Basen in Banachräumen

Wie definiert man eine Basis in Banachräumen, wo man den Begriff der Orthogonalität nicht hat?

1. Hamelbasen

Erster Versuch: Vektorraumbasis im Sinne der Linearen Algebra:

$\boxed{\text{Def}}$ Sei X ein Vektorraum. Eine Familie $(e_\lambda)_{\lambda \in I}$ heißt **Hamelbasis** von X, wenn sie linear unabhängig ist und erfüllt:

$$\forall x \ \exists n \ \ \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in I : \ x = \sum_{j=1}^{n} c_j e_{\lambda_j}.$$

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, abhängig von X

$\boxed{\text{Prop.}}$ Jeder Vektorraum besitzt eine Hamelbasis.

Beweis: Ü – Benutze das Lemma von Zorn.

Allerdings gilt:

$\boxed{\text{Satz}}$ Jeder Banachraum X mit $\dim X = \infty$ besitzt keine abzählbare Hamelbasis.

Beweis: Wir benutzen den Satz von Baire: (siehe Kapitel 6 im Skript)

X vollständig metrisch,

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{Z_k}_{\text{abgeschlossen}} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \exists \text{ offene Kugel} \subset Z_{k_0}.$$

Angenommen, $\exists$ Hamelbasis $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ von X. Definiere

$$Z_k := \text{lin}\{y_1, \dots, y_k\} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Jedes Z_k ist abgeschlossen und $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ nach Voraussetzung.

Nach Baire $\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \exists a \in X\ \exists m \in \mathbb{N}$:

$$a + \frac{1}{m} B_1(0) \subset Z_{k_0}.$$

Da Z_{k_0} ein linearer Teilraum ist, gilt

$$\frac{1}{m} B_1(0) \subset Z_{k_0}$$

und daraus folgt $X \subset Z_{k_0}$. D.h., $\dim X \leq \dim(Z_{k_0}) = k_0$. ∎

Also braucht man eine andere Definition für eine Basis.

2. Schauderbasen und unbedingte Konvergenz.

Def Sei X ein Banachraum. Eine Folge $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ heißt Schauderbasis von X, wenn gilt:

$$\forall x\ \exists! (c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

d.h., $x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Die Standardbasis (e_n) ist eine Schauderbasis in c_0 und ℓ^p für $1 \leq p < \infty$.

2) in $C[0,1]$ und $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, gibt es auch Schauderbasen, z.B. trigonometrische Monome $(e^{2\pi i n \cdot})_{n=-\infty}^{\infty}$.

Bem. 1) $\forall$ Banachraum mit Schauderbasis ist separabel und ∞-dimensional.
warum?

2) im Allgemeinen kommt es auf die Reihenfolge von (e_n) an.

$\boxed{\text{Prop.}}$ Sei X ein Banachraum. Für eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konvergiert $\forall$ Permutation $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

(ii) $\forall$ Teilfolge (x_{n_k}) konv. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$.

(iii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ endliche Teilmenge $H \subset \mathbb{N}$ mit

$$\Big\| \sum_{n \in J} x_n \Big\| < \varepsilon \quad \forall J \subset \mathbb{N} \setminus H \text{ endlich}.$$

(ohne Beweis)

$\boxed{\text{Def}}$ Wenn für $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ die äquiv. Aussagen (i)-(iii) gelten, heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ <u>unbedingt konvergent</u>.

Es gilt also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \overset{(iii)}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ konvergiert unbedingt} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ konv.},$$

aber die Rückrichtungen sind i. A. falsch.

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Unbedingte Konv. $\not\Rightarrow$ absolute Konv.)

$X = c_0$, $x_n = \frac{1}{n} e_n$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ unbedingt nach (iii) warum?

aber nicht absolut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Satz von Dvoretzky-Rogers: $\forall$ ∞-dim. Banachraum $\exists$ unbedingt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren.

$\boxed{\text{Def}}$ Eine Folge $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ heißt unbedingte Schauderbasis von X, wenn gilt

$$\forall x \in X \; \exists! \, (c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : \; x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

wobei die Reihe unbedingt konvergiert.

$\boxed{\text{Bsp}}$ in c ist die Folge (x_n) mit

$$x_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 1, \dots)$$

eine Schauderbasis, aber keine unbedingte Schauderbasis – Warum?

Bem. Bis 1973 hat man keinen separablen Banachraum ohne Schauderbasis gefunden. Es war aber schon vorher bekannt, dass $C[0,1]$ und $L^1[0,1]$ keine unbedingte Schauderbasis besitzen.

1973, Enflo: $\exists$ sep. Banachraum ohne Schauderbasis.

Der Weg dahin (Skizze):

Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Schauderbasis von X. Betrachte für $N \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = x \longmapsto P_N x := \sum_{n=1}^{N} c_n x_n .$$

Die Abbildung P_N ist eine Projektion auf $\mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_N\}$ – linear, stetig und es gilt $\sup_N \|P_N\| < \infty$. Weiter gilt

$$P_N x \xrightarrow[N\to\infty]{} x \quad \forall x \in X, \text{ d.h., } P_N \to \underset{\text{Identität}}{I} \text{ punktweise auf } X.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gilt damit

$$P_N \xrightarrow[N\to\infty]{} I \text{ gleichmäßig auf kompakten Mengen}$$

d.h., X hat Approximationseigenschaft – Ü

$\forall$ komp. Operator lässt sich in Norm durch Operatoren mit endlichem Rang approximieren (siehe Section 9.3 im Skript)

Damit hat man die Implikation

X besitzt eine Schauderbasis $\Rightarrow$ X hat Approximationseigenschaft

Gegenbsp. von Enflo