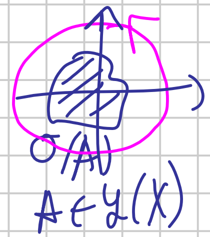
Notiztitel 04.07.2018

<u>Idee:</u> Probiere $e^{tA} := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{t\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda$

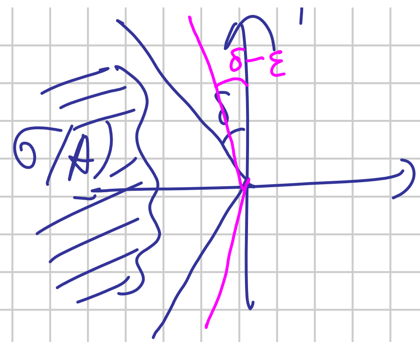


von $A \in \mathcal{L}(X)$ auf eine größere Klasse von Operatoren zu verallgemeinern.

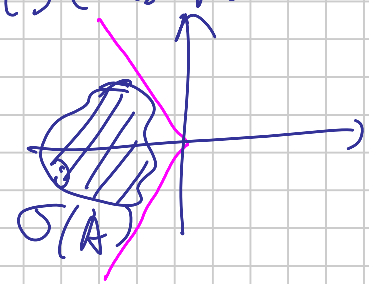
$\boxed{\text{Def 5.1}}$ 1) Bezeichne $\Sigma_\delta := \{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \delta \}$,

2) Sei $(A, D(A))$ abg., linear. A heißt sektoriell (vom Winkel δ), wenn für ein $\delta \in (0, \pi/2]$

$$\begin{cases} \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} \subset \rho(A) \\ \|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \text{ auf } \Sigma_{\pi/2+\delta-\varepsilon} \setminus \{0\} \\ \text{für } \forall \varepsilon \in (0, \delta) \end{cases}$$



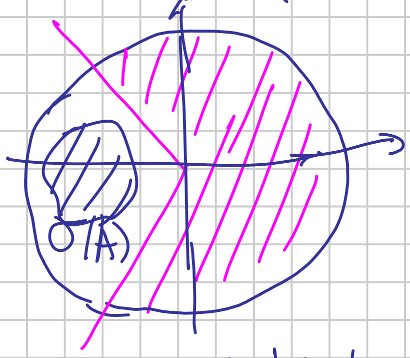
$\boxed{\text{Bsp 5.2}}$ 1) $\underline{A \in \mathcal{L}(X)}$ mit $s(A) < 0$, d.h., $\sigma(A) \subset \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ $\underline{\text{ist sektoriell}}$.

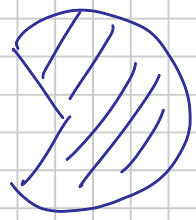


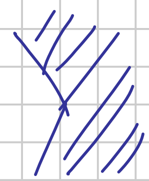
__Beweis__ Für $|\lambda| \geq \|A\| + 1$ gilt

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n}_{\|\cdot\| \leq \frac{1}{1-\frac{\|A\|}{|\lambda|}} \leq \frac{1}{1-\frac{\|A\|}{\|A\|+1}}}$$

$\Rightarrow$ $\lambda \cdot R(\lambda, A)$ ist beschr. außerhalb von $U_{\|A\|+1}(0)$



Auf  ist $\lambda \cdot R(\lambda, A)$ beschr., da stetig

$\Rightarrow$ $\lambda \cdot R(\lambda, A)$ beschr. $\forall$  außerhalb des Spektrums

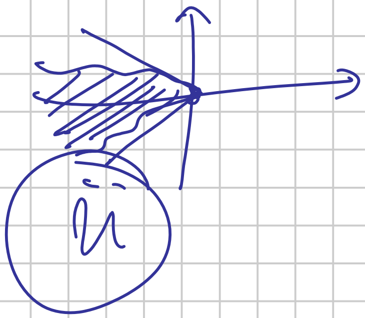
2) <u>Multiplikatoren</u>:

$X = C_0(\mathbb{C}),\ C_0(\mathbb{R}),\ L^p(\mathbb{R}), \dots$

$Af = q \cdot f$ für ein q, $D(A) := \{f \in X : qf \in X\}$ max. Def'Bereich

Dann ist $(A, D(A))$ sektoriell $\Leftrightarrow$

$$\exists \delta: \ \Sigma_{\pi/2+\delta} \subset \rho(A)$$

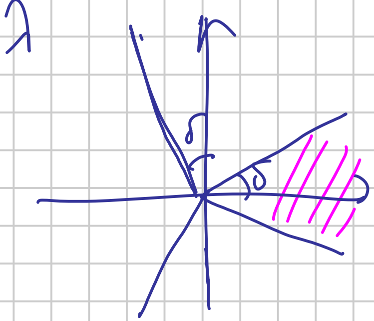


$\Leftrightarrow \ \overline{\text{Bild}\, q} \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\pi/2+\delta}$ für ein $\delta > 0$.

