Notiztitel 02.05.2018

Erinnere:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "{[\cdot]}"'] & \operatorname{Bild} S \\ X/\ker S \arrow[ur, dashed, "\hat{S}"'] & \end{tikzcd} \qquad \hat{S}([x]) := Sx$$

Der Operator $\hat{S}$ ist bij nach Konstr.

Wir zeigen jetzt: $\hat{S}$ ist beschränkt

$$\|\hat{S}[x]\| = \|Sx\| \overset{\text{für } y \in \ker S}{=} \|S(x+y)\| \le \|S\| \cdot \|x+y\| \quad \forall y \in \ker S$$

d.h., $\|\hat{S}[x]\| \le \|S\| \cdot \inf_{y \in \ker S} \|x+y\| = \|S\| \cdot \|[x]\|$

Wir zeigen noch: $\hat{S}^{-1} : \operatorname{Bild} S \to X/\ker S$ beschr., d.h., $\hat{S}$ ist ein Isom.

Beobachtung: $\hat{S}^{-1}$ beschr. $\iff$ $\hat{S}$ von unten beschr.

$$/ \ \|\underbrace{\hat{S}^{-1} y}_{=:z}\| \le C \cdot \|\underbrace{y}_{\hat{S} z}\| \iff \|z\| \le C \, \|\hat{S} z\| \ /$$

Ang., $\hat{S}$ ist nicht von unten beschr., d.h., $\exists\, (x_n) \subset X$:

$$\|[x_n]\| = 1, \quad \underbrace{S x_n}_{\hat{S}([x_n])} \longrightarrow 0.$$

OBdA: $\|x_n\| \le 2$ (sonst: $x_n + \underset{\in \ker S}{y_n}$ für ein passendes y_n).

T kompakt. $\Rightarrow$ $\exists\, (x_{n_k})$: $T x_{n_k} \to x$ für ein $x \in X$.

Damit haben wir:

$$x_{n_k} - \underbrace{Tx_{n_k}}_{\to x} = Sx_{n_k} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ $x_{n_k} \longrightarrow x$ und damit $Sx = 0$

Aber! $$\|[x]\| = \inf_{y \in \ker S} \underbrace{\|x+y\|}_{= \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}+y\|} = \inf_{y\in\ker S} \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}+y\|$$

$$\geq \lim_{k\to\infty} \underbrace{\inf_{y\in\ker S} \|x_{n_k}+y\|}_{\|[x_{n_k}]\| = 1} = 1$$

Warum? :)

↯ (da $Sx = 0$, d.h., $[x] = 0$).

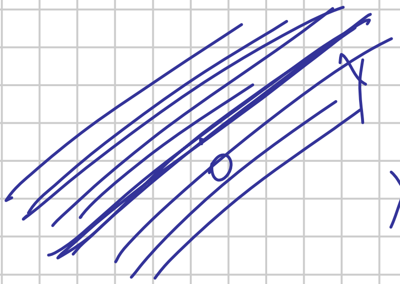
Also ist Bild S isomorph zu $X/\ker S$ $\Rightarrow$ vollständig

$\Rightarrow$ abg. in X.

Teil 2 : $\dim(X/\text{Bild } S) < \infty$.

Ü $Y \subset X$ abg. lin. TR. Dann:

$$(X/Y)' \cong Y^\perp := \{\varphi \in X' : \varphi|_Y = 0\} \subset X'$$



$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{[\cdot]}"] \arrow[dr, dashed, "\pi\psi"'] & X/Y \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

durch $(\pi \underset{\in (X/Y)'}{\psi})(x) := \psi([x])$.

($\psi \in (X/Y)'$ entspricht $\varphi \in X'$, die auf Ä'klassen konstant ist)

Nimm jetzt $Y := \text{Bild } S$

$$(X/\text{Bild } S)' \cong (\text{Bild } S)^\perp \overset{\text{Bem. 1.11}}{=} \text{Ker } S'$$

$\overset{\shortparallel}{I - T'}$ komp. (Schauder)

(a) für S': $\dim \operatorname{Ker} S' < \infty$, also $\dim(X/\operatorname{Bild} S) < \infty$.

(warum folgt aus $\dim X' < \infty$ $\dim X < \infty$?)

Für (c) brauchen wir eine Vorbereitung.

