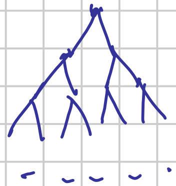
Notiztitel 08.05.2018

Wir def. $\alpha_1 < \alpha_2$, wenn $\alpha_1 \lesssim \alpha_2$, aber $\alpha_2 \not\lesssim \alpha_1$

$\boxed{\text{Bsp}}$ 0) I total geordnet $\Longrightarrow$ gerichtet (nimm $\alpha_3 := \alpha_1$ oder α_2)

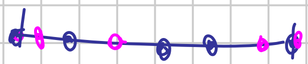
1) insb.: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $((0,1), \leq)$, ...

2) Bäume:  mit $\alpha_1 \lesssim \alpha_2$, wenn α_1 und α_2 durch einen Weg „nach oben" verbunden

3) Sei $(X, \mathcal{T})$ TR, $x \in X$. Dann ist $(\mathcal{U}(x), \supset)$

eine gerichtete Menge ($(\mathcal{U}(x), \subset)$ auch)
(nimm $U_3 := U_1 \cap U_2$ bzw. $U_1 \cup U_2$)

4) $\mathcal{Z} := \{$ Zerlegungen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ von $[a,b]\}$
mit "$\subset$"
($\forall z_1, z_2\ \exists$ Verfeinerung von beiden).



$\boxed{\text{Def}}$ 1) Ein Netz (oder: ein Moore-Smith Folge) in einer Menge $X \neq \emptyset$ ist eine Abb. $f: I \longrightarrow X$, wobei I eine (beliebige) gerichtete Menge ist.
Schreibe $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ statt $\lambda \mapsto x_\lambda$ (also statt f)

2) Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in I} \subset X_{TR}$ heißt konvergent gegen $x \in X$, wenn

$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists \alpha_0 \in I:\ \forall \alpha \succ \alpha_0\quad x_\alpha \in U.$

$\left(\alpha \succ \alpha_0 \overset{\text{Def.}}{\iff} \alpha_0 \prec \alpha\right)$

Schreibe: $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in I]{} x$ oder $\lim\limits_{\alpha \in I} x_\alpha = x$.

Bsp 1) $\forall$ Folge ist ein Netz (da $(\mathbb{N}, \leq)$ gerichtet) und Konv. i.A. die gleiche.

2) $(x_r)_{r \in \mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$ konv. gegen x:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists R_0 \in \mathbb{R}:\ \forall r > R_0\ |x_r - x| < \varepsilon.$

3) Sei Z wie oben (Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\subset$)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

Betrachte zwei Netze $(\overline{S}_Z)_{Z \in \mathcal{Z}}$, $(\underline{S}_Z)_{Z \in \mathcal{Z}} \subset \mathbb{R}$ def. durch

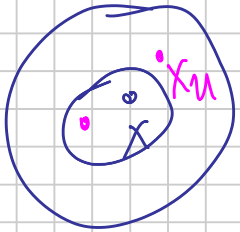
$$\overline{S_Z} := \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup\{f(x),\ x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

$$\underline{S_Z} := \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf\{ -\shortparallel- \}$$

ü f ist Riemann-integr. $\Longleftrightarrow$ $(\overline{S_Z})$, $(\underline{S_Z})$ ko~~n~~nv. gegen dieselbe Zahl c.

in diesem Fall gilt $c = \int_a^b f$

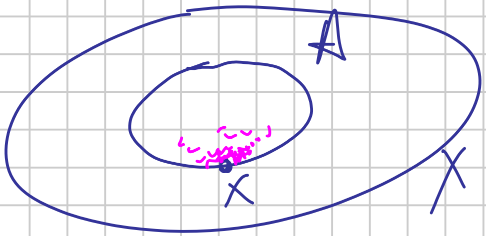
U



4) Sei (X, τ) TR, $x \in X$. Wähle $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in \mathcal{U}(x)$

Dann ist $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ ein Netz in X.

$\boxed{\text{Thm}}$ Seien X, Y TR, $x \in X$.



(a) Für $A \subset X$ gilt:

$$x \in \overline{A} \iff \exists \text{ Netz } (x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset A \text{ mit } x_\alpha \to x.$$

(b) Eine Fkt $f : X \to Y$ ist stetig in x

$$\iff \forall \text{ Netz } (x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset X \; \left(x_\alpha \to x \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x) \right)$$

<u>Beweis</u> (a) $\Leftarrow$ $\forall\, U \in \mathfrak{U}(x) \;\exists\, \alpha$ mit $x_\alpha \in U \cap A$.

$\Rightarrow$ $\forall\, U \in \mathfrak{U}(x)$ sei $x_\alpha \in A \cap U$. Wir haben:

- $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{U}(x)}$ ist ein Netz in A
- sei $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $\alpha_0 := U$

Dann gilt: $\forall\, \underbrace{\alpha > \alpha_0}_{U_\alpha \subset U}$: $x_\alpha \in U_\alpha \subset U$

Also: $x_\lambda \to x$. $\blacksquare$

(B) Ü

Erinnere: $(x_n) \subset X$ Folge, $m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\nearrow$ (strikt)

Dann ist $(x_{m(n)})$ eine Teilfolge.

