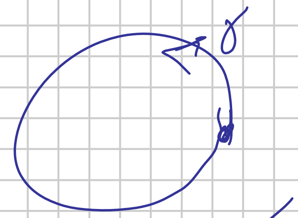
Notiztitel 22.06.2016

5. Der Residuensatz und seine Anwendungen

Erinnere: CIS: $\int_\gamma f = 0$, wenn $f: U \to \mathbb{C}$ holom., $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und geschlossen, U oder γ gut
(U Sterngebiet oder γ umläuft stetiges Bild eines Rechtecks in U)



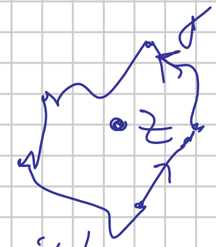
<u>Frage:</u> Was passiert, wenn f in U isolierte Singularitäten hat?

Intuitiv: $\int_\gamma f = 0$, wenn die Singularitäten „draußen" liegen.

Aber:
- Was heißt, drin oder draußen zu liegen?
- Was wenn γ Singularitäten umläuft?
  (und nicht alle davon hebbar)

5.1 Umlaufzahlen

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ geschlossen und stückweise C^1



Sei $z \in \mathbb{C}$

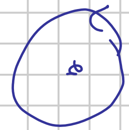
Def 5.1 Die Umlaufzahl von γ bzgl. $z \notin \mathrm{Bild}(\gamma)$ ist def. durch

$$\chi(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw$$

Bsp 1) $\gamma(\varphi) := z + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

2π

$$\chi(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\varphi}} \cdot r \cdot i \cdot e^{i\varphi}\, d\varphi = 1$$

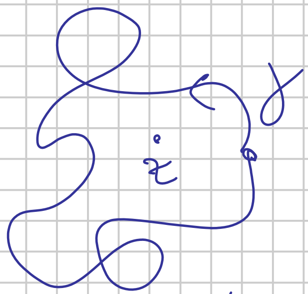


2) $\gamma(\varphi) := z + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi \cdot k]$, $k \in \mathbb{N}$.

$\chi(\gamma, z) = k$

Negative Orientierung $\to$ $-k$.

3) γ so:



Dann gilt: $\chi(\gamma,z) = \chi(\text{Kreis}, z)$

(CIS! $\frac{1}{w-z}$ ist holom. in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$) $= 1$

Geometrische Bedeutung:

Prop. 5.2 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ geschl., stückweise C^1 (insb. stetig), $z \notin \text{Bild}(\gamma)$

(a) $\chi(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$

(b) Wenn $\arg\circ\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$\gamma(t) - z = r(t)\, e^{i \arg(\varphi(t))}$$

gewählt ist, gilt

$$2\pi\, \chi(\gamma, z) = \arg(\varphi(b)) - \arg(\varphi(a)).$$

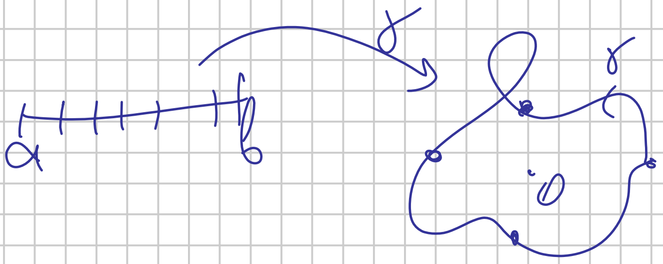
D.h., $\chi(\gamma, z)$ misst die Veränderung des Argumentes von $\gamma(t)$ um z

__Bem.__ Aus dem Beweis folgt: $\exists \arg\circ\varphi$ stetig, eindeutig mod 2π.

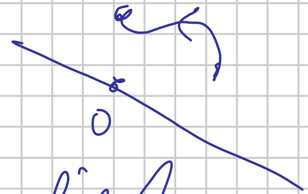
__Beweis__ Da γ geschlossen ist, folgt (a) aus (b), wenn so eine Fkt $\arg\circ\varphi$ immer existiert.