$\boxed{\text{Def. 5.3}}$ **Def.** $T(0) := I$ und

$$T(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda$$

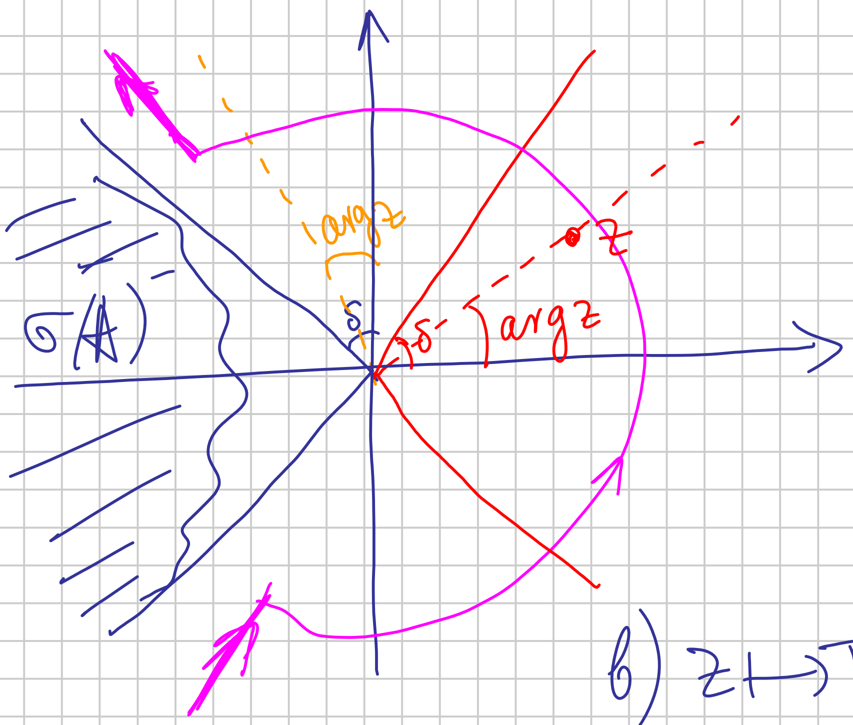
für $z \in \Sigma_\delta$ mit folgendem γ:



γ ein stetiger Weg „um“ $\sigma(A)$

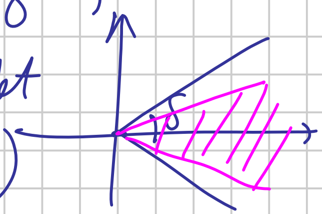
von $\infty \cdot e^{-i(\frac{\pi}{2}+\tilde{\delta})}$ für ein $\tilde{\delta} \in (|\arg z|, \delta)$.

nach $\infty \cdot e^{i(\pi/2+\tilde{\delta})}$



$\boxed{\text{Prop. 5.4}}$ $\forall z \in \Sigma_\delta$ ist $T(z) \in \mathcal{L}(X)$ unabh. von γ und es gelten:

a) $\|T(z)\| \le M_{\delta'}$ $\forall z \in \Sigma_{\delta'}$, $\delta' < \delta$
($T(\cdot)$ ist gleichm. beschränkt auf kleineren Sektoren)



b) $z \mapsto T(z)$ ist holomorph (analytisch) in Σ_δ
(Achtung: i. A. nicht in 0!)

c) $T(z_1+z_2) = T(z_1)T(z_2)$ auf Σ_δ

d) Wenn A dicht def. ist, dann ist $z \mapsto T(z)$ stark stetig auf $\Sigma_{\delta'} \cup \underline{\underline{\{0\}}}$ $\forall \delta' < \delta$.

<u>Beweis</u> <u>Teil 1</u>: $T(z) \in \mathcal{L}(X)$

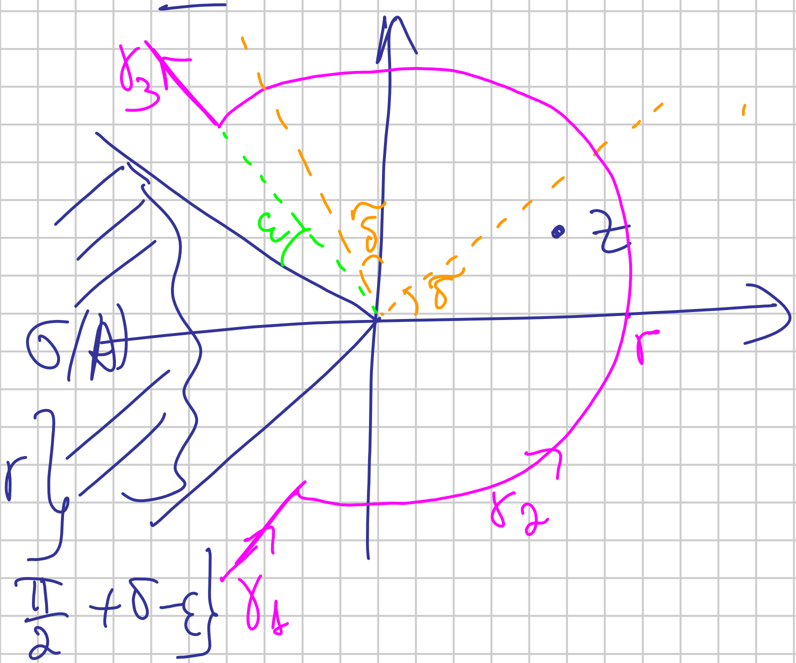
Sei $z \in \Sigma_{\tilde{\delta}}$. Betrachte