Def Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in I} \subset X$ ein Netz, $(K, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $m: K \to I$ ~~strikt~~ monoton

$k_1 \preceq k_2 \Rightarrow m(k_1) \preceq m(k_2)$

mit $\forall \lambda_0 \in I \; \exists k_0 \in K : \forall k \succ k_0 \quad m(k) \succ \lambda_0$

Dann heißt das Netz $(x_{m(k)})_{k \in K}$ ein Teilnetz von $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$

warum?

Bem./Achtung: Ein Teilnetz einer Folge ist i.A. keine Folge!

Bsp Sei $x : \mathbb{N} \to X$ eine Folge

$m : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ mit

$m(r) := \min\{n \in \mathbb{N} : r \le n\}$

$= \lceil r \rceil$

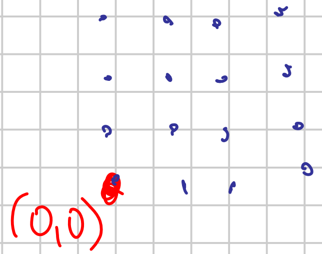
Dann ist $(x_{m(r)})_{r \in \mathbb{R}}$ ein Teilnetz, aber keine Folge.

Ü $\left.\begin{array}{l} x_\lambda \to x \\ (x_{m(k)})_{k \in K} \text{ ein Teilnetz von } (x_\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow x_{m(k)} \to x$

Bsp Betrachte $X := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ $\quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

mit τ, wobei:

- τ = diskr. Top. auf $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \setminus \{(0,0)\}$,
  d.h.: $A \subset X \setminus \{0,0\} \Rightarrow A \in \tau$



- Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $(0,0) \in \mathcal{U}$.

  Dann ist $\mathcal{U} \in \tau \iff$ für f.a. $m \in \mathbb{N}_0$ bis auf endlich viele

  ist die Menge

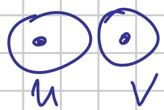
  $\{ n \in \mathbb{N}_0 : (n,m) \notin \mathcal{U} \}$

  endlich.

Ü

(a) τ ist eine Topologie

(b) (X, τ) Hausdorff: $\forall x, y \in X \ \exists U \in \mathcal{U}(x) \ \exists V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$



(c) $\nexists (x_n) \subset X \setminus \{(0,0)\}$ mit $x_n \to (0,0)$

Folge

(d) $\exists\, (x_n) \subset X \setminus \{0,0\}$ s.d. $(0,0)$ ein

Folge

Häufungspunkt von (x_n)

Nach (c) hat (x_n) keine Teilfolge, die gegen $(0,0)$ konv., aber Teilnetze schon!

II.2. Filter

Alternativer Begriff für Konvergenz.

$\boxed{\text{Def}}$ Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Ein System $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X heißt **Filter**, wenn

(F_1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$

(F_2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ (endl. Schnitte sind in $\mathcal{F}$)

(F_3) $F \in \mathcal{F}$, $F' \supset F \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$ (Obermengen sind in $\mathcal{F}$)

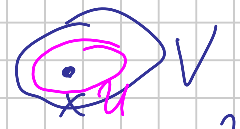
Ein Filter heißt frei, wenn $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \mathcal{F} = \emptyset$, sonst fixiert.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Sei $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, dann ist

$$\mathcal{F}_A := \{F \subset X : F \supset A\}$$

ein fixierter Filter auf X.

2) Sei (X, τ) TR, $x \in X$.



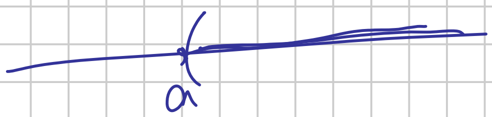
Dann ist

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}(x)} := \{V \subset X : \exists\, U \in \mathcal{U}(x) : U \subset V\}$$

(Obermengen von Umg. von x)
ein fixierter Filter – Umgebungsfilter von x.

3) Der Filter

$$\mathcal{F} := \{ V \subset \mathbb{R} : (a, \infty) \subset V \text{ für ein } a \in \mathbb{R} \}$$



heißt Fréchet-Filter auf $\mathbb{R}$. (frei!)

$\boxed{\text{Def}}$ Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ eines Filters $\mathcal{F}$ heißt Filterbasis für $\mathcal{F}$, wenn $\forall F \in \mathcal{F} \ \exists B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset F$.

Bemerkung 1) $\mathcal{B}$ ist eine Filterbasis für einen Filter $\iff$

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B_3 \in \mathcal{B} \text{ mit } B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

in diesem Fall ist $\mathcal{F} := \{$ Obermengen von B, $B \in \mathcal{B} \}$ der zugehörige Filter (eindeutig!)

2) Eine Filterbasis ist nicht eindeutig i. A.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\{A\}$ ist Filterbasis für $\mathcal{F}_A$

$\{x\}$ ist Filterbasis für $\mathcal{F}_{\{x\}}$

Eine Umgebungsbasis von x ist –"– für $\mathcal{F}_{\mathcal{U}(x)}$.