Teile (a) und (b) vom Satz 3.1.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte:

$$N_n := \operatorname{Ker}(S^n), \quad R_n := \operatorname{Bild}(S^n)$$

$$N_0 := \{0\} \qquad R_0 := X$$

Bemerkung: $S^n = (I-T)^n = I - \underbrace{T \cdot \text{etwas}}_{\text{komp.!}}$

also wissen wir nach (a) und (b):

- $\dim N_n < \infty$
- R_n abg. und $\dim(X/R_n) < \infty$.

Außerdem gelten:

$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$ $\quad$ $(x \in N_n \Leftrightarrow S^n x = 0 \Rightarrow S^{n+1} x = 0)$

$R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots$ $\quad$ $(x \in R_{n+1} \Leftrightarrow x = S^{n+1} y = S^n(Sy))$

$\boxed{\text{Bsp 3.2}}$ 1) $X = \mathbb{C}^d$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

$S = I - T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $N_1 = \ker S = \mathrm{lin}\{e_1\}$

$R_1 = \mathrm{Bild}\, S = \mathrm{lin}\{e_1, \dots, e_{d-1}\}$

$S^2 = (I-T)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $N_2 = \ker S^2 = \mathrm{lin}\{e_1, e_2\}$

$R_2 = \mathrm{Bild}\, S^2 = \mathrm{lin}\{e_1, \dots, e_{d-2}\}$

$\vdots$

$S^d = 0 \qquad N_d = X, \; R_d = 0.$

Die Räume N_j, R_j stabilisieren sich ab d.

$\underbrace{\text{mit } X \text{ bzw. } 0.}_{\text{kann für } \infty\text{-dim. } X \text{ nicht passieren, da}}$

dim ker $S < \infty$

dim $(X / \text{Bild } S) < \infty$.

2) $X = \mathbb{C}^{2d}$, $T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

$I - T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

j-te Neben-Diagonale

$(I - T)^j = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & (-1)^j & 0 \\ & \ddots & \ddots & & (-1)^j \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} (-1)^j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (-1)^j \end{matrix}} \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} N_j = \operatorname{Ker}\left((I-T)^j\right) = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_j\} \\ R_j = \operatorname{Bild}\left((I-T)^j\right) = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_{d-j}, e_{d+1}, \dots, e_{2d}\} \end{array}\right\} \text{ für } j < d$$

Für $j \geq d$: $\quad \operatorname{Ker} = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_d\}$

$\qquad \operatorname{Bild} = \operatorname{lin}\{e_{d+1}, \dots, e_{2d}\}$.

$\boxed{\text{Lemma 3.3}}$ a) $\exists$ die kleinste Zahl $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$N_p = N_{p+1}$$

Für dieses p gilt weiterhin

$$N_p = N_{p+1} = N_{p+2} = \dots$$

b) $N_p \cap R_p = \{0\}$

c) $\exists$ die kleinste Zahl $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $R_q = R_{q+1}$.

Für dieses q gilt

$$R_q = R_{q+1} = R_{q+2} = \dots$$

d) $N_q + R_q = X$

e) $p = q$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ **davor**: $X = \mathbb{C}^{2d}$, $S = 1 - T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

$p = q = d$: $S^d = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

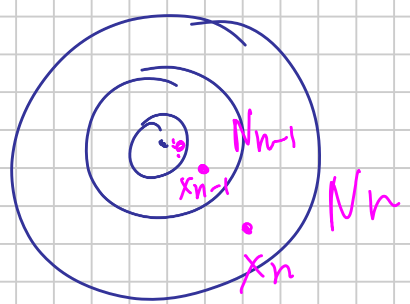
$N_d = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_d\}$

$R_d = \operatorname{lin}\{e_{d+1}, \dots, e_{2d}\}$

__Beweis (Lemma 3.3)__

(a) <u>Teil 1:</u> $\exists p : N_p = N_{p+1}$.

Ang., $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots$



Riesz-Lemma: $\forall n \; \exists x_n \in N_n$ mit

$\|x_n\| = 1$ und

$d(x_n, N_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$.

Wir zeigen: (Tx_n) hat keine konv. TF.

Beobachtung: $S : N_n \to N_{n-1}$. (Sei $x \in N_n$, d.h., $S^n x = 0$. $\Leftrightarrow S^{n-1}(Sx) = 0$ d.h., $Sx \in N_{n-1}$)

Sei $n > m$: $\| \underbrace{Tx_n}_{x_n - Sx_n} - \underbrace{Tx_m}_{x_m - Sx_m} \| = \| x_n - (\underbrace{Sx_n + x_m - Sx_m}_{\in N_{n-1}}) \| \geq$

$\geq d(x_n, N_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (Tx_n)$ hat keine konv. TF $\lightning$ (T komp.).

