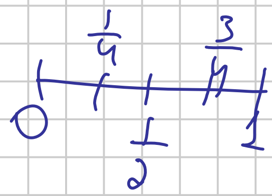
Notiztitel 05.06.2018

$D := \left\{ \frac{m}{2^n},\ n \in \mathbb{N},\ m \in \{0, \dots, 2^n\} \right\}$

$F := \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots\right)$

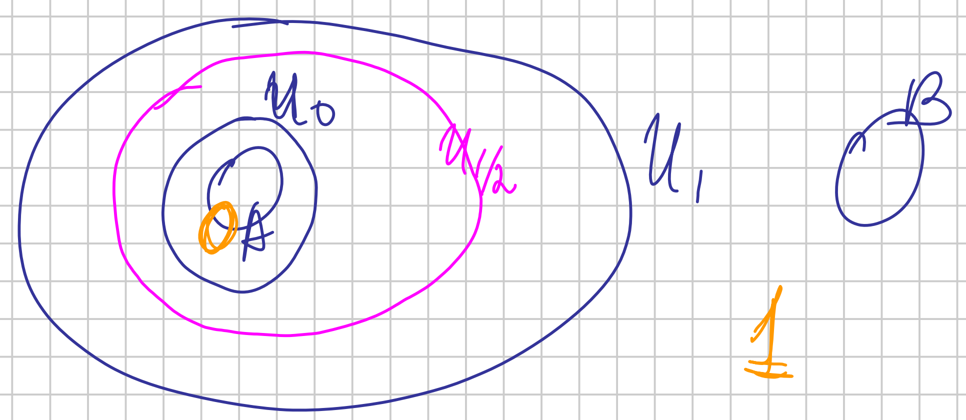


Beobachtung mehrmals angewandt:

$\exists\, U_0, U_1$ offen mit

$$A \subset \underset{\text{zuerst}}{U_0} \subset \overline{U_0} \subset \underset{\text{danach}}{U_1} \subset \overline{U_1} \subset X \setminus B$$

Def. $f|_{U_0} := 0$ (insb. $f|_A = 0$) und $f|_{X \setminus U_1} := 1$ (insb. $f|_B = 1$)



<u>Idee</u>: Def. Niveaumengen von f durch weitere Verfeinerung zwischen U_0 und U_1.

Def. $U_{1/2}$ mit

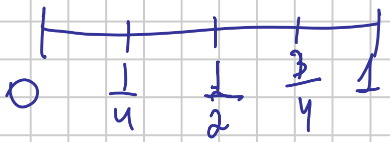
$$\overline{U_0} \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset U_1,$$

$U_{1/4}$ mit $\overline{U_0} \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2}$,

$U_{3/4}$ mit $\overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset U_1$

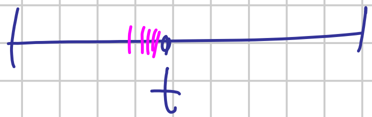
Usw. induktiv: gegeben $U_{d_1}, U_{d_2}, \dots, U_{d_n}$ ($d_1, \dots, d_n$ die ersten Glieder in F), setze für d_{n+1} $U_{d_{n+1}}$ so, dass

$$\overline{U_d} \subset U_{\tilde{d}}, \text{ sobald } d < \tilde{d}, \quad d, \tilde{d} \in \{d_1, \dots, d_{n+1}\}$$



Für $t \in [0,1]$ def.

$$U_t := \bigcup_{\substack{d \in D \\ d \leq t}} U_d$$



Eigenschaften von (U_t):

- $\forall\, U_t$ ist offen
- $\forall d \in D$ ist U_d wie davor
- $t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{U_{t_1}} \subset U_{t_2}$ (warum?)

Def. nun

$f(x) := \inf\{t \in [0,1]: x \in U_t\}$ für $x \in U_1$

(erinnere: $f = 1$ in $X \setminus U_1$)

- $f: X \to [0,1]$ klar, $f|_A = 0$, $f|_B = 1$ klar
- zz.: f stetig.