__(b) + Existenz von $\arg\circ\varphi$__ Sei OBdA $z = 0$

Seien $a = t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ eine Partition von $[a,b]$



s.d. $\varphi([t_j, t_{j+1}])$ in einer Halbebene bzgl 0 liegt $\forall j$. (Warum möglich? Ü) (Hinweis: pos. Abstand von 0)



Wähle $\arg\circ\varphi$ beliebig (eindeutig mod 2π) in $t=a$ und def. $\arg\circ\varphi$ stetig auf $[a, t_2]$ mit Hilfe des zugehörigen Zweigs des Argumentes in der Halbebene usw bis $[t_{k-1}, b]$.

Wir haben:

$$\int_\gamma \frac{1}{w}\,dw = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}} \frac{1}{w}\,dw =$$

Auf jedem Bild $\varphi|_{[t_j,t_{j+1}]}$ hat $\frac{1}{w}$ eine Stammfkt, z.B.

$\ln w = \ln|w| + i\cdot \arg w$

$\arg$ der gewählte Zweig.

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\ln(\gamma(t_{j+1})) - \ln(\gamma(t_j)) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \left[\ln|\varphi(t_{j+1})| - \ln|\varphi(t_j)| + i\cdot \arg(\gamma(t_{j+1})) - i\cdot \arg(\gamma(t_j)) \right].$$

$= [\text{Teleskopsumme}] = \cancel{\ln|\gamma(b)| - \ln|\gamma(a)|} + i \cdot (\arg(\gamma(b)) - \arg(\gamma(a)))$

(Zweige des Argumentes sind stetige Fortsetzungen voneinander).

Also gilt:

$$2\pi \cdot \chi(\gamma, z) = \cancel{2\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi} i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw = \frac{1}{\cancel{i}} \cancel{i} \cdot (\arg(\gamma(b)) - \arg(\gamma(a))),$$ ∎

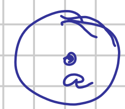
<u>Bem.</u> Man kann z als

- äußeren Punkt bzgl. γ def., wenn $\chi(\gamma, z) = 0$
- inneren Punkt <u>bzgl. γ</u>, wenn $\chi(\gamma, z) \neq 0$.

5.2. Residuensatz

Def. 5.3 Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ die Laurentreihenentw.

von f in einer punktierten Umg. von a.



Das Residuum von f in a ist

$$\operatorname{Res}(f,a) := c_{-1}$$

Bem. 1) Cauchyformel für c_n, $n=-1$, liefert:

$$c_{-1} = \operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} f(w)\, dw$$

$|w-a|=\rho$ ← pos. orientiert

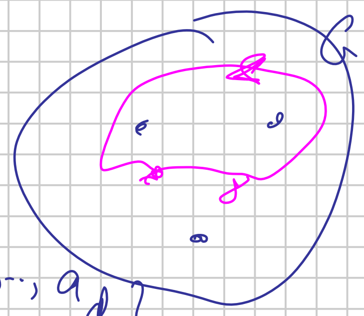
2) Wenn a ein Pol erster Ordnung ist, gilt,

$$c_{-1} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z)$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $\operatorname{Res}(f,1) = \dfrac{1}{1-2} = -1$, $\operatorname{Res}(f,2)=1$

Th 5.4 (Residuensatz für Sterngebiete bzw. für stetige Bilder von Rechtecken)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a_1, \dots, a_d \in G$, $f : G \setminus \{a_1, \dots, a_d\} \to \mathbb{C}$ holom., $\gamma : [a,b] \to G \setminus \{a_1, \dots, a_d\}$ geschl., stückweise C^1. Ang.: G ist ein Sterngebiet oder γ umläuft ein stetiges Bild eines Rechteckes $\subset G$.