<u>Teil 2</u> ZZ: $\underbrace{N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_p}_{\text{nach Teil 1}} = N_{p+1} = N_{p+2} = \dots$ (p die kleinste solche Zahl)

Sei $x \in N_{p+2}$. ZZ: $x \in N_{p+1}$.

$x \in N_{p+2} \Leftrightarrow S^{p+2}x = 0 \Leftrightarrow S^{p+1}(Sx) = 0$

$\Leftrightarrow Sx \in N_{p+1} \overset{\text{''}}{=} N_p \Leftrightarrow Sx \in N_p \Leftrightarrow S^{p+1}x = 0$

$\Leftrightarrow x \in N_{p+1}$

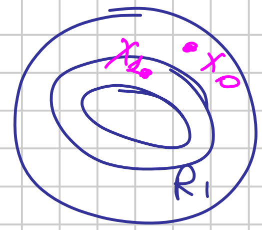
Usw. . . .

(b) Sei $x \in N_p \cap R_p$, d.h., $S^p x = 0$ und $x = S^p y$ für ein y.

Dann $S^{2p} y = S^p x = 0$, d.h., $y \in N_{2p} \overset{(a)}{=} N_p$

Aus $S^p y = 0$ folgt $x = 0$.

(c) Ang., $R_0 \supsetneq R_1 \supsetneq R_2 \supsetneq \dots$



$R_0 = X$

Alle R_n sind abg. (Satz 3.1, b))

Lemma von Riesz: $\forall n \; \exists x_n \in R_n$ mit $\|x_n\| = 1$

und $d(x_n, R_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$

Beobachtung: $S : R_n \to R_{n+1}$: / $x \in R_n \Leftrightarrow x = S^n y$ für ein y $\Rightarrow Sx = S^{n+1} y \in R_{n+1}$ /

Wir haben für $m > n$:

$$\|\underbrace{Tx_n}_{x_n - Sx_n} - \underbrace{Tx_m}_{x_m - Sx_m}\| = \|x_n - (\underbrace{\overset{\in R_{n+1}}{Sx_n} + \overset{\in R_m \subset R_{n+1}}{x_m} - \overset{\in R_{m+1} \subset R_{n+1}}{Sx_m}}_{\in R_{n+1}})\| \geq \frac{1}{2}$$

$\lightning$ ((Tx_n) hat keine konv. TF).

Es gilt also:

$$R_0 \underset{\neq}{\supseteq} R_1 \underset{\neq}{\supseteq} \dots \underset{\neq}{\supseteq} R_q = R_{q+1} \supset R_{q+2} \supset \dots$$

für q.

Dann: $R_{q+1} = R_{q+2}$; d.h., „$\subset$": $x \in R_{q+1}$:

$x = S^{q+1}y = S(S^q y) \overset{\uparrow}{=} S(S^{q+1}z) \in R_{q+2}$

da $R_q = R_{q+1}$

usw.

d) zz: $N_q + R_q = X$.

Sei $x \in X$. Nach c): $S^q x \in R_q = R_{2q}$, d.h., $\exists y: \quad S^q x = S^{2q} y$. Daraus folgt:

$$x = \underbrace{(x - S^q y)}_{S^q(x - S^q y) = S^q x - S^{2q} y = 0,} + \underbrace{S^q y}_{\in \mathrm{Bild}(S^q)} \in N_q + R_q$$

d.h., $\in \mathrm{Ker}(S^q)$

e) Zz: $p = q$.

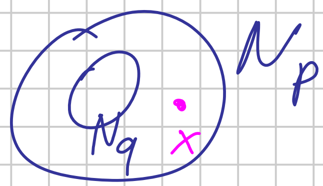
Ang., $p > q$, d.h.,

$$N_0 \subsetneq \dots \subsetneq N_q \subsetneq \dots \subsetneq N_p = N_{p+1} = \dots$$

$$R_0 \supsetneq \dots \supsetneq R_q = \dots = R_p = R_{p+1} = \dots$$

Es gelten: $R_p = R_q$, $N_p \supsetneq N_q$

$\exists\, x \in N_p \setminus N_q$.



