Notiztitel 10.04.2018

SS 2018

Funktionalanalysis II

I Einführung in die Spektraltheorie

1. Spektrum und Resolvente

Erinnere: $A \in M_{d \times d}$

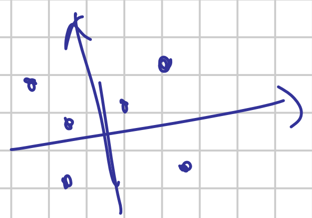
$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda$ Eigenwert von A, d.h., $\exists x \neq 0$ mit $Ax = \lambda x$

$\iff \lambda I - A$ ist nicht inj

$\iff \lambda I - A$ nicht surj.

insb. gilt: $\lambda \notin \sigma(A) \iff \exists (\lambda - A)^{-1}$

Wir schreiben $\lambda - A$ statt $\lambda \cdot I - A$



+ höchstens d-viele Eigenwerte/Spektralwerte.

$\boxed{\text{Def 1.1}}$ Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. (Banach) Die Resolventenmenge von T ist

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ bij}\}$$

Satz vom stetigen inversen

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

Das Spektrum von T ist

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

$\lambda \in \sigma(T)$ heißen Spektralwerte von T.

Das Punktspektrum von T ist

$$P_\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T) \text{ nicht inj}\}$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} ; \exists\, x \neq 0 \text{ mit } Tx = \lambda x\}$$

$\lambda \in P_\sigma(T)$ heißen Eigenwerte von T, und zugehörige $x \neq 0$ Eigenvektoren zu λ.

Die Resolvente von T in $\lambda \in \rho(T)$ ist

$$R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

und die **Resolventenabbildung** ist die Abb.

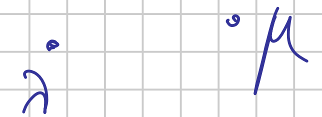
$$\lambda \longmapsto R(\lambda, T)$$
$$\rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

__Bem.__ $P\sigma(T) \subset \sigma(T)$, aber $\neq$ i. A.

Sogar $P\sigma(T) = \emptyset$ möglich (später)

$\boxed{\text{Prop. 1.2}}$ (**Resolventengleichung**):

Seien $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Dann gilt:



Resolventengl. $R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\lambda, T) \cdot R(\mu, T)$

Beweis

$(\lambda - T) \cdot R(\lambda, T) = I$ nach Def.

$\lambda \cdot R(\lambda, T) - T \cdot R(\lambda, T) = I \quad | \cdot R(\mu, T)$ von rechts

$\mu \cdot R(\mu, T) - T \cdot R(\mu, T) = I \quad | \cdot R(\lambda, T)$ von links

Substr.: $(\mu - \lambda) R(\mu, T) R(\lambda, T) = R(\lambda, T) - R(\mu, T)$ ∎

Wir haben benutzt: $T R(\lambda, T) = R(\lambda, T) T \ \forall \lambda$, da beide $= \lambda R(\lambda, T) - I$.

Bem. Es folgt: $R(\lambda) R(\mu) = R(\mu) R(\lambda)$

Erinnerung (Neumannsche Reihe, FA 1 (Sektion 2.1?))

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ konv., dann

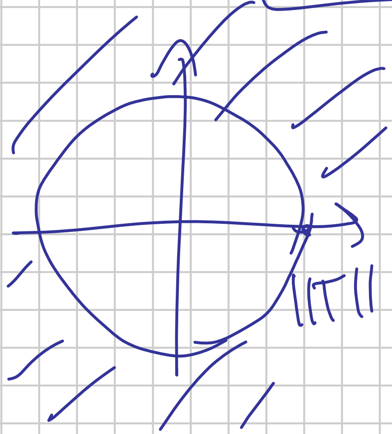
$$\exists\ (I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

Dies gilt insb. für T mit $\|T\| < 1$ (X – Banach)

$\boxed{\text{Satz 1.3}}$ (Darstellung der Resolvente)

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ gilt $\lambda \in \rho(T)$ und

$$\boxed{R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}}$$



Insbesondere ist $\sigma(T)$ beschränkt in $\mathbb{C}$ mit $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\}$

Beweis Sei λ mit $|\lambda| > \|T\|$. Dann gilt

$$\lambda - T = \lambda\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right) \text{ und}$$

$$\exists\, (\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} \underset{\text{Neumannsche Reihe}}{=} \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

$\|\cdot\| < 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

∎

Bem Für andere $\lambda \in \rho(T)$ ist diese Formel i. A. nicht mehr gültig (die Reihe kann divergieren). Aber sobald die Reihe konv., ist $\lambda \in \rho(T)$

und die Formel gilt.