Dann gilt:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f = \sum_{j=1}^{d} \chi(\gamma, a_j) \cdot \operatorname{Res}_{a_j} f}$$

← Residuenformel

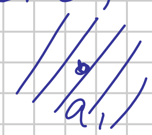
<u>Bem.</u> 1) Der Satz ist eine Verallg. des CIS. Es gilt,

wie der CIS, allgemeiner für einfach zusammenhängende Gebiete.

2) Wenn f ∞-viele isol. Singul. hat, $\exists$ höchstens endlich viele davon innerhalb γ. (Warum?)

<u>Beweis</u> Sei $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(1)} (z-a_1)^n$ die Laurentreihe von f um a_1 in $\dot{U}(a_1)$ mit Hauptteil $H_1(z)$.

Erinnere: $H_1(z)$ ist holom. auf $\mathbb{C} \setminus \{a_1\}$ (im Äußeren der Kreisscheibe mit Radius 0).



Betrachte
$$f - H_1$$
- holom. auf $G \setminus \{a_1, \dots, a_d\}$ und a_1 ist hebbar!

(da Laurentreihenentw. = Nebenteil in $U(a_1)$).

Analog (wiederhole das für alle weiteren a_j) ist die Fkt

$$f - H_1 - \dots - H_d$$

holom. auf G bis auf hebbare Singularitäten.

CIS:

$$0 = \int_\gamma (f - H_1 - \dots - H_d) = \int_\gamma f - \int_\gamma H_1 - \dots - \int_\gamma H_d .$$

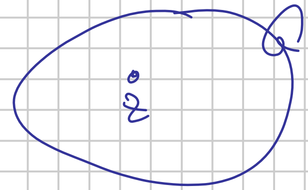
Da $\frac{1}{(z-a_j)^n}$ für $n \geq 2$ eine Stammfkt auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$ hat (nämlich $\frac{1}{(n-1)(z-a_j)^{n-1}}$), gilt

$$\int_\gamma f = \int_\gamma H_1 + \dots + \int_\gamma H_d \underset{\int\Sigma = \Sigma\int}{=} c_{-1}^{(1)} \int_\gamma \frac{dz}{z-a_1} + \dots + c_{-1}^{(d)} \cdot \int_\gamma \frac{dz}{z-a_d}$$

$$= \operatorname{Res}(f, a_1) \cdot 2\pi i\, \chi(\gamma, a_1) + \dots + \operatorname{Res}(f, a_d) \cdot 2\pi i\, \chi(\gamma, a_d)$$

<u>Bem.</u> 1) Die Voraussetzungen sind dieselben wie im CIS.
Wenn alle a_j hebbar sind, ist der Residuensatz = CIS,
d.h., wir haben eine Verallgem. des CIS.

2) Wenn f in G holom. ist und $z \in G$,



dann gilt für $\frac{f(w)}{w-z} =: h(w)$

$\operatorname{Res}(h, z) = f(z)$ und der Residuensatz impliziert:

$$\chi(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

– Verallgemeinerung der CIF (wo γ = Kreis und $\chi(\gamma, z) = 1$ war)

Bemerkung 5.5 (Berechnung des Residuums)

1) Es gilt die Implikation:

Ü a ist Pol k-ter Ordnung $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}(f,a) = \dfrac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$

für $g(z) := (z-a)^k f(z)$

2) Wenn a eine einfache Nullstelle von g ist, dann gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

Beweis: Fall 1 $f(a) = 0 \Rightarrow a$ ist hebbar für $\frac{f}{g} \Rightarrow \operatorname{Res} = 0$

Fall 2 $f(a) \neq 0 \Rightarrow a$ ist Pol erster Ordnung von $\frac{f}{g}$

und

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \lim_{z \to a} \underbrace{\frac{z-a}{g(z)}}_{\to \frac{1}{g'(a)}} f(z) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