Nach d): $\quad x = \underset{\in N_q}{y} + \underset{\in R_q}{z}$. $\quad$ Zz: $z = 0$

$\underset{\in R_q}{\Rightarrow} z = \underset{\in N_p}{x} - \underset{\in N_q \subset N_p \ (p>q)}{y} \in N_p$,

aber $R_q = R_p$, d.h., $z \in R_p \cap N_p = \{0\}$.

$\Rightarrow x = y \in N_q$ ↯

Ang.: $p < q$ $\quad N_p = N_q$

$R_p \supsetneq R_q = \ldots$

Sei $x \in R_p \setminus R_q$. $\quad$ Nach d):

$x = \underset{\in N_q}{y} + \underset{\in R_q}{z}$ $\quad$ Zz: $y = 0$

Es gilt:

$$\overset{N_q = N_p}{\Longrightarrow} \quad y = \underset{\underset{R_p}{\cap}}{x} - \underset{\underset{R_q \subset R_p}{\cap}}{z} \in R_p,$$

d.h., $y \in R_p \cap N_p = \{0\} \Rightarrow x = z \in R_q$ $\lightning$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Korollar 3.4}}$

Sei X Banach, $T \in \mathcal{K}(X)$, $S = I - T$. Dann erfüllen die abg. lin. Teilräume $\tilde{N} := N_p$, $\tilde{R} := R_p$

a) $X = \tilde{N} \oplus \tilde{R}$

b) $\tilde{N}, \tilde{R}$ sind S-inv.

c) $\dim \tilde{N} < \infty$

d) $S|_{\tilde{R}} : \tilde{R} \to \tilde{R}$ ist ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u> a)–c) folgt aus Lemma 3.3.

($\tilde{N}$ S-inv., da $S: \underset{\|\,\tilde{N}}{N_p} \to \underset{\subset N_p = \tilde{N}}{N_{p-1}}$,

$\tilde{R}$ S-inv., da $S: \underset{\tilde{R}\,\|}{R_p} \to \underset{\cap\, R_p = \tilde{R}}{R_{p+1}}$).

d) • $S|_{\tilde{R}}$ surj.:

$$S(\underbrace{\mathrm{Bild}(S^p)}_{R_p = \tilde{R}}) = \mathrm{Bild}(S^{p+1}) \underset{\text{Lemma 3.3}:\ R_{p+1} = R_p}{=} \mathrm{Bild}(S^p)$$

• $S|_{\tilde{R}}$ inj.: Sei $x \in R_p$ mit $Sx = 0$. Dann: $x = S^p y$ für ein y

und $Sx = \underbrace{S^{p+1} y = 0}_{y \in N_{p+1} = N_p}$, d.h., $\underbrace{S^p y = 0}_{x=0}$.

Lemma 3.3

- $S|_{\tilde{R}}$ ist stetig $\Rightarrow$ Isomorphismus ■

Satz vom stetigen Inversen.

$\boxed{\text{Lemma 3.5}}$ Sei $S \in \mathcal{L}(X)$ mit abg. Bild.

Dann gilt:

$$\text{Bild } S' = (\text{Ker } S)^{\perp} = \{\varphi \in X' : \varphi|_{\text{Ker} S} = 0\}$$

(Wir hatten $\text{Ker } S' = (\text{Bild } S)^{\perp}$)

<u>Beweis</u> $\subset$ gilt immer:

$\varphi \in \text{Bild } S'$: $\varphi = S'\psi$ für ein $\psi \in X'$.

Sei $x \in \operatorname{Ker} S$. Dann:

$$\varphi(x) = (S'\psi)(x) = \psi(\underbrace{Sx}_{=0\ (x \in \operatorname{Ker} S)}) = 0 .$$

$\supset$ Behauptung: $\exists\, C > 0 \quad \forall z \in \operatorname{Bild} S \quad \exists x \in X: \ Sx = z$ und $\|x\| \le C\|z\|$.