$\boxed{\text{Satz 1.4}}$ (Eigenschaften des Spektrums und der Resolventenabb.)

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$, X Banach

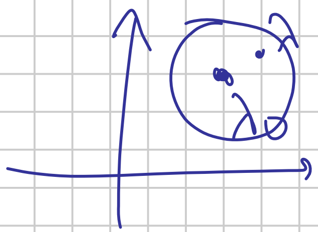
(a) $\rho(T)$ ist offen und die Resolventenabb. ist stetig

(b) Die Resolventenabb. ist holomorph.

(c) $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Insbesondere ist $\sigma(T)$ immer kompakt und nichtleer in $\mathbb{C}$.

<u>Beweis</u> (a) Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ und λ mit



$$|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0,T)\|}$$

$\|\cdot\| \neq 0$, da 0 nicht bij.

$$\lambda - T = (\lambda-\lambda_0) + \underbrace{(\lambda_0 - T)}_{\text{invert.}} = \Big(\underbrace{(\lambda-\lambda_0)\cdot R(\lambda_0,T)}_{} + I\Big)(\lambda_0 - T)$$

$$(\lambda-T)^{-1} = R(\lambda_0,T)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\overset{\|\cdot\|<1}{(\lambda_0-\lambda)\cdot R(\lambda_0,T)}\Big)^n$$

Neumannsche Reihe

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0-\lambda)^n \cdot R(\lambda_0,T)^{n+1}$$

D.h., $R(\lambda,T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot R(\lambda_0,T)^{n+1} \cdot (\lambda-\lambda_0)^n$

– Potenzreihenentw.

Insbesondere gilt: $\lambda \in \rho(T)$ und $R(\lambda, T)$ stetig in λ_0:

$$\|R(\lambda,T) - R(\lambda_0,T)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \, R(\lambda_0,T)^{n+1} \right\|$$

$$\leq \|R(\lambda_0,T)\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|\lambda_0 - \lambda|^n \cdot \|R(\lambda_0,T)\|^n}_{\text{Zahl} < 1}$$

$$= \|R(\lambda_0,T)\| \cdot \frac{|\lambda_0 - \lambda| \cdot \|R(\lambda_0,T)\|}{1 - |\lambda_0 - \lambda| \, \|R(\lambda_0,T)\|} \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

(b) Resolventengleichung:

$$\frac{R(\lambda+h,T)-R(\lambda,T)}{h} = \frac{(-\cancel{h})\cdot R(\lambda,T)\,R(\lambda+h,T)}{\cancel{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} -\left(R(\lambda,T)\right)^2 .$$

Also gilt $\exists\; R(\lambda,T)' = -R^2(\lambda,T)$

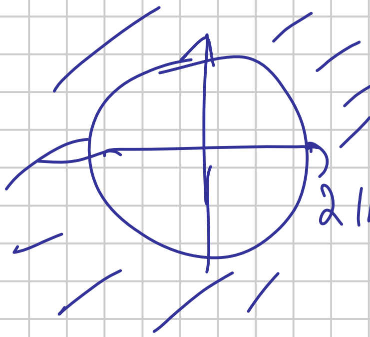
(Potenzreihenentw. $\Rightarrow$ ∞-oft diff'bar mit

$$R(\lambda,T)^{(n)} = (-1)^n \cdot n!\; R(\lambda_0,T)^{n+1}$$

(c) Ang. $\sigma(T)=\emptyset$, d.h., $\rho(T)=\mathbb{C}$ und die Resolventenabb. ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

Idee: Liouville.

Wir zeigen zuerst: $R(\lambda, T)$ beschr. in $\mathbb{C}$.