2) $\mathcal{B} := \{(n, \infty), n \in \mathbb{N}\}$ –"– für den Fréchet-Filter

$\boxed{\text{Def}}$ 1) Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ Filter auf X. $\mathcal{F}_1$ heißt feiner als $\mathcal{F}_2$ (und $\mathcal{F}_2$ gröber als $\mathcal{F}_1$), wenn $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$

2) Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt <u>Ultrafilter</u>, wenn $\mathcal{F}$ maximal bzgl. Inklusion ist, d.h.,

$$\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F},\ \tilde{\mathcal{F}} \text{ Filter} \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}.$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathcal{F}_A$ Ultrafilter $\Leftrightarrow$ $A = \{x\}$ für ein x.

$\boxed{\text{Satz}}$ (<u>Eigenschaften von Ultrafiltern</u>)

(a) $\forall$ Filter $\mathcal{F}$ ist in einem Ultrafilter enthalten.

(b) $\mathcal{F}$ Ultrafilter $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset X$ $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$

(c) Ein Filter ist fixierter Ultrafilter $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{x\}}$ für ein $x \in X$.

__Beweis__ (a) Betrachte $\mathcal{M} := \{ \text{alle Filter auf } X \supset \mathcal{F} \}$ mit „$\subseteq$"

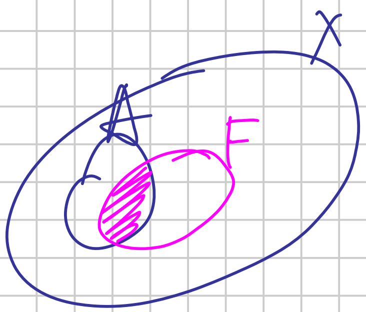
Sei $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$ (Kette)

Dann ist $\bigcup_{\alpha \in I} \Phi_\alpha$ ist eine obere Schranke (warum Filter?)

Lemma von Zorn: $\exists$ max. Element.

(b) $\Rightarrow$ Sei $A \subset X$, $\mathcal{F}$ Ultrafilter.

Da $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, $\nexists F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ mit $F_1 \subset A$, $F_2 \subset X \setminus A$.



D.h., $\forall F \in \mathcal{F} \quad F \cap A \neq \emptyset$

oder: $\forall F \in \mathcal{F} \quad F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

OBdA

Betrachte $\mathcal{B} := \{F \cap A,\ F \in \mathcal{F}\}$ – eine Basis für einen Filter $\tilde{\mathcal{F}}$ mit $\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ Ultrafilter $\Rightarrow$ $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$, somit $X \cap A = A \in \mathcal{F}$

$\Leftarrow$ Ang., $\mathcal{F}$ nicht maximal: $\exists\, \tilde{\mathcal{F}} \supsetneq \mathcal{F}$.
Sei $G \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{F}$. Da $G \notin \mathcal{F}$, gilt nach Vorauss. $X \setminus G \in \mathcal{F}$,
d.h., $X \setminus G \in \tilde{\mathcal{F}}$ $\lightning$ $(G \in \tilde{\mathcal{F}})$

(c) $\Leftarrow$ klar

$\Rightarrow$ Sei $\mathcal{F}$ fixiert, Ultraf.

$$A := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset.$$

Z.z.: $A = \{x\}$. (dann $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{x\}}$, da Ultraf.)

Ang.: $|A| \geq 2$. Betr. $\emptyset \neq A_1 \underset{\neq}{\subset} A$.

Es gilt $\underbrace{A_1 \in \mathcal{F}}_{\lightning\ (\text{Def. von } A)}$ oder $\underbrace{X \setminus A_1 \in \mathcal{F}}_{\Rightarrow A \setminus A_1 \in \mathcal{F}\ \lightning\ (\text{Def. von } A)}$ wegen (b)

$\lightning$. ∎

Bem. Man kann zeigen:

X unendlich $\Rightarrow \exists\ 2^{2^{X}}$-viele Ultrafilter (und $\exists$ X-viele fix. Ultraf.)

$\boxed{\text{Def}}$ Sei (X, τ) ein TR. und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.
Ein $x \in X$ heißt

- Limespunkt von $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$
  Man sagt: $\mathcal{F}$ konv. gegen x, schreibe $\mathcal{F} \to x$.
- Berührungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn $\forall U \in \mathcal{U}(x)$
  $\forall F \in \mathcal{F}$ gilt $F \cap U \neq \emptyset$

Bem. a) Limespunkt $\Rightarrow$ Berührungspunkt
$\not\Leftarrow$ i. A. (siehe Bsp unten)

b) Limespunkt ist i. A. nicht eindeutig
$(\{X\} - \forall x$ ist Limespunkt, wenn $\tau = \{X, \emptyset\})$

Ü $\forall \mathcal{F}$ auf $\exists$ höchstens 1 Limespunkt $\Leftrightarrow$ X Hausdorff

c) x Berührungspunkt $\iff x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ Ü

Analog für Netze und Folgen!