Da $[0,s)$, $(s,1]$, $s \in [0,1]$ eine Subbasis der natürl. Top. auf $[0,1]$ bilden, reicht es zz.:

$f^{-1}([0,s))$, $f^{-1}((s,1])$ offen.

$$f^{-1}([0,s)) = \{x \in X: f(x) < s\} = \{x \in X: \exists t < s \text{ mit } x \in U_t\}$$

$$= \bigcup_{t<s} U_t \text{ offen}$$

Analog:

$$f^{-1}([0,s]) = \bigcap_{t>s} f^{-1}([0,t)) \overset{\text{Monotonie von } (\mathcal{U}_t)}{=} \bigcap_{t>s} \mathcal{U}_t$$

$$= \bigcap_{t>s} \overline{\mathcal{U}_t} \text{ - abg.}$$

$$\Rightarrow f^{-1}((s,1]) \text{ offen} \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ Ü Geben Sie eine stetige Fkt $f: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ mit $f|_A = 0$, $f|_B = 1$, wobei

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$, $B := \{(x,y) : x = 0 \text{ oder } y = 0\}$

Korollar X normal $\Rightarrow$ X vollständig regulär

$\text{normal} = T_1 + T_4$, $\quad \text{vollständig regulär} = T_1 + T_{3a}$

Beweis $T_4 \overset{\text{Urysohn}}{\Longrightarrow}$ Trennung von 2 disj. abg. Mengen durch stet. Fkt,

$\{x\}$ ist abg. wegen T_1 $\Rightarrow$ T_{3a} ∎

Bem. Im Beweis von Urysohn war $f^{-1}(\{0\}) \supsetneq A$,

$f^{-1}(\{1\}) \supsetneq B$ i.A. **Frage:** Wann kann man „=" bekommen?

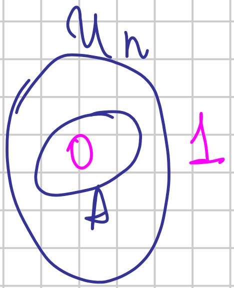
Prop Sei X ein T_4-Raum und $\emptyset \neq A \subset X$ abg. Dann gilt:

$\exists f: X \to \mathbb{R}$ stetig mit $f^{-1}(\{0\}) = A$ $\iff$ A eine G_δ-Menge, d.h.,

$\exists (U_n)$ offen: $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Beweis $\Rightarrow$ Ü

$\Leftarrow$ Sei A abg., $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, U_n offen.



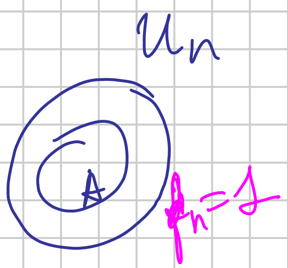
Urysohn: $\forall n\ \exists f_n : X \to [0,1]$ stetig mit

$$f_n|_A = 0, \quad f_n|_{X \setminus U_n} = 1.$$

Betrachte $g_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{f_n}{2^n}$.

Ü
- g_N konv. gleichmäßig gegen ein $g : X \to [0,1]$
- Gleichm. Limes von stet. Fkt'en ist stetig

$\Rightarrow g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$ ist stetig. Außerdem gilt:



$$g(x) = 0 \iff x \in A$$

($\Leftarrow$ klar, $\Rightarrow$:

$g(x) = 0 \iff f_n(x) = 0 \ \forall n \Rightarrow x \in U_n \ \forall n$
$\iff x \in A$). ■

Satz (Verschärfung des Urysohn-Lemmas)

Sei X T_4, $A, B \subset X$ disj., abg., $\neq \emptyset$. Sind A und B G_δ-Mengen, so $\exists f: X \to [0,1]$ stetig mit $A = f^{-1}(\{0\})$ und $B = f^{-1}(\{1\})$.

Bew.: Ü (spiele mit vorher. Prop., Urysohn, max, min). "■".

Frage 2 Wann kann man stetige Fkt'en auf abg. Mengen stetig fortsetzen?