$2\|T\|$

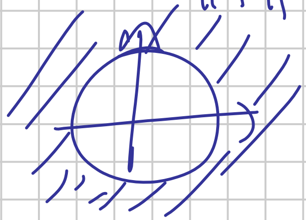
Sei λ mit $|\lambda| > 2\|T\|$. Dann ist

$$\|R(\lambda,T)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^{n+1}}$$

$> 2^{n+1} \cdot \|T\|^{n+1}$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} \cdot \|T\|} = \frac{1}{\|T\|}$$

$\Rightarrow$ $R(\cdot, T)$ beschr. auf



Da $R(\cdot, T)$ stetig ist, ist sie auf [hatched disc] beschr.

$\Rightarrow$ beschr. in $\mathbb{C}$.

Außerdem gilt: $\|R(\lambda, T)\| \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0$,

da $\lambda \cdot R(\lambda, T) = I + \underbrace{T R(\lambda, T)}_{\text{beschr.}} \Rightarrow \|\lambda \cdot R(\lambda, T)\| \leq C$

$\Rightarrow \|R(\lambda, T)\| \leq \frac{C}{|\lambda|} \longrightarrow 0$

Sei $\varphi \in (\mathcal{L}(X))'$ und betrachte

$$f(\lambda) := \varphi(R(\lambda, T))$$
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

- f beschr. in λ:

$$|f(\lambda)| \underset{\varphi \text{ beschr.}}{\leq} \|\varphi\| \cdot \underbrace{\|R(\lambda,T)\|}_{\text{beschr. in } \lambda}$$

- f holom.:

$$\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu} \underset{\varphi \text{ lin.}}{=} \varphi\Bigg(\underbrace{\frac{R(\lambda,T)-R(\mu,T)}{\lambda-\mu}}_{\xrightarrow[\mu\to\lambda]{} -R^2(\lambda,T)}\Bigg)$$

$$\xrightarrow[\mu\to\lambda]{\varphi \text{ stetig}} \varphi\left(-R^2(\lambda,T)\right).$$

Satz von Liouville: $f \equiv$ konst.

Da $|f(\lambda)| \leq \|\varphi\| \cdot \|R(\lambda,T)\| \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0$,

muss $f \equiv 0$.

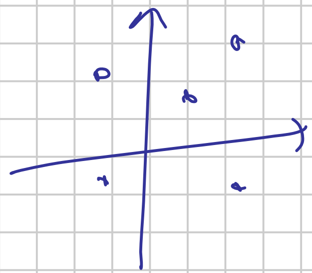
D.h., $\forall \varphi \in (\mathcal{L}(X))'$ gilt $\varphi(R(\lambda,T)) = 0 \quad \forall \lambda$

Hahn-Banach: $R(\lambda,T) = 0 \quad \forall \lambda$

$\lightning$ (0 nicht inv.) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp 1.5}}$ 1) $X = \mathbb{C}^n \Rightarrow \sigma(T) = P_\sigma(T)$

$\forall \lambda_0 \in \sigma(T)$ ist eine isolierte Singularität und ein Pol der Resolvente(nabb.), d.h., $\exists k = k(\lambda_0)$ s.d.



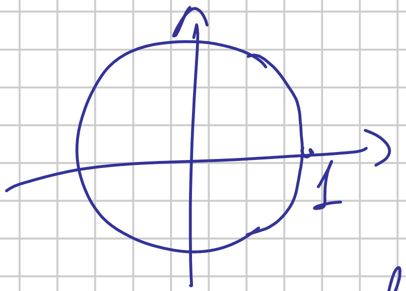
$$\lambda \longmapsto (\lambda - \lambda_0)^k R(\lambda, T)$$

holom. in einer Umgebung von λ_0.

