Notiztitel 28.01.2026

Mehr über Kompaktheit

1. (Prä)Kompaktheit in $C(K)$

Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum.

$\boxed{\text{Def}}$ Eine Teilmenge $M \subset C(K)$ heißt gleichgradig stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall f \in M \; \forall t,s \in K$$
$$d(t,s) < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon .$$

Abkürzung für „gleichgradig gleichmäßig stetig"

$\boxed{\text{Satz}}$ (Arzela-Ascoli)
Sei $M \subset C(K)$. Dann ist M genau dann präkompakt, wenn M beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Beweis $\Rightarrow$ 1) Beschränktheit ist klar.
2) Gleichgradige Stetigkeit:
Präkompaktheit impliziert:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \; \exists f_1, \dots, f_m \in M : \; \forall f \in M \; \|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ für ein $j \in \{1, \dots, m\}$.

Da jedes f_j gleichmäßig stetig auf K ist und es endlich viele Fkt'en sind,
kompakt!

(1) $\exists \delta > 0 : \forall t, s \in K \ \forall j \in \{1, \dots, m\}$
$$d(t,s) < \delta \Rightarrow |f_j(t) - f_j(s)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

insgesamt gilt $\forall f \in M$ und j mit $\|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(t) - f(s)| \le \underbrace{|f(t) - f_j(t)|}_{\le \|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_j(t) - f_j(s)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (1)}} + \underbrace{|f_j(s) - f(s)|}_{\le \|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

D.h., M ist gleichgradig stetig.

$\Leftarrow$ Sei $(f_n) \subset M$. ZZ: $\exists$ konvergente Teilfolge.
zu zeigen

Beobachtung: K ist separabel, d.h., $\exists (s_j) \subset M$ dicht.

Beweis der Beobachtung: Da M präkompakt ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ endlich viele offene Kugeln mit Radius $\frac{1}{n}$, die M überdecken. Die Zentren aller dieser Kugeln bilden eine dichte abzählbare Teilmenge von M. ■ - Beobachtung

Schritt 1: Konstruktion der Teilfolge

Ein Diagonalfolgenargument:

Sei $(s_j) \subset K$ dicht.

Da M beschränkt ist, ist $(f_n(s_1)) \subset \mathbb{C}$ beschränkt und hat also eine konvergente TF nach Heine-Borel:

Teilfolge

$\exists$ eine TF $(f_{n,1})$ von (f_n), die in s_1 konvergiert.

Da $(f_{n,1}(s_2))$ beschränkt ist, $\exists$ eine TF $(f_{n,2})$ von $(f_{n,1})$, die in s_2 (und s_1) konv. usw.:

$$\begin{array}{llll l}
f_{1,1} & f_{2,1} & f_{3,1} & \cdots & \text{- konv. in } s_1 \\
f_{1,2} & f_{2,2} & f_{3,2} & \cdots & \text{- konv. in } s_1, s_2 \\
f_{1,3} & f_{2,3} & f_{3,3} & \cdots & \text{- konv. in } s_1, s_2, s_3 \\
 & \vdots & & &
\end{array}$$

Die TF $(f_{n,n})$ von (f_n) konv. in jedem s_j.

<u>Schritt 2: Konvergenz der Teilfolge</u>

ZZ: Diese TF konv. in $C(K)$.

Bezeichne $g_n := f_{n,n}$.

Da M <u>gleichgradig stetig</u> ist, gilt

noch nicht benutzt

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall t, s \in K$

(2) $\quad d(t,s) < \delta \Rightarrow |g_n(t) - g_n(s)| < \varepsilon.$

Da K kompakt ist,

$\exists r \ \exists$ offene Kugeln $U_1, \dots, U_r \subset K$ mit Radius δ, die K überdecken.

Da (s_j) dicht in K liegen,

$\exists s_{j_1} \in U_1, \dots, \exists s_{j_r} \in U_r.$

Also gilt:

(3) $\quad \forall s \in K \ \ \exists \ell \in \{1, \dots, r\} : d(s, s_{j_\ell}) < \delta.$

Da (g_n) in $s_{j_1}, \dots, s_{j_r}$ konvergiert und es endlich viele Punkte sind,

(4) $\quad \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \geq N \ \ |g_n(s_{j_\ell}) - g_m(s_{j_\ell})| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $\ell \in \{1, \dots, r\}$.