$\blacksquare$

3) Sei $f \not\equiv 0$, dann gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \operatorname{Ord}(f, a),$$

wobei $\operatorname{Ord}(f,a) = \begin{cases} \text{Ordnung der Nullstelle von } f, \text{ wenn } f(a) = 0 \\ 0, \text{ wenn } f(a) \neq 0 \\ -\text{Ordnung des Poles, wenn } a \text{ ein Pol ist.} \end{cases}$

Beweis

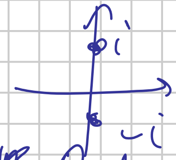
- $f(z) = (z-a)^k \cdot \underbrace{g(z)}_{}$, holom. in $U(a)$ mit $g(a) \neq 0$. — Potenzreihen-entw. bzw. Laurent...

wobei $k = \operatorname{Ord}(f, a)$

- $f'(z) = k \cdot (z-a)^{k-1} g(z) + (z-a)^k \cdot g'(z)$
- $\frac{f'}{f}(z) = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ — holom. in a (in $U(a)$)

$\rightarrow b = \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right)$

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $f(z) := \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ hat in $z = i$ Pol erster Ordnung und



$f(z) = \underbrace{\frac{e^{iz}}{z+i}}_{\text{holom. in } \mathbb{C}\setminus\{-i\}} \cdot \frac{1}{z-i}$

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{e^{iz}}{z+i}\bigg|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{i+i} = \frac{1}{2ie}$$

2) $f(z) := \pi \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ $\qquad \{\text{Singularitäten}\} = \mathbb{Z}$

einfache Nullstellen

Bem. 5.5, 2) : $\operatorname{Res}(f, \underset{\in\mathbb{Z}}{b}) = \frac{\pi \cancel{\cos(\pi b)}}{\pi \cdot \cancel{\cos(\pi b)}} = 1$

5.3. Berechnung von reellen Integralen

$\boxed{\text{Bsp}}$ Ziel: Berechne das reelle Integral

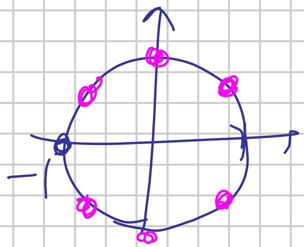
$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^6} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^6}.$$

Idee: $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{1+z^6}$ + Residuensatz.

f ist holom. auf $\mathbb{C} \setminus \{a_0, \dots, a_5\}$

$$e^{6i\varphi} = z^6 = -1 = e^{i\pi}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \text{ also } a_k = e^{i\frac{\pi}{6} + \frac{\pi i k}{3}}$$



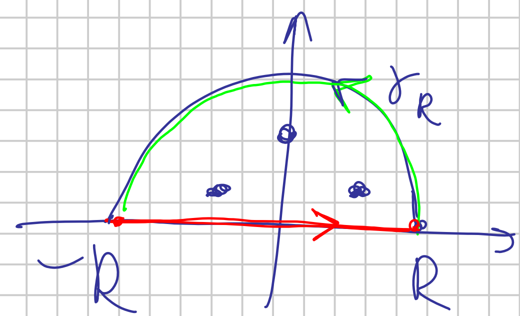
$\forall a_k$ ist ein einfacher Pol von f.

$$\operatorname{Res}(f, a_k) = [\text{Bem } 5.5, 2)] = \frac{1}{6z^5}\Big|_{z=a_k} = \frac{1}{6a_k^5} \overset{}{=}$$

$$a_k^5 = -\frac{1}{a_k}$$

$$= -\frac{a_k}{6}$$

Sei $R > 1$ und betrachte γ_R: den Halbkreisbogen von R nach $-R$.



Residuensatz:

$$\int_{-R}^{R} f(t)\,dt + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \chi = 1 \\ \forall a_k}}{=} 2\pi i \cdot \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}(f, a_k)$$

$$= 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}(a_0 + a_1 + a_2)\right) = -\frac{2\pi i}{6} \cdot 2i = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\overbrace{i + 2\pi i \, m \, a_0} = i + \cancel{2} i \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{\cancel{1/2}} = 2i$$

Wir zeigen: $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

– dann haben wir $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{2\pi}{3}$ und $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$.