$\boxed{\text{Bsp}}$ (a) Sei $(x_n) \subset X$ eine Folge. Der <u>zugehörige Filter</u> ist def. als

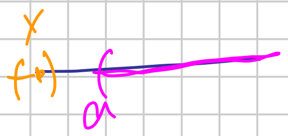
$$\mathcal{F} := \{\text{Obermengen von } E_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

wobei $E_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ – „Endstücke" der Folge

Solche Filter heißen <u>Elementarfilter</u>.

Ü

- $\mathcal{F} \to x \iff x_n \to x$
- x Berührungspunkt von $\mathcal{F} \iff x$ Häufungspunkt von (x_n)



(b) Der Fréchet-Filter auf $\mathbb{R}$ hat keine Berührungspunkte.

(c) Sei (X,τ) TR, $\emptyset \neq A \subset X$, $\mathcal{F}_A := \{\text{Obermengen von } A\}$

Ü $\overline{A} = \{\text{Berührungsp. von } \mathcal{F}_A\}$

(d) Def. $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{F} := \{\text{Obermengen von } (0,\tfrac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}\}$$

Es gilt $\mathcal{F} \to 0$ (da $\forall\, U \in \mathcal{U}(0)\ \exists\, (0,\tfrac{1}{n}) \subset U$)

$\boxed{\text{Satz}}$ Seien (X,τ) TR, $\mathcal{F}$ Filter auf X, $x \in X$. Dann gilt:

x Berührungspunkt von $\mathcal{F}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \mathcal{G} \supset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Filter: $\mathcal{G} \to x$

Bem. Oberfilter sind ein Analogon von Teilnetzen / Teilfolgen.

<u>Beweis des Satzes</u> $\Rightarrow$ Def. $\mathcal{G}$ durch die Basis

$$\mathcal{B} := \mathfrak{U}(x) \cap \mathcal{F} = \{\underbrace{U \cap F}_{\neq \emptyset,\ \text{da Berühr.}},\ U \in \mathfrak{U}(x),\ F \in \mathcal{F}\}$$

(warum Filterbasis?)

Es gelten.

- $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$
- $\mathcal{G} \to x$, da $\forall\, U \in \mathfrak{U}(x)$, $U = U \cap X \in \mathcal{G}$.

$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{G} \to x$, $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$.

Sei $U \in \mathfrak{U}(x) \subset \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow F \cap U \neq \emptyset$, da $\in \mathcal{G}$.

$\boxed{\text{Def}}$ Seien X, Y TR, $f: X \to Y$ und $\mathcal{F}$ Filter auf X.
Dann heißt der Filter auf Y mit Basis
$\{f(F),\ F \in \mathcal{F}\}$ das <u>Bild von $\mathcal{F}$</u> unter f, oder <u>Bildfilter</u> von $\mathcal{F}$.

Bezeichnung: $f(\mathcal{F})$.

Bem. 1) Da $f(F_1) \cap f(F_2) \supset f(F_1 \cap F_2)$, ist $\{f(F), F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis.

2) Ü $\mathcal{F}$ Ultrafilter $\Rightarrow f(\mathcal{F})$ Ultrafilter

$\boxed{\text{Satz}}$ Seien X, Y TR, $A \subset X$.

(a) $x \in \overline{A} \iff \exists$ Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \to x$ und $A \in \mathcal{F}$.

(b) Eine Abb. $f: X \to Y$ ist stetig in $x \in X$ $\iff \forall \mathcal{F}$ Filter auf X $(\mathcal{F} \to x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x))$.

Beweis (a) $\Leftarrow$ klar

$\Rightarrow$ Ang.: $x \in \overline{A}$. Dann ist

$$\mathcal{B} := \{ \underbrace{A \cap U}_{\neq \emptyset \text{ nach Vorauss.}}, \ U \in \mathcal{U}(x) \}$$

eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$.

- $A \in \mathcal{F}$ (da $A = A \cap X$)
- $\mathcal{F} \to x$ (da Obermengen $\in \mathcal{F}$)

(b) $\Rightarrow$ Sei f stetig in x, $\mathcal{F} \to x$

Sei $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Dann ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$,

d.h.: $f^{-1}(V) \in \mathcal{F} \Rightarrow V \in f(\mathcal{F})$.

$\Leftarrow$ Ang.: $\forall \mathcal{F}$ auf X, $\mathcal{F} \to x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

Betrachte $\mathcal{F} := \{\text{Obermengen von } \mathcal{U}(x)\}$. Da $\mathcal{F} \to x$, gilt nach Vorauss. $f(\mathcal{F}) \to f(x)$, d.h.,

$$\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{F}), \text{ insb. gilt:}$$

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \quad \exists U \in \mathcal{U}(x): \quad f(U) \subset V \quad \blacksquare$$

Bem. Sei $f: X \to Y$ (TR), $\mathcal{F}$ ein Filter auf Y.

M: $f^{-1}(F)$, $F \in \mathcal{F}$, bilden eine Filterbasis $\Leftrightarrow$

$$f^{-1}(F) \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}.$$

In diesem Fall heißt der erzeugte Filter Urbildfilter von $\mathcal{F}$.