Beweis der Beh.:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S"] \arrow[d] & \operatorname{Bild} S \\ X/\operatorname{Ker} S \arrow[ur, "\hat{S}"'] & \end{tikzcd}$$

Def. $\hat{S}: X/\operatorname{Ker} S \to \operatorname{Bild} S$ durch

$$\hat{S}([x]) := Sx$$

Da $\operatorname{Bild} S$ abg. ist, ist $\hat{S}^{-1}$ stetig (da $\hat{S}$ bij, stetig), d.h., $\hat{S}$ ist von unten beschr.:

$$\|Sx\| \geq c \cdot \|[x]\| = c \cdot \inf_{y \in \operatorname{Ker} S} \|x + y\|$$

insb. $\exists\, \tilde{x} \in [x]$ mit $\|\tilde{x}\| \leq \frac{2\|Sx\|}{c} = \frac{2}{c} \cdot \|\underbrace{S\tilde{x}}_{z}\|$

$\forall z \;\exists\, \tilde{x}$ mit $S\tilde{x} = z$ mit $\|\tilde{x}\| \leq \frac{2}{c} \cdot \|z\|$ $\blacksquare$ - Behaupt.

Sei $\varphi \in (\operatorname{Ker} S)^\perp$. ZZ: $\varphi = S'\tilde{\varphi}$ für ein $\tilde{\varphi} \in X'$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\varphi"'] & \operatorname{Bild} S \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Betr. $\begin{cases} \psi : \operatorname{Bild} S \to \mathbb{C} \\ \psi(z) = \varphi(x), \text{ wenn } Sx = z \end{cases}$

ψ ist:
- wohldef. (unabh. von $x \in S^{-1}\{z\}$)
- lin., stetig:

  Sei $z \in \operatorname{Bild} S$, x aus der Behaupt.

  $|\psi(z)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|\varphi\| \cdot C\|z\|$

Hahn-Banach: $\exists\ \tilde{\varphi}$ eine Fortsetzung von φ auf X.

Wir haben $\forall x \in X$

$$\underbrace{(S'\tilde{\varphi})(x)} = \tilde{\varphi}(\underbrace{Sx}_{\in \operatorname{Bild} S}) = \varphi(Sx) = \underbrace{\varphi(x)}$$

$\Rightarrow S'\tilde{\varphi} = \varphi$ $\blacksquare$

<u>Beweis des Satzes 3.1, c)</u>

ZZ.: $\dim(X/\operatorname{Bild} S) = \dim(\operatorname{Ker} S) = \dim(X'/\operatorname{Bild} S')$

$= \dim(\operatorname{Ker} S')$

Wir wissen aus dem Beweis von b)

$$\dim(X/\operatorname{Bild} S) = \dim(\operatorname{Ker} S').$$

Es bleiben zz:

1) $\dim(X' / \operatorname{Bild} S') = \dim(\operatorname{Ker} S)$

2) $\dim(X / \operatorname{Bild} S) = \dim(\operatorname{Ker} S)$.

<u>Beweis von 1):</u>

<u>Behauptung:</u> Sei $Y \subset X$ abg. lin. TR. Dann gilt:

$$Y' \cong X' / Y^{\perp}$$

$(Y^{\perp} := \{ \varphi \in X' : \varphi|_Y = 0 \})$

durch: $\pi : X' / Y^{\perp} \to Y'$

$$\pi(\varphi + Y^{\perp}) := \varphi|_Y$$

Bew. der Behaupt.: ii

Nimm: $Y := \operatorname{Ker} S$: $Y^{\perp} = \operatorname{Bild} S'$ (Lemma 3.5)

Wir haben: $\dim(\underbrace{X'/\operatorname{Bild} S'}_{X'/(\operatorname{Ker} S)^{\perp}}) \overset{\text{Behaupt.}}{=} \dim(\operatorname{Ker} S)' = \dim \operatorname{Ker} S$

da $\operatorname{Ker} S$ endlichdim.

Beweis von 2) Erinnere: $X = \underset{\dim < \infty}{\tilde{N}} \oplus \tilde{R}$, $\tilde{N} = N_p = \operatorname{Ker} S^p$

$\tilde{R} = R_p = \operatorname{Bild} S^p$

$\tilde{S} := S|_{\tilde{N}}$

Es reicht z.z.:

2.1) $X/\operatorname{Bild} S \cong \tilde{N}/\operatorname{Bild} \tilde{S}$

2.2) $\dim(\tilde{N}/\operatorname{Bild} \tilde{S}) = \dim(\operatorname{Ker} \tilde{S})$

2.3) $\dim(\operatorname{Ker} \tilde{S}) = \dim(\operatorname{Ker} S)$

2.1) Betrachte $\Phi : \tilde{N}/\operatorname{Bild}\tilde{S} \to X/\operatorname{Bild} S$