Parametrisiere $\gamma_R(\varphi) := Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0,\pi]$. Dann

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^6} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^6 e^{6 \cdot i\varphi}} \cdot R \cdot i \cdot e^{i\varphi} \, d\varphi \right|$$

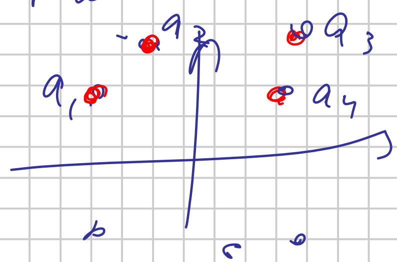
$$\underset{|z+w| \geq |z|-|w|}{\leq} R \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{R^6-1} = \pi \cdot \frac{R}{R^6-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Damit haben wir $\int_0^\infty f(t)\,dt = \frac{\pi}{3}$.

Allgemeiner (und analog) gilt:

$\boxed{\text{Satz 5.6}}$ (Integrale von rationalen Fkt'en)

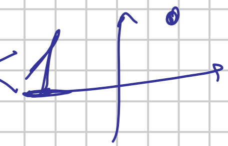
Seien P, Q Polynome mit $\operatorname{Grad} Q \geq \operatorname{Grad} P + 2$ s.d. Q keine reellen Nullstellen hat. Seien $a_1, \dots, a_k$ die Nullst. von Q in der oberen Halbebene. Dann gilt:



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, a_j\right)$$

Eine weitere (ähnliche) Anwendung

Beobachtung: Für $\underbrace{y > 0,\ x \in \mathbb{R}}_{z := x+iy\ \in \text{ober. Halbebene}}$ gilt $|e^{iz}| = e^{-y} < 1$



Satz 5.7 Seien P, Q Polynome mit $\operatorname{Grad} Q \geq \operatorname{Grad} P + 1$, Q habe keine reellen Nullstellen. Dann gilt:

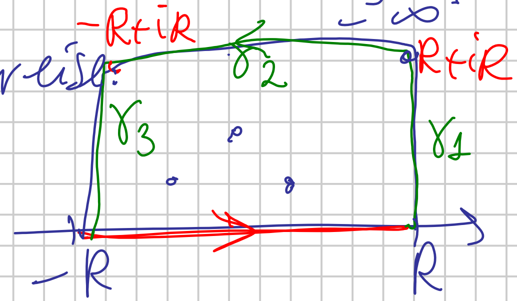
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix}\, dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, a\right)$$

Bem. 1) Der Wert $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \dots$ heißt der (Cauchysche) Hauptwert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty}$

2) Mit einer kleinen Modifikation des Beweises folgt: $\exists \int_{-\infty}^{\infty}$.

Beweis Idee: Betrachte Rechtecke statt Halbkreise.

Sei $R > \max_j |a_j|$, a_j Nullstellen von Q und seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ wie auf dem Bild.



(γ_1 = gerade Verbindung von R bis $R+iR$ usw.)

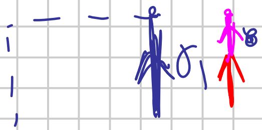
Nach dem Residuensatz reicht es zz.

$$\int_{\gamma_j} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad \forall j = 1, 2, 3.$$

Voraussetzung an Grad P und Grad Q: $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|}$ für ein $C>0$ und $\forall z$ mit $|z| \geq R_0$.

ii . Wir haben:

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}\,dz\right| \leq \underbrace{2\cancel{R}}_{\text{Länge}(\gamma_2)} \cdot \underbrace{\frac{C}{\cancel{R}}}_{\text{da } |z| \geq |\operatorname{Im} z|} \cdot e^{-R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$