Netze versus Filter

<u>Netze ⇝ Filter</u> (analog zu Folgen)

Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Netz in X. Dann erzeugen die „Endstücke"

$$E_{\alpha_0} := \{ x_\alpha \,,\ \alpha \geq \alpha_0 \} \,, \quad \alpha_0 \in I$$

einen Filter $\mathcal{F}$ (warum?). Es gilt

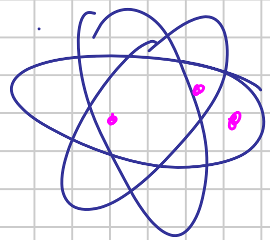
$$x_\alpha \longrightarrow x \iff \mathcal{F} \to x$$

ü

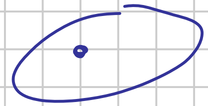
<u>Filter ⇝ Netze</u>

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.

Definiere

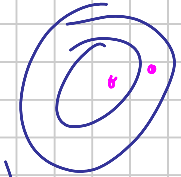


$$I := \{(F, y) : F \in \mathcal{F},\ y \in F\}$$



mit der Richtung

$$(F_1, y_1) \precsim (F_2, y_2) \overset{\text{Def.}}{\iff} F_1 \supset F_2$$



(warum ist $(I, \precsim)$ gerichtet?) und das Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit

$$x_{(F,y)} := y$$

<u>Behauptung</u> $x_\alpha \to x \iff \mathcal{F} \to x.$

<u>Beweis</u> $x_\alpha \to x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists \alpha_0 = (F_0, y_0) \in I :\ \underbrace{\forall \alpha = (F, y) \succsim (F_0, y_0)}_{\forall F \subset F_0\ \forall y \in F}\ \underbrace{x_\alpha = y \in U}_{y \in U}.$

$\iff \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists F_0 \in \mathcal{F}$ mit $F_0 \subset U$

$\iff \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F} \iff \mathcal{F} \to x$. $\blacksquare$

Bem.: Das Analogon von Ultrafiltern sind sog. universelle Netze (die „feinsten" Netze), wobei

(x_α) universell $\iff \forall A \subset X \; \exists \alpha_0 \in I$:

$(\forall \alpha \geq \alpha_0, x_\alpha \in A)$ oder $(\forall \alpha \geq \alpha_0, x_\alpha \notin A)$.

Nachtrag: $\boxed{\text{Bsp}}$ (Folgenkonv. reicht i. A. nicht)

von Hung Ninh Ngoc

Sei $(\mathbb{R}, \tau)$ mit

$\tau := \{A \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus A$ höchstens abzählbar$\} \cup \{\emptyset\}$

Ü 1) τ ist eine Topologie

2) $\forall$ Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$

$x_n \to x \iff \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x = x_n.$

insbesondere ist $\forall$ Fkt folgenstetig.

3) Betr. $f := \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$, $f : \mathbb{R} \to \underbrace{\{0,1\}}_{\text{diskr. Top.}}$

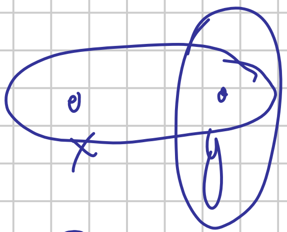
Dann ist f nicht stetig. Insb.: folgenstetig $\not\Rightarrow$ stetig.

4) $0 \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$, aber $\nexists (x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} : x_n \to 0$ (siehe 2))

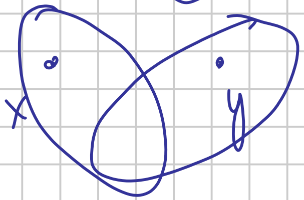
III Trennungseigenschaften und stetige Fortsetzung von Funktionen

III.1. Trennungseigenschaften

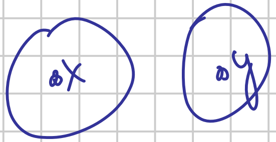
$\boxed{\text{Def}}$ Ein TR (X,τ) heißt



- T_0-Raum, wenn von je 2 versch. Punkten (mindestens) einer eine Umgebung hat, die den anderen Punkt nicht enthält.

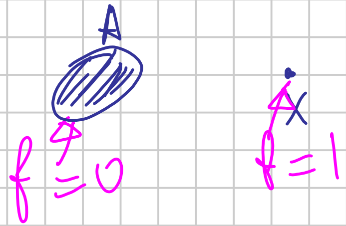


- T_1-Raum, wenn von je 2 versch. Punkten beide eine Umgebung haben, —〃—.

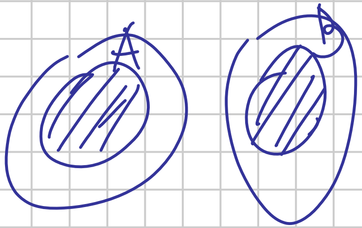


- T_2-Raum, wenn Hausdorff, d.h., je 2 versch. Punkte besitzen disjunkte Umg.
- T_3-Raum, wenn $\forall$ abg. Menge $A \subset X$ $\forall x \notin A$

$\exists\, U$ Umg. von A (d.h., U offen mit $U \supset A$)
$\exists\, V \in \mathfrak{U}(x)$: $U \cap V = \emptyset$



- <u>T_{3a}-Raum</u>, wenn $\forall$ abg. $A \subset X$ $\forall\, x \notin A$
  $\exists\, f: X \to \underbrace{[0,1]}_{\text{natürl. Top.}}$ stetig mit $f(x) = 1$, $f|_A = 0$



- <u>T_4-Raum</u>, wenn je zwei disjunkte abg. Mengen A, B disjunkte Umgebungen haben.