$\Phi(x + \operatorname{Bild}\tilde{S}) = x + \operatorname{Bild} S$

- Φ wohldef. $\tilde{N}?$: folgt aus $\operatorname{Bild}\tilde{S} \subset \operatorname{Bild} S$
- Φ lin. – klar
- Φ inj : Sei $x \in \tilde{N}$ mit $\Phi([x]) = 0$, d.h., $x \in \operatorname{Bild} S$

  ZZ.: $x \in \operatorname{Bild}\tilde{S}$

  Da $x \in \operatorname{Bild} S$, $\exists y \in X$ mit $Sy = x$

  Schreibe

  $$y = \underset{\tilde{N}?}{y_1} + \underset{\in \tilde{R}}{y_2} .$$

  ZZ.: $y_2 = 0$, d.h., $x = Sy_1 \in \operatorname{Bild}\tilde{S}$.

Es gilt:

$$\tilde{R} \ni Sy_2 = \underbrace{Sy}_{= x \in \tilde{N}} - \underset{\in \tilde{N}}{Sy_1} \in \tilde{N}$$

$\Rightarrow \quad Sy_2 = 0$, d.h.,

$$x = Sy_1 + \underbrace{Sy_2}_{=0} = \underset{\in \tilde{N}}{Sy_1} \in \operatorname{Bild} S|_{\tilde{N}} = \operatorname{Bild} \tilde{S}.$$

- φ surj.:

Sei $x = \underset{\in \tilde{N}}{x_1} + \underset{\in \tilde{R}}{x_2} \in X$. Da $\tilde{R} = S(\tilde{R})$ (S Isom. auf $\tilde{R}$)

gilt $\quad x - x_1 = x_2 \in \operatorname{Bild} S$,

d.h., $\quad x \in \underset{\in \tilde{N}}{x_1} + \operatorname{Bild} S$

- Φ stetig (und isom.), da endlichdim. Räume.

2.2) $\tilde{N}$ endlichdim. + lin A

2.3) $\ker \tilde{S} = \ker S|_{\tilde{N}} \subset \ker S$

"$\supset$": Sei $x \in \ker S$. Zz.: $x \in \ker \tilde{S}$, d.h., $x \in \tilde{N}$

Zerlege $x = \underbrace{x_1}_{\in \tilde{N}} + \underbrace{x_2}_{\in \tilde{R}}$.

$Sx = 0$ impliziert $\underbrace{Sx_1}_{\in \tilde{N}} = -\underbrace{Sx_2}_{\in \tilde{R}}$

$\Rightarrow Sx_1 = Sx_2 = 0$.

insbesondere: ist $x_2 \in \ker S \subset \ker S^p = \tilde{N}$

$\Rightarrow x_2 = 0$ (da in $\tilde{R}$), d.h., $x = x_1 \in \tilde{N}$.

$\blacksquare$ Beweis von 3)

Folgerung 3.6 (Fredholmsche Alternative)

Sei $T \in \mathcal{K}(X)$, X Banach, und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt genau eine der folg. Aussagen:

a) Die Gleichung

$$\lambda x - Tx = 0 \qquad (1)$$

hat nur die triviale Lösung $x = 0$. In diesem Fall ist die inhomogene Gleichung

$$\lambda x - Tx = y \qquad (2)$$

eindeutig lösbar $\forall y \in X$.

b) $\exists\ d = \dim \operatorname{Ker}(\lambda - T) < \infty$ linear unabh. Lösungen von (1), und auch die adjungierte Gleichung

$$\lambda x' - T' x' = 0 \qquad (1')$$

hat genau d lin. unabh. Lösungen. In diesem Fall ist (2) genau dann lösbar, wenn

$$\varphi(y) = 0 \quad \forall \varphi \in \operatorname{Ker}(\lambda - T')$$

gilt.