$\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$:

$\gamma_1 := \{ -\rho\, e^{-i(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon)} , -\infty < \rho \leq -r \}$

$\gamma_2 := \{ r e^{i\alpha} , -(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon) < \alpha < \frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon \}$

$\gamma_3 := \{ \rho\, e^{i(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon)} , r \leq \rho < \infty \}$,

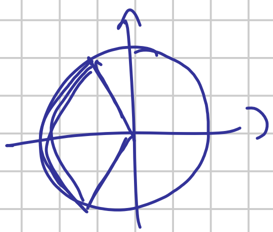


wobei $r := \frac{1}{|z|}$, $\varepsilon := \frac{\delta - \tilde{\delta}}{2}$

Sei $\lambda \in \gamma_3$

Es gilt: $\arg \lambda = \frac{\pi}{2} + \delta - \varepsilon$. Also:

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\delta - \varepsilon - \tilde{\delta}}_{2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon} \leq \arg \lambda + \arg z \leq \frac{\pi}{2} + \underbrace{\delta}_{\leq \frac{\pi}{2}} - \varepsilon + \underbrace{\tilde{\delta}}_{\leq \frac{\pi}{2}} \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$



und damit: $\boxed{\cos(\arg \lambda + \arg z) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\sin \varepsilon}$

$$\| e^{\lambda z} R(\lambda, A) \| \leq e^{Re(\lambda z)} \cdot \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \leq e^{|\lambda| \cdot |z| \cdot (-\sin \varepsilon)} \cdot \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$$

$Re\, w = |w| \cdot \cos(\arg w)$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} \|e^{\lambda z} R(\lambda, A)\| \, |d\lambda| \leq M_\varepsilon \int_r^\infty \frac{e^{-\rho |z| \sin \varepsilon}}{\rho} \, d\rho \quad \text{– konv. gleichmäßig auf komp. Mengen aus } \Sigma_{\tilde{\delta}}$$

zuerst parametr., dann absolutes Integral nehmen

$\gamma_3 : [r, \infty) \to \mathbb{C}$

$\gamma_3(\rho) = \rho e^{i(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon)}$

$\gamma_3'(\rho) = e^{i\cdots}$

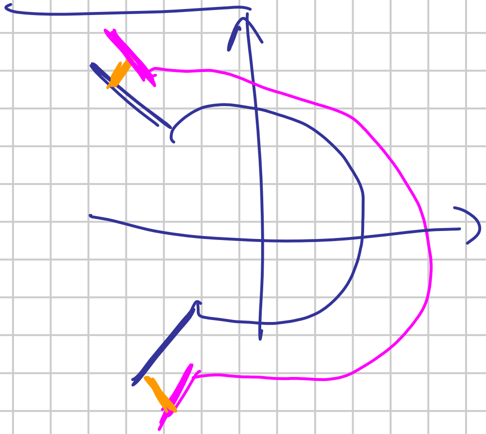
(d.h., $r' \leq |z| \leq R$, $r = \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{R}$)

Also konv. $\int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda, A) \, d\lambda$ absolut und gleichm. auf komp. Mengen aus $\Sigma_{\tilde{\delta}}$

Für γ_1: analog.

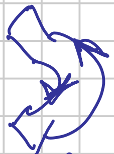
Für γ_2 is alles sowieso gut.

Teil 2 $T(z)$ ist unabh. von γ.



$$\int e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda = 0 \quad (CIS)$$

Cauchyscher Integralsatz



und

$$\int e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda \longrightarrow 0,$$

da $\left|\frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\right| = \frac{e^{Re(\lambda z)}}{|\lambda|} \xrightarrow[\text{exp. schnell}]{} 0$

$|\arg z| < \tilde{\delta}$

$|\arg \lambda| > \frac{\pi}{2} + \tilde{\delta}$

$|\arg z + \arg \lambda| > \frac{\pi}{2}$

Also gilt: $\int = \int$

a) $\|T(z)\|$: Nimm γ wie in Teil 1!

$$\|T(z)\| \leq \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \leq \int_{\gamma_2} + 2 M_\varepsilon \int_{\underset{=\frac{1}{|z|}}{r}}^{\infty} \frac{e^{-\rho|z|\sin\varepsilon}}{\rho|z|} |z| \, d\rho$$

$\rho \rightsquigarrow \rho \cdot |z|$

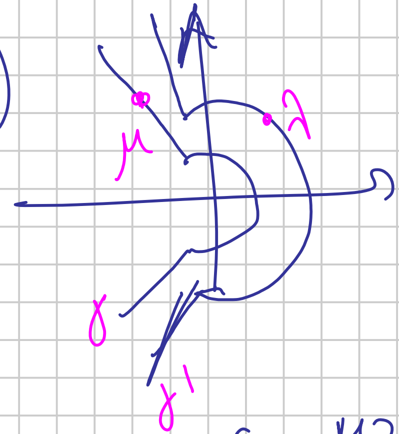
$$= \int_1^\infty \frac{e^{-\rho\sin\varepsilon}}{\rho} \, d\rho$$

$$\leq \underbrace{2\pi \cdot \cancel{r} \, e^{\overset{=1}{r|z|}} \frac{M_\varepsilon}{\cancel{r}}}_{= 2\pi e M_\varepsilon} + 2 M_\varepsilon \int_1^\infty \frac{e^{-\rho\sin\varepsilon}}{\rho} \, d\rho$$