<u>Bem.</u> Die Eigenschaften heißen auch <u>T_i-Axiome</u> oder <u>Trennungsaxiome</u>.

<u>Beziehungen zwischen Trennungsaxiomen</u>

(a) $T_2 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_1 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_0$

<u>Bew.</u> $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ klar

$T_0 \not\Rightarrow T_1$: Nimm $X := \{0, *\}$

$\tau := \{\emptyset, \{0\}, \{0, *\}\}$,

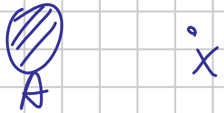
$x := 0$, $y := *$

$T_1 \not\Rightarrow T_2$ $\boxed{\text{Bsp 1}}$ Ü Konstruiere ein X mit $|X| = 4$.

$\boxed{\text{Bsp 2}}$ $(\mathbb{N}$, cofinite Topologie$)$

(b) $T_{3a} \Rightarrow T_3$

<u>Bew.</u> Sei $x \notin A$, A abg. Nach T_{3a} $\exists f : X \to [0,1]$



stetig mit $f|_A = 0$, $f(x) = 1$. Betr.

$U := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, $V := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$

- offen und disjunkt. $\blacksquare$

(c) $T_3 \not\Rightarrow T_1$, $T_3 \not\Rightarrow T_2$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = \{0, *\}$, $\tau = \{\emptyset, X\}$ - T_1, T_2 nicht erfüllt, T_3 aber schon.

(d) $T_4 \not\Rightarrow T_3$

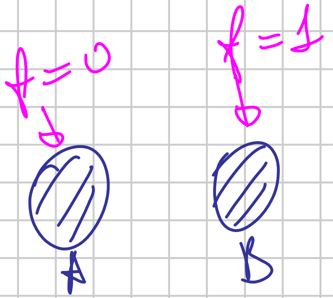
$X = \{1, 2, 3\}$, $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

- X nicht T_3: $x = \{1\}$, $A = \underbrace{\{3\}}_{\text{abg.}}$.
- X ist T_4:

abg. sind: $\emptyset$, $\{2,3\}$, $\{3\}$, $\{1,2,3\}$ —
$\nexists$ keine disj. abg. Mengen $\neq \emptyset$

(e) X metrisch $\Rightarrow T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3a}, T_4$

<u>Bew.</u> metrisch $\Rightarrow T_2$ $\left(U := U_{\frac{d}{2}}(x),\ V := U_{\frac{d}{2}}(y),\ d = d(x,y)\right)$.
$(\Rightarrow T_0$ und $T_1)$.



Außerdem ist $\forall \{x\}$ abg. (warum?)
d.h., es reicht, T_4 und T_{3a} zu beweisen. $(T_4 \Rightarrow T_3)$

Ü (Verwende die stet. Fkt'en $d(x,A)$ und $d(x,B)$) "$\blacksquare$"

<u>Bem.</u> T_0, T_1 heißen schwache Trennungseigenschaften.

$\boxed{\text{Prop}}$ Für einen TR $(X,\mathcal{T})$ sind äquiv.:

(i) X ist T_1

(ii) $\forall$ einpunktige Menge ist abg.

(iii) $\forall A \subset X$ ist der Durchschnitt aller ihrer Umg.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) $|X| = 1$ – klar.

$|X| \geq 2$. Sei $x \in X$. Für $y \neq x$ sei $U_y \in \mathcal{U}(y)$ mit $x \notin U_y$. Dann:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y \text{ offen.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $A \subset X$.

$\forall x \notin A$ ist $X \setminus \{x\}$ offen, d.h.,

$$A = \bigcap_{x \notin A} (X \setminus \{x\}) \overset{\text{Warum?}}{=} \bigcap_{U \supset A} U$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seien $x \neq y$. Nach Vorauss. gilt:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U$$

D.h., $y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U$, also $\exists U \in \mathcal{U}(x)$: $y \notin U$.

Analog für $\{y\}$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Prop.}}$ Für einen TR X sind äquiv.

(i) X ist T_2 (Hausdorff)

(ii) $\forall$ konv. Filter / Netz besitzt genau einen Limes(punkt)

(iii) $\forall x \in X$ gilt

$$\{x\} = \bigcap \{F \text{ abg. mit } F \supset U \text{ für ein } U \in \mathcal{U}(x)\}$$

$$\Big(= \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} \overline{U} \Big)$$

warum?

(iv) Die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ist abg. in $X \times X$

$\square$

Beweis (i) $\Longrightarrow$ (ii) Für Filter (Netze: Ü)

sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$, d.h., $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$

Ang.: $\exists y \neq x$ mit $\mathcal{F} \to y$, d.h., $\mathcal{U}(y) \subset \mathcal{F}$

(i) $\Rightarrow$ $\exists\, U, V$ off., disj. $x \in U$, $y \in V$.