<u>Beweis</u>

$$\lambda - T = \lambda \underbrace{\Big(1 - \overset{\text{komp.}}{\frac{T}{\lambda}}\Big)}_{=: S}$$

Wir wissen: $\dim \operatorname{Ker} S =: d < \infty$

Fall 1: $\dim \operatorname{Ker} S = 0 \overset{\text{Satz 3.1 c) + b)}}{\Longrightarrow} \operatorname{Bild} S = X$ — a)

Fall 2: $\dim \operatorname{Ker} S > 0$. $\Longrightarrow$ b)

$(\dim \operatorname{Ker} S \underset{\text{Satz 3.1, c)}}{=} \dim \operatorname{Ker} S')$

ZZ.: $y \in \operatorname{Bild} S \Leftrightarrow \varphi(y) = 0 \quad \forall \varphi \in \operatorname{Ker} S'$

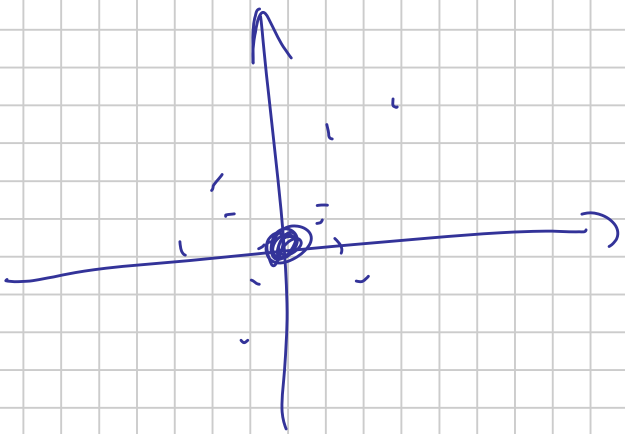
Ü: benutze $\operatorname{Ker} S' = (\operatorname{Bild} S)^\perp$ ∎

Hauptergebnis der Sektion:

Thm. 3.7 (Spektrum von kompakten Operatoren)

Sei $T \in \mathcal{K}(X)$, X Banach.

(a) $\dim X = \infty \Longrightarrow 0 \in \sigma(T)$



(b) $\sigma(T)$ ist höchstens abzählbar

(c) $\forall \lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist ein EW von T mit $\dim \ker(\lambda - T) < \infty$

Ferner $\exists$ Zerlegung

$$X = N(\lambda) \oplus R(\lambda)$$

s.d.

- $N(\lambda)$, $R(\lambda)$ T-inv.
- $\ker(\lambda - T) \subset N(\lambda)$, $\dim N(\lambda) < \infty$, $R(\lambda)$ abg.
- $(\lambda - T)|_{R(\lambda)}$ invert.

(d) $\sigma(T)$ hat keinen Häufungspunkt $\neq 0$.

insbesondere ist $\sigma(T)$ entweder endlich oder eine Nullfolge.

Bemerkung $\sigma(T) = \{0\}$ und $P_\sigma(T) = \emptyset$ möglich (Volterra-Operator)

Beweis des Thms

(a) Ang., $0 \notin \sigma(T)$, d.h., $\exists\, T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

$$\underbrace{I = T \cdot T^{-1}}_{\text{komp.}} \text{ komp.}$$

$\Rightarrow \dim X < \infty$.

(c) $\lambda - T = \lambda \underbrace{\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)}_{=: S}$ komp.

Die Vorarbeit: $N(\lambda) := N_p \ (= \tilde{N})$

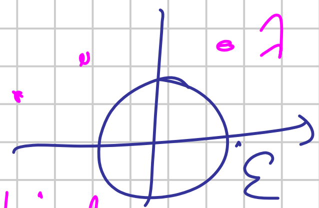
$R(\lambda) := R_p \ (= \tilde{R})$

Wenn $\lambda \in \sigma(T)$, d.h., S nicht invert.,
dann ist S nicht inj. (Satz 3.1 c))

(b)+(d) Wir zeigen: $\forall \varepsilon > 0$ ist

$\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > \varepsilon\}$

leer oder endlich ist.



Ang.; $\exists \varepsilon > 0 : \exists (\lambda_n) \subset \sigma(T)$ mit $|\lambda_n| > \varepsilon \ \forall n$. alle verschieden

Nach c) $\exists (x_n) \subset X$ mit $x_n \neq 0$, $Tx_n = \lambda_n x_n$
($\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$).

Behauptung (x_n) lin. unabh.

Beweis der Beh. Ang., nicht: $\exists\, x_1, \dots, x_k$ lin. unabh.

und $x_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$.

Wir haben:

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = T x_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j x_j$$

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = \lambda_{k+1} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$$

Da $x_1, \dots, x_k$ lin. unabh. sind und $x \neq 0$, gilt $\lambda_{k+1} = \lambda_j$ für ein j $\lightning$ $\blacksquare$-Beh.