Zerlege γ_1 in die Strecke von R bis $R+i\sqrt{R}$ und von $R+i\sqrt{R}$ bis $R+iR$

$R+i\sqrt{R}$

$$\left| \int_{R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}\, dz \right| \leq \underbrace{\sqrt{R}}_{\text{Länge}} \cdot \frac{C}{R} \cdot 1 \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

$$\left| \int_{R+i\sqrt{R}}^{R+iR} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}\, dz \right| \leq \underbrace{(R-\sqrt{R})}_{\text{Länge}} \cdot \frac{C}{R} \cdot e^{-\sqrt{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\blacksquare$

- Analog: $\int_{\gamma_3} \longrightarrow 0.$

<u>Bem.</u> Man kann analog z.B. Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\, dx$$

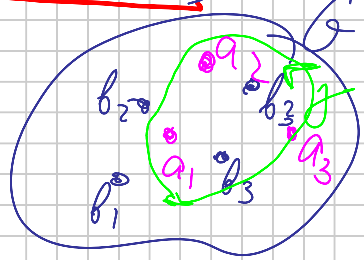
für Polynome P, Q von 2 Variablen berechnen, und viele andere.

5.4 Weitere Anwendungen: Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral, Argumentprinzip und Satz von Rouché

Frage: Was kann man über Nullstellen / Polstellen von f (f holom.) sagen? Wo liegen sie, wieviele, Vielfachheit, ...?

$\boxed{\text{Th } 5.8}$ (Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral)

Sei $f : G \setminus \{b_1, \dots, b_m\} \to \mathbb{C}$ holom. mit Polstellen $b_1, \dots, b_m$ und Nullstellen $a_1, \dots, a_n$, und sei γ eine geschlossene stückweise glatte Kurve



in $G \setminus \{b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\}$. Wenn G ein Sterngebiet ist oder γ ein stetiges Bild in G eines Rechtecks umläuft, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ord}(f, a_j) \cdot \chi(\gamma, a_j) - \sum_{k=1}^{m} |\mathrm{Ord}(f, b_k)| \cdot \chi(\gamma, b_k)$$

Wenn insbesondere γ ein Gebiet A einmal berandet, gilt

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = N_A - P_A}$$

wobei N_A die Anzahl aller Nullstellen in A mit Vielfachheit gezählt und analog P_A die Anzahl der Polstellen ..... sind.

<u>Bem.</u> Die Fkt $\frac{f'}{f}$ heißt <u>logarithmische Ableitung</u> von f

(lokal gilt $(\ln f(z))' = \frac{f'}{f}(z)$).

__Beweis__ Erinnere: wenn $f(z) = (z-a)^k \underbrace{g(z)}_{\text{holom. in } U(a) \text{ mit } g(a) \neq 0}$ (a Nullstelle oder Pol)

dann: $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{holom.}}$$

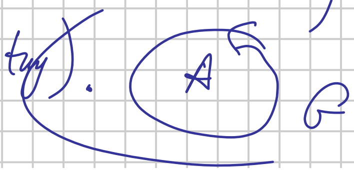
(siehe Bem. 5.5, 3)) und $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = k$.

Residuensatz $\Rightarrow$ erste Aussage.

Zweite Aussage („insbesondere") folgt aus $\chi(\gamma, a) = 1$ oder 0.

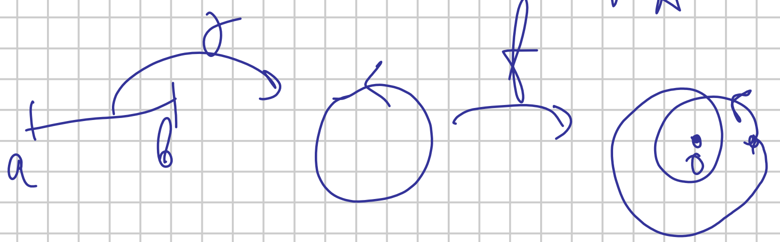
$\boxed{\text{Folgerung 5.9}}$ (Das Argumentprinzip)

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holom., γ eine geschl. stückweise glatte Kurve in G, die ein Gebiet $A \subset G$ einmal berandet. (in pos. Richtung).