Aber $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{F}$ $\lightning$

(ii) für Filter $\Rightarrow$ (iii) (Netze: $\tilde{u}$)

$\{x\} \subset \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}(x)} \overline{U}$ klar.

„$\supset$": sei $y \in \overline{U}$ $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ $\Rightarrow$ y ist Berührungspunkt von $\mathcal{F}_{\mathcal{U}(x)}$

Wir wissen: $\exists\, \tilde{\mathcal{F}}$ feiner als $\mathcal{F}_{\mathcal{U}(x)}$ mit $\tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow y$ (siehe Sektion II.2)

Da $\tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow x$, muss $x = y$ nach (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seien $x \neq y$. Nach (iii) $\exists\, U \in \mathcal{U}(x)$: $y \notin \overline{U}$.

Def. $V := X \setminus \overline{U}$ offen, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

(i) $\Leftarrow$ (iv) $\overset{\circ}{U}$

"■"

Bsp (Eindeutigkeit des Folgenlimes $\not\Rightarrow T_2$)

Bsp am Ende der Sektion II.2 (Hung)

$(\mathbb{R}, \tau)$, $\tau := \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : X \setminus A$ höchst. abz.$\}$,

- $x_n \to x \iff x_n = x$ für große n
- X nicht T_2: $U \cap V \neq \emptyset$ $\forall U, V \neq 0$, offen.

Satz Seien X TR, Y Hausdorff, $f, g : X \to Y$ stetig.

(a) $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ abg. in X.

(b) $\left.\begin{array}{l} D \subset X \text{ dicht} \\ f|_D = g|_D \end{array}\right\} \Rightarrow f \equiv g$

(c) Der Graph $\{(x,y) \in X \times Y \text{ mit } f(x) = y\}$ von f ist abg. in $X \times Y$.

<u>Bew.</u> (a) Die Abb. $\begin{array}{l} (f,g) : X \to Y \times Y \\ x \longmapsto (f(x), g(x)) \end{array}$ ist stetig (warum?)

und $A := \{x : f(x) = g(x)\}$ ist das Urbild der $\underbrace{\text{Diagonale } \Delta \subset Y \times Y}_{\text{abg.}}$ (da Y T_2)

(b) folgt aus (a) $(A \supset D,\ A \text{ abg.} \Rightarrow A \supset \overline{D} = X)$

(c) Betr.: $\begin{array}{l} h : X \times Y \to Y \times Y \\ (x,y) \mapsto (f(x), y) \end{array}$ – stetig. (warum?)

Der Graph von f = Urbild der $\underbrace{\text{Diagonale } \Delta \subset Y \times Y}_{\text{abg.}}$ ■

$\boxed{\text{Def}}$ Ein TR heißt

- regulär, wenn $T_1 + T_3$ (insb. T_2)
- vollständig regulär, wenn $T_1 + T_{3a}$ (insb. regulär)
- normal, wenn $T_1 + T_4$ (insb. T_3, T_2 … später: auch T_{3a}).

Bem. Damit hat man:

$$\begin{tikzcd}
\text{normal} \arrow[r, Rightarrow, "\text{später}"] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{vollst. regulär} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{regulär} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{Hausdorff} \arrow[d, equal] & & \\
T_4 & T_{3a} \arrow[r, Rightarrow] & T_3 & T_2 \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \arrow[r, Rightarrow] & T_0
\end{tikzcd}$$

Prop. (Vererbbarkeit von Trennungseigenschaften)

Ein Unterraum eines T_0-, T_1-, T_2-, T_3- bzw. T_{3a}- Raumes ist wieder $T_0, \dots, T_3$ bzw. T_{3a}. Insb. gilt:

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ (vollst.) regulär} \\ Y \subset X \end{array}\right\} \Rightarrow Y \text{ (vollst.) regulär.}$$

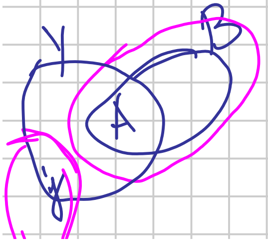
Beweis für T_3, Rest ü (analog)

Sei $Y \subset X$, X T_3, $A \subset Y$ abg. in Y, d.h., $A = Y \cap B$, B abg. in X,

$y \in Y \setminus A$.

X $T_3 \Rightarrow \exists\, U, V$ offen, disj., $y \in U$, $B \subset V$.

$\Rightarrow U \cap Y$, $V \cap Y$ die gesuchten Umg. von y und A. ∎



Bem. 1) **Achtung:** $\left.\begin{array}{l} X \text{ normal} \\ Y \subset X \end{array}\right\} \not\Rightarrow Y$ normal (d.h., für T_4 falsch i.A.)

(ohne Beweis)

2) **Abg.** Unterräume eines normalen (bzw. T_4-) Raumes sind normal (T_4) Ü

3) Man kann zeigen:

$\prod_\alpha X_\alpha$ ist T_0-, T_1-, T_2-, T_3-, bzw. T_{3a}-Raum

$\Longleftrightarrow \forall\, X_\alpha$ ist — " —.