Insgesamt gilt $\forall s \in K$ und ℓ aus (3):

$$|g_n(s) - g_m(s)| \leq \underbrace{|g_n(s) - g_n(s_{j_\ell})|}_{< \varepsilon/3 \text{ nach } (2)} + \underbrace{|g_n(s_{j_\ell}) - g_m(s_{j_\ell})|}_{< \varepsilon/3 \text{ nach } (4)} + \underbrace{|g_m(s_{j_\ell}) - g_m(s)|}_{< \varepsilon/3 \text{ nach } (2)}$$

$< \varepsilon$.

D.h., $\|g_n - g_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ und M ist präkompakt. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Korollar}}$ (Charakterisierung von Kompaktheit in $C(K)$)

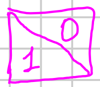
Für einen kompakten metrischen Raum K ist eine Teilmenge $M \subset C(K)$ genau dann kompakt, wenn M beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist.

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Integraloperatoren)

Sei T ein Integraloperator auf $C[0,1]$ von der Form

$$T: C[0,1] \to C[0,1]$$
$$(Tf)(s) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\,dt,$$

wobei $k: [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ meßbar s.d. $\forall s \in [0,1]$ $k(s,\cdot) \in L^1[0,1]$ und die ~~Abbildung~~ $\begin{array}{c} s \mapsto k(s,\cdot) \\ [0,1] \to L^1[0,1] \end{array}$ stetig ist.

z.B. entspricht der Kern $k(s,t) := \begin{cases} 1, & t \le s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ 

dem Volterra-Operator $(Vf)(s) := \int_0^s f(t)\,dt$.

Sie können zur Vereinfachung stetige Kerne betrachten.

Wir zeigen: $T(B_1(0))$ ist präkompakt, d.h., T ist kompakt, mit Arzela-Ascoli.

1) <u>Beschränktheit</u> folgt aus

$$|(Tf)(s)| \le \int_0^1 |k(s,t)|\,|f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\int_0^1 |k(s,t)|\,dt}_{\|k(s,\cdot)\|_{L^1}}$$

$\|k(s,\cdot)\|_{L^1}$ – beschränkt in s nach Voraussetzung (stetige Fkt'en auf komp. Mengen sind beschr.)

Für stetige Kerne hat man hier $\le \|k\|_\infty$.

2) <u>Gleichgradige Stetigkeit</u>:

(5)
$$|(Tf)(s_1)-(Tf)(s_2)| \le \int |k(s_1,t)-k(s_2,t)|\cdot|f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty \cdot \|k(s_1,\cdot)-k(s_2,\cdot)\|_{L^1}$$

Da $s \mapsto k(s,\cdot)$ stetig $\Rightarrow$ gleichmäßig stetig auf $[0,1]$ ist, gilt

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ \forall s_1,s_2 \in [0,1]$

$d(s_1,s_2)<\delta \Rightarrow \|k(s_1,\cdot)-k(s_2,\cdot)\|_{L^1} < \varepsilon$

Also haben wir $\forall f \in B_1(0)$ nach (5)

$|(Tf)(s_1)-(Tf)(s_2)| < \varepsilon$,

also ist $T(B_1(0))$ gleichgradig stetig.

2. (Prä)Kompaktheit in $L^p[0,1]$ und ℓ^p

Analoge Charakterisierungen gelten für andere Räume, z.B.:

$\boxed{\text{Satz}}$ (Fréchet)

Sei $p \in [1,\infty)$. Dann ist $M \subset \ell^p$ präkompakt $\Leftrightarrow$

1) $\sup_{x \in M} |\underbrace{x_k}_{k\text{-te Koordinate}}| < \infty \quad \forall k$ (koordinatenweise Beschränktheit)

und

2) $\sup_{x \in M} \sum_{j=n}^{\infty} |x_j|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (gleichgradige p-Summierbarkeit)

$\boxed{\text{Satz}}$ (Kolmogorov-Riesz)

Sei $p \in [1,\infty)$. Dann ist $M \subset L^p[0,1]$ präkompakt $\Leftrightarrow$

1) M beschränkt

und 2) $\sup_{f \in M} \int_0^1 |\underbrace{f(t+h)}_{\text{hier wird } f:=0 \text{ auf } \mathbb{R}\setminus[0,1] \text{ definiert}} - f(t)|^p \, dt \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

(Ohne Beweis)

– Sie können probieren :)