Bew. – ☺ (Jordanische Normalform)

2) $T: \ell^1 \to \ell^1$ (oder $c_0 \to c_0$, $\ell^p \to \ell^p$, $p \in [1, \infty)$)

$T(t_1, t_2, \dots) = (t_2, t_3, \dots)$ – Linksshift

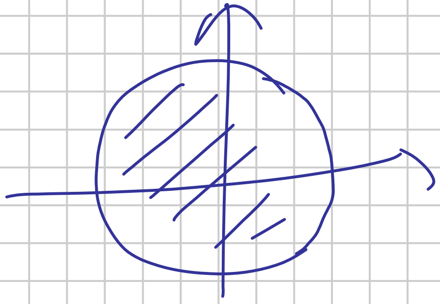


$\|T\| = 1 \Rightarrow \sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$

Wir zeigen: „="

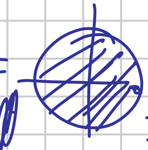
Sei λ mit $|\lambda| < 1$

Dann ist $\lambda \in P_\sigma(T)$, da



$$Tx = \lambda x \iff (t_2, t_3, \dots) = (\lambda t_1, \lambda t_2, \dots)$$
$$\iff t_2 = \lambda \cdot t_1,\ t_3 = \lambda t_2 = \lambda^2 t_1, \dots$$
$$\iff x = t_1 \cdot \underbrace{(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)}_{\in \ell^1\ (c_0,\ \ell^p,\ p<\infty)}$$

D.h., $\sigma(T) \supset \{\lambda : |\lambda| < 1\}$,
abg. $\Rightarrow \sigma(T) \supset \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$, also $=$.

Bem. 1) Auf ℓ^∞ hat man sogar $P_\sigma(T) = \sigma(T) =$  1

2) Wir haben hier überabz. viele Eigenwerte!
(∀ Eigenraum ist aber 1-dim.)

3) Multiplikatoren

3a) $X = C[0,1]$, $Tf = gf$ für eine gegebene Fkt $g \in C[0,1]$

Es gilt $\|T\| = \|g\|_\infty$ $\left(\begin{array}{l} \leq \text{ klar} \\ \geq\ f = \mathbb{1} \end{array} \right)$

Wir zeigen: $\sigma(T) = g([0,1]) = \text{Bild}(g)$

- sei $\lambda \notin g([0,1]) \overset{\uparrow}{\Longrightarrow} d := \text{dist}(\lambda, g([0,1])) > 0$.

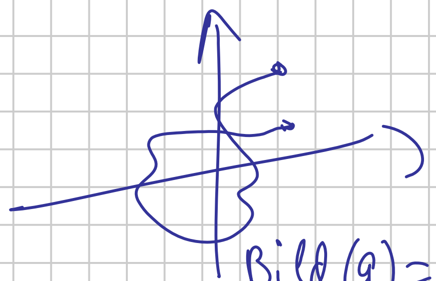
  $g([0,1])$ abg.

  $\exists\ (\lambda - T)^{-1} f = \dfrac{1}{\lambda - g} f \quad \Longrightarrow \lambda \in \rho(T)$

  $\dfrac{1}{\lambda - g} \overset{\|\cdot\|}{\leq} \dfrac{1}{d}$

- sei $\lambda \in g([0,1])$, d.h., $\lambda = g(s)$ für ein $s \in [0,1]$.

  $((\lambda - T)f)(s) = ((\lambda - g) \cdot f)(s) = 0 \quad \forall f$,



d.h., $\mathrm{Bild}(\lambda - T) \subset \{g : g(S) = 0\}$,
also ist $\lambda - T$ nicht surj.

3b) Folgenräume: ℓ^1 (oder c_0 oder ℓ^p)

$$T(t_1, t_2, \ldots) := (a_1 t_1, a_2 t_2, \ldots)$$

für eine beschr. Folge $(a_j) \in \ell^\infty$.

Es gilt: $\|T\| = \|a\|_\infty$ (Warum?) und

$$\sigma(T) = \overline{\{a_j, j \in \mathbb{N}\}}$$

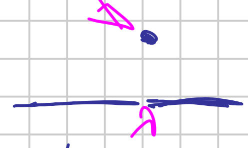
Ü analog zu 2)

3c) Funktionen auf $K \subset \mathbb{C}$
für $K \subset \mathbb{C}$ komp. Betrachte

$X := C(K)$, $(Tf)(z) = z \cdot f(z)$

Wie in 3a):

$$\sigma(T) = \{z : z \in K\} = K$$

<u>Bem.</u> $\lambda \in P_\sigma(T) \Leftrightarrow \lambda$ isoliert in K 

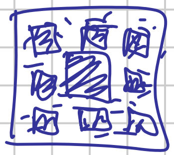
stetig nur wenn λ isoliert.