Aber: $\forall\, X_\alpha$ normal $\not\Rightarrow \prod_\alpha X_\alpha$ normal ($\Leftarrow$ doch: Ü)

4) i. A. vererben Quotientenräume keine Trennungseigensch.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = [0,1]$ mit natürl. Top. $(T_0, \dots, T_4)$

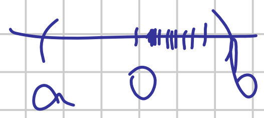
$x \sim y \Leftrightarrow (x = y$ oder $x, y \in \mathbb{Q})$

Ü Ä'rel., $X/_{\sim}$ erfüllt keine der Axiome $T_1, \dots, T_4$ (T_0 aber doch).

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Hausdorff $\not\Rightarrow$ regulär)

$\mathbb{R}$ mit folg. Top.:

- $\forall x \neq 0$ sei $\mathcal{U}(x)$ wie in natürl. Top.
- $\mathcal{U}(0) :=$ Obermengen von $(a,b) \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $a < 0 < b$



Ü : • Top. τ
• $(\mathbb{R}, \tau)$ ist Hausdorff, aber nicht regulär (nicht T_3)

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Ordnungstopologie)

Sei $(X, \leq)$ eine total (linear) geordnete Menge.

Def.
$$(-\infty, a) := \{x \in X : x < a\}$$
$$(a, \infty) := \{x \in X : x > a\} \quad \forall a.$$

Die von diesen Intervallen erzeugte Top. heißt Ordnungstop. auf X.
Subbasis

Bsp: $\mathbb{R}$, natürl. Top.

Dann ist (X, τ) normal.

Beweis $\mathcal{U}^*$ Hinweis (für T_4): Seien A, B disj., abg.

Schritt 1 Zeige, dass

$$A^* = \bigcup \{ [a,b],\ a,b \in A : [a,b] \cap B = \emptyset \}$$

$$B^* = \bigcup \{ [c,d] : c,d \in B : [c,d] \cap A = \emptyset \}$$

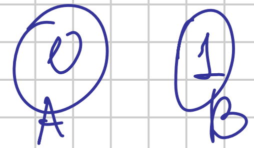
disjunkt sind.

Schritt 2 Zerlege A^*, B^* in $\underbrace{\text{konvexe}}_{a,b \in C \Rightarrow [a,b] \subset C}$ Komponenten und trenne A^*, B^* durch offene Mengen. komponentenweise

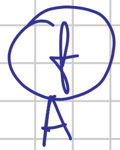
Schritt 3 Trenne A und B.

III.2. Stetige Fortsetzung von Fkt'en

Fragen:



1) Wann kann man abg. disj. Mengen durch stetige Fkt'en trennen ($f : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A = 0$, $f|_B = 1$) (d.h., „T_{4a}") ?

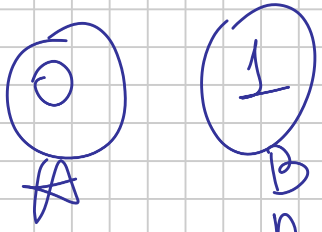


2) Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, $A \subset X$ abg. Wann $\exists\, F : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $F|_A = f$?

Bem. 1) $\Rightarrow$ T_4 (warum?), also nehmen wir T_4 an.

Es gilt 1) $\Leftrightarrow$ T_4:

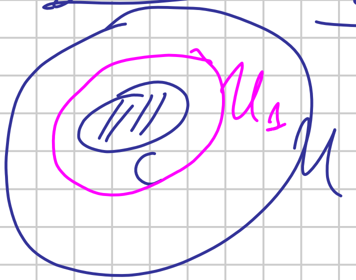
$\boxed{\text{Satz}}$ (Lemma von Urysohn)



Sei X T_4 und $A, B \neq \emptyset$, abg., disj. $\subset X$. Dann $\exists f: X \to [0,1]$ mit $f|_A = 0$, $f|_B = 1$ stetig.

Beweis

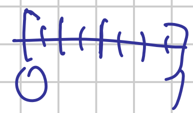
Beobachtung: X ist $T_4 \Rightarrow \forall$ abg. $C \subset X$ $\forall\, U \supset C$ offen $\exists\, U_1$ offen mit $C \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset U$



Beweis der Beob.:

C und $X \setminus U$ abg., disj. $\overset{T_4}{\Longrightarrow}$ $\exists\, U_1 \supset C$, $\exists\, V \supset X \setminus U$ offen, disj.

Zz.: $\overline{U_1} \subset U$. Ang.: $x \in \overline{U_1}$. Dann: $x \in U$ (da sonst $V \cap U_1 \neq \emptyset$, $V \in \mathcal{U}(x)$ ⚡).

Betr. $D := \left\{ \frac{m}{2^n},\ n \in \mathbb{N},\ m \in \{0, \dots, 2^n\} \right\}$ 

und bilde daraus die Folge

$$F := \left(0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \dots,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \dots,\ \frac{2^n - 1}{2^n},\ \dots \right)$$