$\mathrm{Re}(\lambda z) \leq |\lambda z|$

b) $z \longmapsto T(z)$ ist holom. als gleichm. Limes holom. Fkt'en auf jedem Kompaktem in Σ_δ

c)



$$T(z_1)\,T(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu z_1} R(\mu, A)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} e^{\lambda z_2} R(\lambda, A)\, d\lambda\right) d\mu$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma \left(\int_{\gamma'} e^{\mu z_1} \cdot e^{\lambda z_2} \cdot \underbrace{R(\mu, A) R(\lambda, A)}_{\frac{R(\mu,A) - R(\lambda,A)}{\lambda-\mu}}\, d\lambda\right) d\mu$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu z_1} R(\mu, A)\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda-\mu}\, d\lambda\right)}_{\mathrm{I}} d\mu \;-$$

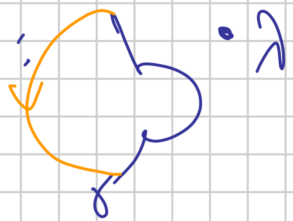
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} e^{\lambda z_2} R(\lambda, A)\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda-\mu}\, d\mu\right)}_{\mathrm{II}} d\lambda \quad =$$

Zu I:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda-\mu}\, d\lambda \underset{\text{CIF}}{=} e^{\mu z_2}$$ und

$$\left|\int \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda-\mu}\,d\lambda\right| \le 2\pi\cdot R\cdot e^{-R\cdot|z_2|\cdot\sin\varepsilon} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

D.h., $I = e^{\mu z_2}$

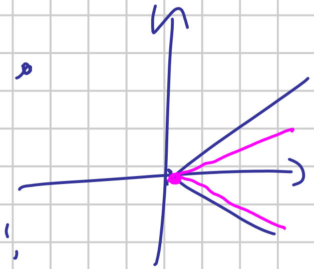
Zu II:  Analog zu I: $II = 0$ (CIS)

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \underbrace{e^{\mu z_1}\cdot e^{\mu z_2}}_{e^{\mu(z_1+z_2)}} R(\mu,A)\,d\mu = T(z_1+z_2).$$

d) Aus b) folgt: $T(\cdot)$ ist stark stetig in Σ_δ.

ZZ: starke Stetigkeit in 0 $\forall \Sigma_{\delta'}$, $\delta'<\delta$.

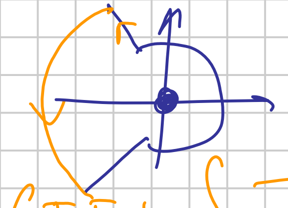
Da $\|T(z)\|$ in $\Sigma_{\delta'}$ beschr. ist, reicht es z.z.:



$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Sigma_{\delta'}}} T(z)x = x \qquad \forall x \in \underbrace{D(A)}_{\text{dicht.}}$$ (warum?)

Sei $x \in D(A)$ und γ fest.

Beobachtung: $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{\mu z}}{\mu} \, d\mu = 1$



(CIF + $\int \to 0$.

Es folgt:

$$T(z)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu z} \Big(\underbrace{R(\mu, A) - \frac{1}{\mu}}_{\frac{1}{\mu} \cdot (\underbrace{\mu R(\mu,A) - I}_{R(\mu,A)A})} \Big) x \, d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \underbrace{\frac{e^{\mu z}}{\mu} R(\mu, A) A x}_{\xrightarrow{z \to 0} \frac{1}{\mu} \cdot R(\mu,A)Ax} \, d\mu$$

$z \to 0$

Integrierbare Majorante:

Auf γ_1 oder γ_3:

$$\left\| \frac{e^{\mu z}}{\mu} R(\mu, A) A x \right\| \le \underbrace{e^{-|\mu|\cdot|z|\cdot\sin\varepsilon}}_{\le 1} \cdot \frac{M_\varepsilon}{\mu^2} \cdot \|Ax\|$$

siehe Teil 1

Auf γ_2:

$$\left\| \frac{e^{\mu z}}{\mu} R(\mu, A) A x \right\| \le \frac{e^{r\cdot|z|}}{r} \frac{M_\varepsilon}{r} \|Ax\|$$

$r\cdot|z| \le 1$

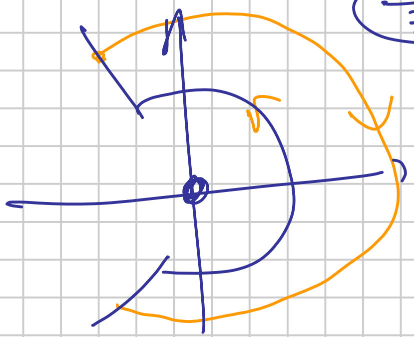
$|e^{\mu z}| \le e^{|\mu z|}$

OBdA $|z| \le 1$, d.h., $r \ge 1$

$\le e M_\varepsilon \|Ax\|$

Lebesgue: $z \to 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{R(\mu, A)}{\mu} A x \, d\mu =$$