Wenn G ein Sterngebiet oder A stetiges Bild eines Rechtecks ist, so gilt:

$$N_A = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \chi(f \circ \gamma, 0)$$



<u>Beweis</u> Def. der Umlaufzahl:

$$2\pi i \cdot \chi(f \circ \gamma, 0) = \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z}\, dz =$$

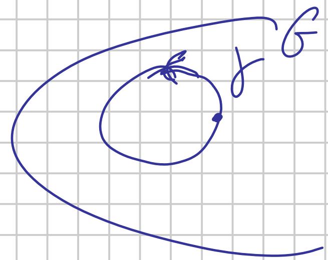
$$= \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} \cdot f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma \frac{f'}{f}$$ ∎

Weitere Eigenschaften von Nullstellen:

$\boxed{\text{Th } 5.10}$ (Satz von Rouché)

Seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holom. (G Gebiet), γ geschl., stückweise C^1-Kurve in G, die einmal ein Gebiet $A \subset G$ umläuft.

Angenommen, G ist ein Sterngebiet oder A ist ein stetiges (C^1) Bild eines Rechtecks. Sei weiterhin:



$$|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \text{Bild}(\gamma)$$

Dann gilt:

$$\#(\text{Nullstellen von } f+g \text{ in } A) = \#(\text{Nullstellen von } f \text{ in } A)$$

<u>Bem.</u> Nach der Annahme hat weder f noch $f+g$ eine Nullstelle auf Bild(γ)

<u>Beweis</u> Für $s \in [0,1]$ betrachte

$$h_s(z) := f(z) + s \cdot g(z) \quad \text{in } G$$

- $h_0 = f$, $h_1 = f+g$

- h_s haben keine Nullstelle auf Bild(γ):

$$|h_s(z)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{umgekehrte } \triangle\text{-Ungl.}}}{\geq} |f(z)| - s|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

- $\#(\text{Nullstellen von } h_s \text{ in } A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h_s'}{h_s} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f' + s \cdot g'}{f + s \cdot g}$

hängt stetig von s ab (Warum?)

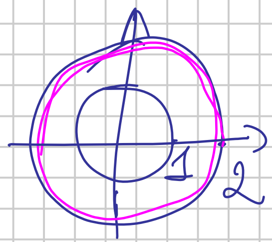
Ganzzahlig $\Rightarrow$ konst. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp}}$ Betrachte: $p(z) = z^4 + 6z + 3$

Def. $f(z) := z^4$ und $g(z) := 6z + 3$

Für $|z| = 2$ haben wir:

$$|g(z)| \leq 6 \cdot \underbrace{|z|}_{=2} + 3 = 15 < 16 = |f(z)|$$



$\Rightarrow$ (Rouché): $\#(\text{Nullst. von } p \text{ innerhalb } \partial U_2(0)) = \#(\text{Nullst. von } f \text{ innerh. } \partial U_2(0)) = 4$

Für $|z| = 1$ haben wir:

$$|z^4 + 3| \leq 1 + 3 = 4 < 6 = |6z|,$$

d.h., $\#(\text{Nullst. von } p \text{ in } U_1(0)) = \#(\text{Nullst. von } 6z \text{ in } U_1(0)) = 1$

Also liegt genau eine Nullst. von p in $U_1(0)$ und genau 3 Nullst. im Ring $\{1 < |z| < 2\}$.

<u>Bem.</u> Wir haben einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra:

$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheit) von p.

<u>Beweis (mit Rouché)</u> $f(z) := a_n z^n$ hat genau n Nullstellen in $U_R(0)\ \forall R$.