$(zf(z) = \lambda f(z) \Rightarrow f(z) = 0 \ \forall z \neq \lambda)$

$\boxed{\text{Bem.}}$ Bsp 3c) und 3b) zeigen:

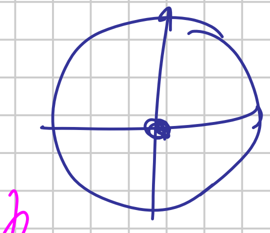
$\forall K \subset \mathbb{C}$ komp. $(\neq \emptyset)$ $\exists T$ mit $\sigma(T) = K$,

d.h., i.A. $\exists$ keine weiteren Einschränkungen für $\sigma(T)$.

(Cantormenge, Sierpinski-Teppich  möglich...)

Aber: $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \le \|T\|\}$ kann oft verbessert werden, d.h., $\sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| < \|T\|$ i.A. möglich

$\boxed{\text{Bsp.}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 10000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\sigma(T) = \{0\}$, aber $\|T\| = 10000$



$\boxed{\text{Def 1.6}}$ Die Zahl

$$r(T) := \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

$\exists$, da $\sigma(T)$ komp.

heißt Spektralradius von T

Wir wissen: $r(T) \le \|T\|$.

Genaue Formel für $r(T)$?

$\boxed{\text{Lemma 1.7}}$ Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ mit

$$0 \leq a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m \quad \forall n, m.$$

Dann $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf \sqrt[n]{a_n}$.

<u>Beweis</u> Def. $a := \inf \sqrt[n]{a_n}$ und sei $\varepsilon > 0$

und N mit $\sqrt[N]{a_N} < a + \varepsilon$.

Def. $b := \max\{a_1, \dots, a_N\}$ und schreibe $\forall n$

$n = k \cdot N + r$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $r \in \{1, \dots, N\}$

Wir haben:

$$\sqrt[n]{a_n} = a_{k\cdot N+r}^{\frac{1}{n}} \overset{\text{Vorauss.}}{\le} \left(a_N^k \cdot a_r\right)^{\frac{1}{n}} \le \qquad a_r \le b,\ a_N < (a+\varepsilon)^N$$

$$\le (a+\varepsilon)^{\frac{Nk}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \qquad \boxed{\frac{Nk}{n} = 1 - \frac{r}{n}}$$

$$= (a+\varepsilon)\cdot \underbrace{(a+\varepsilon)^{\frac{-r}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}$$

$$\le a + 2\varepsilon \quad \text{für große } n.$$

D.h.,

$$a = \inf \sqrt[n]{a_n} \le \underbrace{\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \le}_{} \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \le a$$

und damit $\quad a = \lim \sqrt[n]{a_n}$

$\blacksquare$

Thm. 1.8 Für $T \in \mathcal{L}(X)$ gilt

$$\boxed{r(T) = \inf \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.}$$

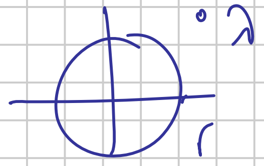
<u>Bem.</u>: $\exists \lim = \inf$ nach Lemma 1.7 für $a_n := \|T^n\|$: $\|T^{n+m}\| \leq \|T^n\| \cdot \|T^m\|$

<u>Beweis</u> Bezeichne $r := \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \ldots$

ZZ: $r(T) = r$.

<u>Teil 1</u>: $r(T) \leq r$

Sei λ mit $|\lambda| > r$. ZZ: $\lambda \in \rho(T)$



Dafür zeigen wir: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$ konv. (*)

(dann ist $\frac{1}{\lambda} \cdot$ Reihe $= R(\lambda, T)$)

Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \frac{T^n}{\lambda^n} \right\|^{\frac{1}{n}} = \frac{r}{|\lambda|} < 1$ Voraus.

Wurzelkrit.: $\sum \frac{T^n}{\lambda^n}$ konv.: $(*)$ bewiesen.

<u>Teil 2</u> $r(T) \geq r$