CIS: $\int = 0$

$$\left\| \int \dots \right\| \le 2\pi \cancel{R} \cdot \frac{1}{\cancel{R}} \cdot \frac{M_\varepsilon}{R} \|Ax\| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\equiv 0 \implies$ starke Stetigkeit ∎

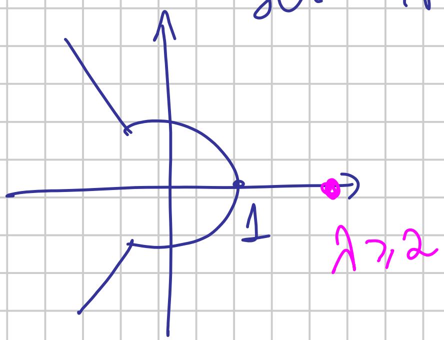
$\boxed{\text{Prop. 5.5}}$ Der Generator von $T(\cdot)$ ist $(A, D(A))$.

<u>Beweis</u> Es reicht zz.: $\exists \lambda > 0$:

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad \forall x \in X,$$

(Für den Generator $(B, D(B))$ gilt $\uparrow$ $\forall \lambda > 0$, da
$T(\cdot)$ beschr. ist und $\omega_0(T) \le 0$.
Wenn $R(\lambda, A) = R(\lambda, B)$ für ein λ, gilt $A = B$)

Sei $\lambda \geq 2$ und nimm γ mit Radius 1 bei γ_2.

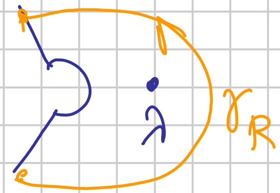


$$\int_0^{t_0} e^{-\lambda t} T(t) x \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} \left[\int_\gamma e^{\mu t} R(\mu, A) x \, d\mu \right] dt$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\mu, A) x \underbrace{\left[\int_0^{t_0} e^{(\mu-\lambda)t} \, dt \right]}_{\frac{1}{\mu-\lambda}\left[e^{(\mu-\lambda)t_0} - 1\right]} d\mu$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{R(\mu, A) x}{\mu - \lambda} d\mu}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda} R(\mu, A) x \, d\mu}_{\mathrm{II}} \xrightarrow[t \to \infty]{}$$

zu I: Betr.



$$\left\| \int_{\gamma_R} \frac{R(\mu, A)x}{\mu - \lambda}\, d\mu \right\| \leq 2\pi \cancel{R} \cdot \frac{M_\varepsilon}{\cancel{R}} \cdot \frac{1}{R-\lambda} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$|\mu-\lambda| \geq |\mu| - |\lambda| = R - \lambda$$

CIF: $I = R(\lambda, A)x$

Zu II: $\left\| \int_\gamma \dots \right\| \leq e^{-t_0} \|x\| \cdot M_\varepsilon \cdot \int_\gamma \frac{1}{|\mu-\lambda| \cdot |\mu|} |d\mu| \xrightarrow[t_0\to\infty]{} 0$

$\mathrm{Re}(\lambda - \mu) \geq 1$

$e^{t_0(\mu-\lambda)} = e^{t_0 \cdot \mathrm{Re}(\mu-\lambda)} \leq e^{-t_0}$

$\xrightarrow[t_0\to\infty]{} R(\lambda, A)x \quad \forall x.$

Def. 5.6 Eine Familie $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}} \subset \mathcal{L}(X)$ heißt $\underbrace{\text{analytische (oder: holomorphe) HG}}$ vom Winkel $\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$

wenn:

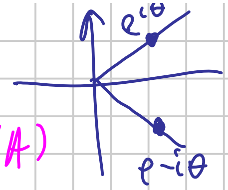
- $T(0) = I$, $T(z_1 + z_2) = T(z_1) \cdot T(z_2)$ auf Σ_δ
- $z \mapsto T(z)$ ist holom. auf Σ_δ
- $T(z)x \xrightarrow[z \in \Sigma_{\delta'}]{z \to 0} x \quad \forall \delta' \in (0, \delta) \quad \forall x \in X$.

Wenn $(T(z))$ beschr. auf $\Sigma_{\delta'}$ $\forall \delta' \in (0, \delta)$, dann heißt $T(\cdot)$ beschr. analytische HG.

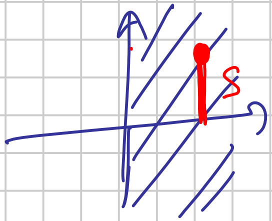
<u>Bem.</u> $t \mapsto T(t)$ ist insb. normstetig auf $(0, \infty)$, aber i.A. nicht auf $[0, \infty)$ (wenn $A \notin \mathcal{L}(X)$).