Def: $g(z) := (p - f)(z) = a_0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$

Ü: Für genügend große R gilt $|f(z)| > |g(z)|$ $\forall z$ mit $|z| = R$

$\Rightarrow$ $\#$(Nullst. von p in $U_R(0)$) $= n$ für $\forall R > R_0$ $\blacksquare$

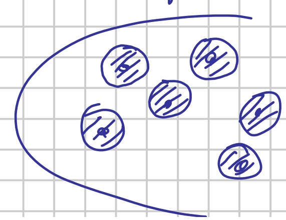
5.5. Blätterzahlen von Grenzfunktionen

$\boxed{\text{Def}}$ Sei $f: G \to \mathbb{C}$, G Gebiet, $a \in \mathbb{C}$. Die Blätterzahl von f über a in G ist $\#$(a-Stellen) mit Vielfachheit gezählt, wobei eine a-Stelle = Nullstelle von $f - a$ ist.

$\boxed{\text{Th 5.11}}$ (Satz von der Blätterzahl der Grenzfkt)

Seien $f, f_1, f_2, \dots : G \to \mathbb{C}$ holom. und $a \in \mathbb{C}$.
Wenn $f_n \to f$ komp. und die Anzahl (mit Vielfachheit) der a-Stellen von f_n $\leq m$ für alle n ist, dann ist entweder $f \equiv a$ oder die Anzahl der a-Stellen von f $\leq m$.

<u>Beweis</u> Sei OBdA $a = 0$ (sonst betrachte $f - a$).
Ang., f hat mindestens $m+1$ Nullstellen, darunter $z_1, \dots, z_\ell$ <u>verschiedene</u> Nullstellen.
Identitätssatz: die Nullst. von f liegen isoliert, falls $f \not\equiv 0$,
D.h., $\exists r > 0$ s.d. die Kreisscheiben $\overline{U_r(z_j)}$, $j = 1, \dots, \ell$ disjunkt sind und keine weiteren Nullstellen



beinhalten. Betrachte $S := \partial U_r(z_1) \cup \ldots \cup \partial U_r(z_\ell)$

- S komp.
- f hat keine Nullstelle in S

  f stetig $\Rightarrow \varepsilon := \min\limits_{z \in S} |f(z)| > 0$
- $f_n \to f$ komp. $\Rightarrow \exists n: \ \forall z \in S$

  $$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|$$

Rouché: $f_n = f + (f_n - f)$ hat genausoviele Nullstellen in $U_r(z_1) \cup \ldots \cup U_r(z_\ell)$ wie f ↯ $(m \neq m+1)$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Folgerung 5.12}}$ Seien $f, f_1, f_2, \ldots : G \to \mathbb{C}$ injektiv, holom. mit

$f_n \to f$ komp. in G. Dann ist f entweder konst. oder auch inj!

Bem. Injektive holom. Fkt'en heißen schlicht.

Beweis inj = Blätterzahl ≤ 1

Ang., f ist nicht inj $\Rightarrow \exists a$ mit Blätterzahl ≥ 2

$\Rightarrow$ 5.11: $f \equiv a$. ∎

5.6 Mehr über kompakte Konvergenz: Satz von Montel.

Erinnere: Satz von Bolzano-Weierstraß: $\forall$ beschr. Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ hat eine konvergente Teilfolge.

Warum? ;-)

Satz von Montel = dies für holom. Fkt'en und komp. Konvergenz.

Lemma 5.13 Seien $f_1, f_2, \ldots : G \to \mathbb{C}$ holom. und <u>gleichmäßig beschränkt</u>, d.h., $\exists M > 0$:

$$|f_n(z)| \leq M \quad \forall n \quad \forall z \in G.$$

Dann konv. f_n komp. $\Longleftrightarrow$ $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konv. $\forall z \in D$ für eine dichte Teilmenge $D \subset G$.