(in Urysohn: Fortsetzung von 0_A 1_B)

$\boxed{\text{Satz}}$ (Tietze-Urysohn)

X ist T_4 $\iff$ $\forall A \subset X$ abg. $\forall f: A \to \mathbb{R}$ stetig
$\exists F: X \to \mathbb{R}$ stetig mit $F|_A = f$

Beweis $\Leftarrow$ $\mathcal{U}$ (benutze 0_A 1_B)

$\Rightarrow$ (für $f: A \to [-1,1]$)

Schritt 1 Wir zeigen zuerst: $\exists (g_n)$, $g_n: X \to [-1,1]$ stetig mit

(a) $|g_n(x)| \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall x \in X$

(b) $|f(x)-g_n(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall x \in A$

(c) $|g_{n+1}(x)-g_n(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall x \in X.$

Def. $g_0 = 0$ – erfüllt (a), (b)

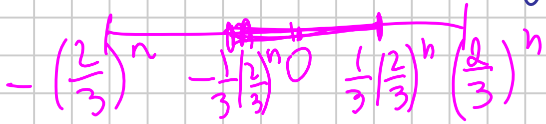
Ang., $g_0, \dots, g_n$ mit (a) – (c) gegeben.

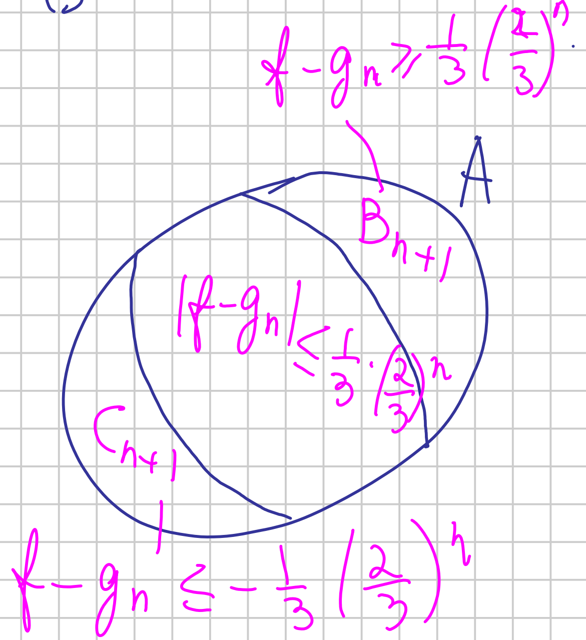
Def. $B_{n+1} := \{x \in A : f(x) - g_n(x) \ge \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\}$

$C_{n+1} := \{ \quad — \| — \quad \le -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\}$

– disj., abg. (warum?)

Urysohn:





$\exists\, r_n : X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ stetig mit

$$r_n\big|_{B_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad r_n\big|_{C_{n+1}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(Wenn $B_{n+1} = \emptyset = C_{n+1}$, setze $r_n := 0$

Wenn z.B. $B_{n+1} = \emptyset$, $C_{n+1} \neq \emptyset$, nimm r_n wie in der Prop. oben

(C_{n+1} ist G_δ))

Def. $g_{n+1} := g_n + r_n$ – stetig auf X

(a) $|g_{n+1}| \leq |g_n| + |r_n| = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

(b): Auf $A \setminus (B_{n+1} \cup C_{n+1})$ gilt:

$$|f - g_{n+1}| \leq |f - g_n| + |r_n| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

Auf B_{n+1}:

$$f - g_{n+1} = \underbrace{f - g_n}_{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \dots \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \in \left[0, \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Analog auf C_{n+1}:

$$f - g_{n+1} \in \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, 0\right].$$ Also gilt (b)

(c) $|g_{n+1} - g_n| = |r_n| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

<u>Schritt 2</u> (Konstruktion von F)