$\boxed{\text{Th 5.7}}$ Für $(A, D(A))$ auf einem BR X sind äquiv.:

(i) $A \rightsquigarrow$ beschr. analytische HG $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$



(ii) $\exists\, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$: $e^{\pm i\theta} \cdot A \rightsquigarrow$ beschr. C_0-HG



(iii) $A \rightsquigarrow$ beschr. C_0-HG s.d. $\exists\, C > 0$ mit

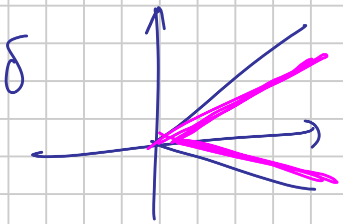
$$\|R(r+is, A)\| \le \frac{C}{|s|} \quad \forall r > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(iv) A ist sektoriell und d.d.

Beweis (skizze): (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) ← siehe oben

(i) $\Rightarrow$ (ii) Def. $T_\theta(t) := T(e^{i\theta} t)$ für $0 < \theta < \delta$

$T_{-\theta}(t) := T(e^{-i\theta} t)$,



$e^{i\theta} A \rightsquigarrow T_\theta(\cdot)$, $e^{-i\theta} A \rightsquigarrow T_{-\theta}$. $\bar{u}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $s > 0$, dann

$\mathrm{Re}\left((r+is)e^{-i\theta}\right) > 0$

Hille-Yosida für $e^{-i\theta}A$:

$$\|\underbrace{R(r+is, A)}_{(r+is-A)^{-1}}\| = \left\| e^{-i\theta}\left(e^{-i\theta}(r+is) - e^{-i\theta}A\right)^{-1}\right\|$$

$$\leq \frac{M}{\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}(r+is)\right)} = \frac{M}{ar+bs} \leq \frac{M}{bs} = \frac{c}{s}$$

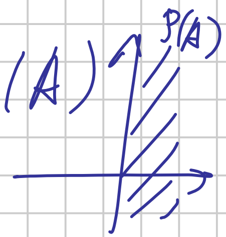
$e^{-i\theta} = a - ib$

$\mathrm{Re}\left((a-ib)(r+is)\right) = ar + bs$

Analog: $s<0$ (benutze $e^{i\theta}A$)

Hille-Yosida für A: analog (ii).

(iii) ⟹ (iv) $(A, D(A))$ Generator einer beschr. C_0-HG $\Rightarrow \Sigma_{\frac{\pi}{2}} \subset \rho(A)$



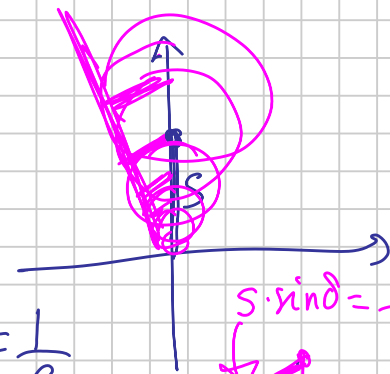
Da $\|R(\lambda, A)\| \geq \dfrac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A))}$

und $R(\lambda, A)$ beschr. für $\lambda = r + is \xrightarrow[r \downarrow 0]{} is$ ist,

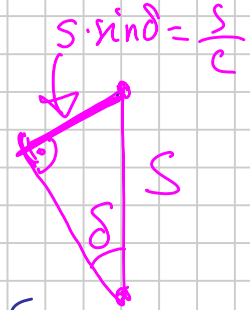
gilt $i\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(A)$. Aus

$$\frac{1}{\operatorname{dist}(is, \sigma(A))} \leq \|R(is, A)\| \leq \frac{C}{|s|}$$

folgt: $\operatorname{dist}(is, \sigma(A)) \geq \frac{1}{C} \cdot |s|$, d.h.,



$$\Sigma_{\pi/2 + \delta} \subset \rho(A) \text{ für } \delta \text{ mit } \sin\delta = \frac{1}{C}$$



zz: Resolventenabschätzung $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$ auf $\Sigma_{\pi/2 + \delta - \varepsilon}$

<u>Fall 1</u> $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Wir haben:

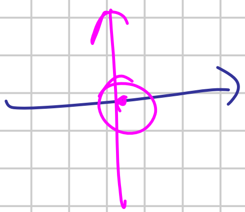
$$\begin{cases} \|R(\lambda, A)\| \le \dfrac{c}{|\operatorname{Im}\lambda|} & \text{(Annahme)} \\ \|R(\lambda, A)\| \le \dfrac{M}{\operatorname{Re}\lambda} & (A \rightsquigarrow \text{beschr. } C_0\text{-HG}) \end{cases}$$

Da $|\lambda| = \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2} \le \sqrt{2} \cdot \max\{\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Im}\lambda\}$

haben wir

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{\max\{c, M\}}{\max\{\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Im}\lambda\}} \le \frac{\overbrace{\sqrt{2}\cdot\max\{c, M\}}^{=:\tilde{M}}}{|\lambda|}$$

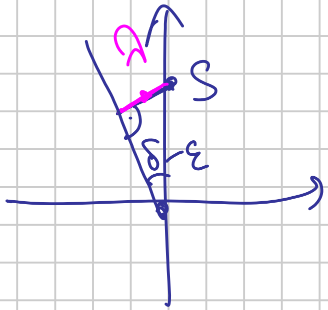
Nenner $\ge \frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$



Fall 2 $\operatorname{Re}\lambda = 0,\ \lambda \neq 0$: Stetigkeit der Resolvente:

