Riemann-integrierbar $\Rightarrow$ beschr.
2) f stetig $\Rightarrow$ f gleichm. stetig $\Rightarrow$ f Riemann-integr.

mit
$$\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\| \leq \|f\|_\infty \cdot (b-a)$$

3) $T \in \mathcal{L}(X)$, f R.-integr. $\Rightarrow Tf$ R.-integr. und
$$T\int_a^b f = \int_a^b Tf$$

Bem. f R.-integr. $\not\Rightarrow \|f\|$ R.-integr. i.A.

Bochner-Integral

Analogon des Lebesgue-Integrals:

Def $f: [a,b] \to X$, X Banach, heißt Bochner-integrierbar, wenn $\exists$ Folge (f_n) von einfachen Fkt'en:

- $f_n \longrightarrow f$ μ-fast überall (μ = Lebesgue)
- $\int_a^b \|f_n - f_m\| \, d\mu \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

in diesem Fall def. $\int_X f := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$

Prop.: sei f meßbar $f : [a,b] \longrightarrow X$ Bochner-integr. $\Longleftrightarrow$ $\|f\| : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integr.

2. Normstetige HG'en

Erinnerung: Für $A \in \mathcal{L}(X)$ ist $T(\cdot)$ mit $T(t) = e^{tA}$ eine normstetige HG.

Wir zeigen: $\underline{\underline{\forall}}$ normstetige HG ist von der Form (e^{tA})

für einen $A \in \mathcal{L}(X)$.

$\boxed{\text{Prop. 2.1}}$ Sei $A \in \mathcal{L}(X)$, X Banach. Dann ist die Abb.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\to (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|) \\ t &\mapsto T(t) := e^{tA} \end{aligned}$$

differenzierbar und erfüllt

$$(DG) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} T(t) = A \cdot T(t) & \forall t \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

Umgekehrt ist $\forall$ Abb. $t \mapsto T(t)$ mit (DG) von der Form $T(t) = e^{tA}$ mit $A = \dot{T}(0)$.

<u>Beweis</u> <u>Teil 1</u> Sei $t>0$ und $|h|<t$. Es gilt:

$$\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA}-I}{h}\cdot e^{tA} = A\cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n A^n}{(n+1)!}}_{\xrightarrow{h\to 0} I,}\, e^{tA}$$

$$\xrightarrow[h\downarrow 0]{} A\cdot e^{tA}$$

da $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n A^n}{(n+1)!} - I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n A^n}{(n+1)!}$

$= h\cdot A \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n A^n}{(n+2)!}}_{\|\cdot\| \le e^{|h|\|A\|} \le e^{t\|A\|}}$

Analog für $t=0$.

<u>Teil 2</u> Ang., $T(\cdot)$ ist diff'bar, mit (DG). Sei $t>0$ fest und def. $(S(s))_{s\in[0,t]}$ durch

$$S(s) := e^{(t-s)A} \cdot T(s)$$

Es gilt:

- $S(t) = T(t)$, $S(0) = e^{tA}$
- $s \mapsto S(s)$ ist diff'bar mit

$$\frac{d}{ds} S(s) \overset{\text{(DG) + Produktregel}}{=} -A e^{(t-s)A} T(s) + e^{(t-s)A} A T(s) = 0 \quad \forall s$$

Also ist $S(\cdot)$ konstant (Warum?).

Damit gilt $T(t) = S(t) = S(0) = e^{tA}$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Theorem 2.2}}$ (Charakterisierung normstetiger HG'en)

Sei $T(\cdot)$ eine normstetige HG auf einem BR X. Dann $\exists A \in \mathcal{L}(X)$

mit $\quad T(t) = e^{tA} \quad \forall t \geq 0.$

__Beweis__ Def. $\quad V(t) := \int_0^t T(s)\,ds$ – wohldef., da $T(\cdot)$ normstetig.

Es gilt: $\quad \frac{1}{t} V(t) = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\,ds \xrightarrow[t \searrow 0]{} T(0) = I$ – da $T(\cdot)$ stetig

Daraus folgt: $\exists\, t_0 > 0$: $V(t_0)$ invertierbar. (Warum?)

Wir haben:

$$T(t) = V(t_0)^{-1} \cdot \underbrace{V(t_0)T(t)}_{\int_0^{t_0} T(s+t)\,ds} = V(t_0)^{-1} \cdot \int_0^{t_0} T(s+t)\,ds$$

$$= V(t_0)^{-1} \cdot \underbrace{\int_t^{t+t_0} T(s)\,ds}_{V(t+t_0) - V(t)} = V(t_0)^{-1} \left[V(t+t_0) - V(t) \right].$$

insbesondere ist $T(\cdot)$ diff'bar und

$$\frac{d}{dt} T(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} \underset{\text{HG'-Gesetz}}{=} \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} \cdot T(t)$$

$$= \underbrace{\dot{T}(0)}_{=:A} \cdot T(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Nach Prop. 2.1 gilt $T(t) = e^{tA}$ für $A = \dot{T}(0)$. ∎

<u>Frage</u>: Wie sehen allgemeine (also <u>stark</u> stetige) HG'en aus?
Gibt es ein Analogon für $A = \dot{T}(0)$?

3. Generator und seine Resolvente

__Idee:__ Finde einen (eventuell unbeschränkten) Operator A, der $T(\cdot)$ „erzeugt".

$\boxed{\text{Def 3.1}}$ Sei $T(\cdot)$ eine C_0-HG auf X, X Banach.
Der Generator von $T(\cdot)$ ist der Operator $A : D(A) \to X$, $D(A) \subseteq X$
mit

$$D(A) := \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \in X \right\}$$

$$Ax := \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \quad \text{für } x \in D(A)$$

__Bem.__ i) Man sagt: $(A, D(A))$ ist der Generator,
schreibe: $(A, D(A)) \rightsquigarrow T(\cdot)$

2) $D(A)$ ist ein lin. $T(t)$-inv. TR $\forall t \geq 0$:

- lin.: klar
- $T(t)$-inv.: Für $x \in D(A)$, $t > 0$. zz: $T(t)x \in D(A)$

$$\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{x} = T(t)\Big[\underbrace{\frac{T(h)x - x}{x}}_{\to Ax}\Big] \longrightarrow T(t)Ax,$$

d.h., $T(t)x \in D(A)$ und

$$AT(t)x = T(t)Ax.$$