Nach (c) gilt $\forall n, k \in \mathbb{N}$

$$|g_{n+k} - g_n| \leq |g_{n+k} - g_{n+k-1}| + \dots + |g_{n+1} - g_n|$$

$$\le \cancel{\tfrac{1}{3}} \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \underbrace{\left(1 + \tfrac{2}{3} + \ldots + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{k-1}\right)}_{\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \cancel{3}} \le \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d.h., (g_n) ist gleichm. Cauchy, insb.

$$\exists\, F(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x) \quad \forall x$$

- F stetig als gleichm. Limes stet. Fkt'en
- $|F(x)| \le 1 \quad \forall x \in X$ (wegen (a))
- $F|_A = f$ (wegen (b)). ∎

<u>Bem.</u> 1) Wir haben sogar eine stet. Fortsetzung mit gleicher Schranke wie f.

2) Der allg. Fall braucht weitere 2 Schritte:

<u>Schritt 3</u> Zeige: $\forall f: A \to (-1,1)$ stetig $\exists F: X \to (-1,1)$ stetig mit $F|_A = f$

(Idee: multipl. $\tilde{F}: X \to [-1,1]$ mit $g: X \to [-1,1]$ stetig: $g|_A = 1$, $g|_{\tilde{F}^{-1}(\{-1,1\})} = 0$).

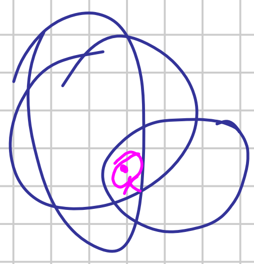
<u>Schritt 4</u> Für $f: A \to \mathbb{R}$ benutze $(-1,1) \sim \mathbb{R}$ und Schritt 3.

$f: A \to \mathbb{R} \to (-1,1)$

Ü.

III. 3. Partitionen der Eins

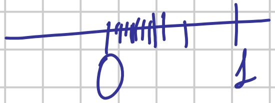
Def Sei $\mathcal{A} := (A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X.
Dann heißt $\mathcal{A}$



- <u>lokal-endlich</u>, wenn $\forall x \in X \;\exists U \in \mathcal{U}(x): U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $\alpha \in I$ gilt.
- <u>punkt-endlich</u>, wenn $\forall x \in X$ $x \in A_\alpha$ für höchstens endlich viele α.
- <u>Überdeckung</u> von X, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = X$
- <u>offene Überdeckung</u>, wenn noch dazu $A_\alpha \in \tau \;\forall \alpha$.

Bem. lokal-endlich $\Rightarrow$ punkt-endlich.

$\boxed{\text{Bsp}}$ ($\not\Leftarrow$ i. A.)



$X := \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ mit natürl. Top.

$\mathcal{A} := \{\{\frac{1}{n}\},\ n \in \mathbb{N}\} \cup X$

Ü $\mathcal{A}$ ist punkt-endlich, aber nicht lokal-endlich

$\boxed{\text{Prop}}$ Sei X T_4 und $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine punkt-endliche offene Überdeckung von X. Dann $\exists$ offene Überdeckung $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ von X mit

$$\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha \quad \forall \alpha \in I.$$

<u>Beweisskizze</u> Sei M die Menge aller offenenen Überdeckungen von X der Form

$$(V_k)_{k \in K} \cup (U_\ell)_{\ell \in L}, \text{ wobei } K \cup L = I,\ K \cap L = \emptyset$$

und $\forall k \in K$ V_k offen mit $\overline{V_k} \subset U_k$.

Da $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathfrak{M}$ (nimm $K = \emptyset$), ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$.

Def. $\leq$ auf $\mathfrak{M}$ mit $C \leq C'$, $C = (V_k)_{k \in K} \cup (\mathcal{U}_\ell)_{\ell \in L}$, $C' = (V'_k)_{k \in K'} \cup (\mathcal{U}_\ell)_{\ell \in L'}$

$\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $K \subset K'$ und $V_k = V'_k$ für $k \in K$

Ü „$\leq$" ist part. Ordnung, $\forall$ Kette hat eine obere Schranke
total geordnete Teilmenge
(benutze punkt-Endlichkeit)

Lemma von Zorn: $\exists$ max. Element $C^* = (V_k)_{k \in K^*} \cup (\mathcal{U}_\ell)_{\ell \in L^*}$

ZZ: $L^* = \emptyset$. Ang.: $\exists \alpha \in L^*$.