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{\tilde{M}}{|\lambda|}$$

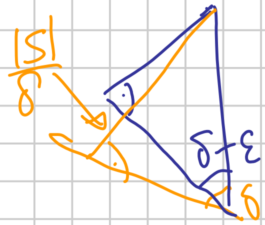
Fall 3 $\operatorname{Re}\lambda < 0$



Sei λ im Intervall wie

Behauptung $\exists q < 1: \quad |\lambda - is| < \frac{|s|}{c} \cdot q \;, \quad q = q(\varepsilon)$

Beweis: ☺



Potenzreihenentw. um is:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \| (is-\lambda)^n R(is, A)^{n+1} \| \leq$$

$$\leq \|R(is, A)\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Big[|is-\lambda| \cdot \|R(is, A)\| \Big]}_{\overset{\text{Behaupt.}}{\leq} \frac{|s|}{c} \cdot q \cdot \frac{c}{|s|}}^{n}$$

$$\leq \frac{c}{|s|} \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$\leq \frac{C}{1-q} \cdot \frac{1}{|\lambda|}$$

$|\lambda| \leq |s|$

$\Rightarrow$ A ist sektoriell.

(iv) $\Rightarrow$ (i) beweisen in 5.4 + 5.5. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp 5.8}}$ (s. a. Operatoren)

Sei $(A, D(A))$ lin., abg., d.d. auf einem Hilbertr. H.

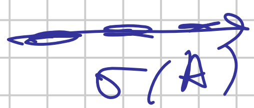
Der adjungierte Operator $(A^*, D(A^*))$ ist def. wie folgt:

$$D(A^*) := \{ x \in H : \exists y \in H \text{ mit } \langle Av, x \rangle = \langle v, y \rangle \ \forall v \in D(A) \}$$

$$A^* x := y$$

Bem., $D(A)$ ist dicht $\Rightarrow$ y eindeutig

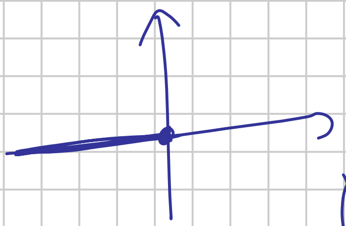
$\langle v, y_1 \rangle = \langle v, y_2 \rangle \;\; \forall v \in D(A) \Rightarrow y_1 = y_2$.



Wie im Fall $A \in \mathcal{L}(X)$ zeigt man: $\sigma(A) = A\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

Es gilt für $(A, D(A))$ s.a.

$A \rightsquigarrow$ beschr. analyt. HG vom Winkel $\pi/2$

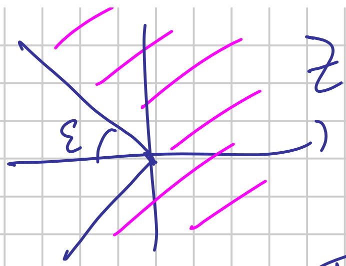


$\Leftrightarrow \sigma(A) \subset (-\infty, 0]$, d.h., $s(A) \leq 0$.

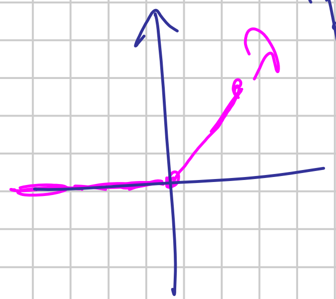
Beweis $\Rightarrow$ klar

$\Leftarrow$ A s.a. $\overset{\text{Ü}}{\Rightarrow}$ $R(\lambda, A)$ normal, also gilt:

$$\|R(\lambda, A)\| \underset{\text{da normal}}{=} r(R(\lambda, A)) = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))}$$



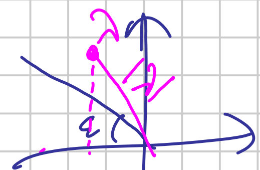
ZZ: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$: $\underbrace{\dfrac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))} \le \dfrac{M_\varepsilon}{|\lambda|}}_{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A)) \ge \frac{|\lambda|}{M_\varepsilon}}$ $\quad \forall \lambda \in \Sigma_{\pi - \varepsilon}$



Fall 1 $\quad \operatorname{Re} \lambda \ge 0$

$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A)) \ge |\lambda - 0| = |\lambda|$$

Fall 2 $\quad \operatorname{Re} \lambda < 0$

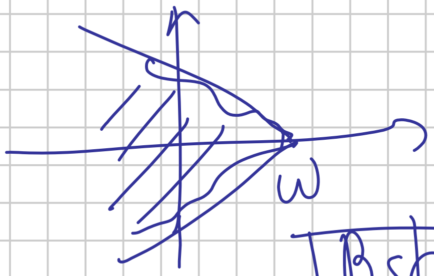


$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A)) \ge |\operatorname{Im} \lambda| \ge |\lambda| \cdot \sin \varepsilon$$

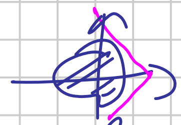
$\Rightarrow A$ ist sektoriell mit Winkel $\pi/2$. Thm 5.7 $\Rightarrow$ $A \rightsquigarrow$ beschr. anal. HG vom Winkel $\pi/2$

$\boxed{\text{Bem. 5.9}}$ $\quad A \rightsquigarrow$ analyt. HG (i. A. nicht beschr.)

$\Leftarrow$) A ω-sektoriell für ein $\omega \in \mathbb{R}$, d.h.
$A - \omega$ ist sektoriell



($\Leftarrow$ klar (?)
$\Rightarrow$) ohne Beweis)



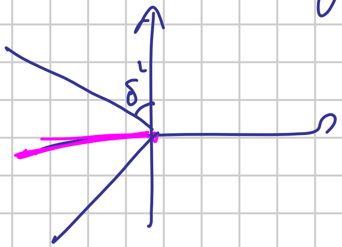
$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $A \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow e^{zA}$ holom. auf ganz $\mathbb{C}$

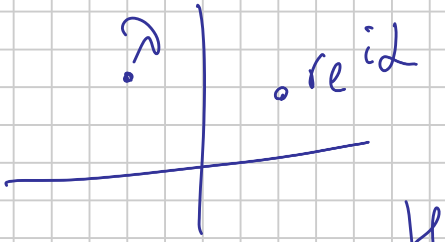
2) A s.a. mit $s(A) < \infty$

3) Multiplikatoren mit $\sigma(A)$ in so einem Sektor

Noch ein Bsp:

$\boxed{\text{Corollar 5.10}}$ Sei $A \rightsquigarrow C_0$-Gruppe. Dann erzeugt $(A^2, D(A^2))$ eine anal. HG vom Winkel $\pi/2$.





<u>Beweis</u> <u>Annahme</u>: $A \rightsquigarrow$ beschr. C_0-Gruppe,

d.h., $A, -A \rightsquigarrow$ beschr. C_0-KG $\quad (-A \rightsquigarrow (T(-t))_{t \geq 0})$

$\sigma(A^2) \subset (-\infty, 0]$ folgt $\quad (\sigma(A) \subset i\mathbb{R})$

Sei $\lambda \in \Sigma_{\pi/2 + \delta'}$, $\delta' \in (0, \pi/2)$

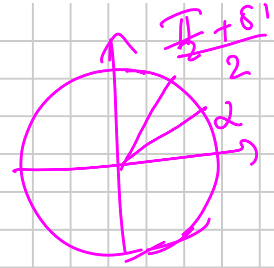
$\Rightarrow \exists\, r e^{i\alpha}$ mit $(r e^{i\alpha})^2 = \lambda$, $\alpha \in [0, \frac{\frac{\pi}{2} + \delta'}{2})$

$\subset [0, \pi/2)$

$$\lambda - A^2 = (r e^{i\alpha} - A)\underbrace{(r e^{i\alpha} + A)}_{r e^{i\alpha} - (-A)}$$

Hille-Yosida für $\pm A$!

$$\|R(\lambda, A^2)\| \leq \|R(r \cdot e^{i\alpha}, A)\| \cdot \|R(r e^{i\alpha}, -A)\|$$



$$\le \left(\frac{M}{\mathrm{Re}(re^{i\alpha})}\right)^2 = \frac{M^2}{r^2\cos^2\alpha} \le \frac{M^2}{r^2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\delta'}{2}\right)}$$

$$= \frac{\tilde{M}}{|\lambda|}$$

$r^2 = |\lambda|$

$\Rightarrow A^2$ sektoriell. $D(A^2)$ ist dicht: Ü

$\boxed{\text{Bsp 5.11}}$ Translationsgruppe auf $C_0(\mathbb{R})$ ist eine beschr. C_0-Gruppe

mit Generator $Af = f'$

$$D(A) = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : f' \in C_0(\mathbb{R})\}$$

Vor. 5.10: $A^2 \rightsquigarrow$ holom. HG vom Winkel $\pi/2$

$A^2 f = f''$

$$D(A^2) = \{ f \in C_0(\mathbb{R}) : f', f'' \in C_0(\mathbb{R}) \}$$

Man kann zeigen: die zugeh. HG ist die Wärmeleitungs HG

$$(T(t)f)(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|s-\tau|}{4t}} f(\tau)\, d\tau$$

<u>Zusammenfassung</u>: Für anal. HG / sektor. Operatoren:

$$\begin{tikzcd}
& (T(t))_{t \in \mathbb{R}_+ \text{ bzw. } \Sigma_\delta} \arrow[dl] \arrow[dr, shift left] & \\
(A, D(A)) \arrow[rr, shift left] & & (R(\lambda, A))_{\lambda \in \rho(A)} \arrow[ll, shift left] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda$$

<u>Vorteile von anal. HG</u>:

- sehr gute Eigenschaften, z. B. Normstetigkeit auf $(0, \infty)$
- „explizite“ Formel durch $R(\lambda, A)$

<u>Nachteile</u>: viele wichtige HG'en sind nicht analytisch.

T bzw. $(T^n)_{n=1}^{\infty}$	$A \rightsquigarrow T(\cdot)$
$r(T)$	$\omega_0(T)$
Neumannsche Reihe für $R(\lambda, T)$	$\int e^{-\lambda t} T(t)\, dt$
- - -	- - -