Betr.
$$B := X \setminus \left(\bigcup_{k \in K^*} V_k \cup \bigcup_{\substack{\ell \in L^* \\ \ell \neq \alpha}} \mathcal{U}_\ell \right)$$

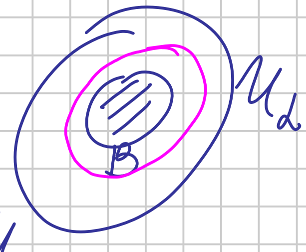
- B ist abg.

- $B \subset U_\alpha$ (da C^* eine Überdeckung ist)

Fall 1: $B = \emptyset$, dann def. $V_\alpha := \emptyset$

Fall 2: $B \neq \emptyset$.

Da X T_4, $\exists V_\alpha$ offen mit $B \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$



(siehe Beobachtung in Urysohn)

Dann erfüllt

$$C' = \left((V_k)_{k \in K} \cup (V_\alpha) \right) \cup (U_\ell)_{\substack{\ell \in L^* \\ \ell \neq \alpha}}$$

$C' > C^*$ ↯ (C^* maximal). Also gilt $L^* = \emptyset$. ∎

$\boxed{\text{Def. + Satz}}$ (Existenz von Partitionen der Eins)

Sei X T_4 und $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine lokal-endliche Überdeckung

von X. Dann $\exists$ eine <u>Partition der Eins zu (U_α)</u>, d.h.,
eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ von stetigen Fkt'en auf X mit:

(a) $f_\alpha \geq 0 \quad \forall \alpha$

(b) $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha \quad \forall \alpha$, insb. bilden $(\mathrm{supp}(f_\alpha))$

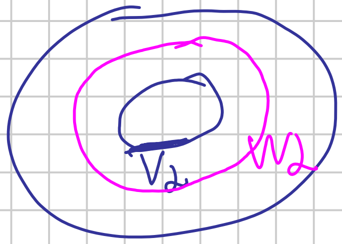
$\mathrm{supp}(f_\alpha) = \overline{\{x : f_\alpha(x) \neq 0\}}$

ein lokal-endliches System

(c) $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in X$

die Summe ist höchstens endlich

<u>Beweis</u> Prop. davor: $\exists (V_\alpha)_{\alpha \in I}$ offene Überd. mit $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$.



Da X T_4, $\forall \alpha\ \exists W_\alpha$ offen mit

$$\overline{V_\alpha} \subset W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset U_\alpha$$

Urysohn $\exists g_\alpha : X \to [0,1]$ stetig mit $g_\alpha|_{\overline{V_\alpha}} = 1$, $g_\alpha|_{X \setminus W_\alpha} = 0$

- $\operatorname{supp} g_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset U_\alpha$
- $g(x) := \sum_{\alpha \in I} g_\alpha(x)$ – wohldef., da endl. Summe

  stetig – da (U_α) lokal-endlich
- $g(x) \geq 1 \quad \forall x \in X$ (da (V_α) überdeckung)

Def. $f_\alpha := \frac{g_\alpha}{g}$ – stetig, $\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$, $\sum_\alpha f_\alpha = 1$ ■

Bem. Man kann zeigen:

Sei X Hausdorff. Dann gilt:

$\forall$ off. Überdeckung $\exists$ Partition der Eins dazu

$\iff$ X parakompakt, d.h., Hausdorff und $\forall$ off. Überdeckung $\mathcal{U}$ $\exists$ off. Überdeckung $\mathcal{V}$ mit

- $\mathcal{V}$ ist lokal-endlich
- $\mathcal{V}$ ist eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, d.h., $\forall V \in \mathcal{V}\ \exists U \in \mathcal{U}$ mit $V \subset U$

$\Rightarrow$: Nimm $V_f := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ $\forall f \in$ Partition der Eins zu $\mathcal{U}$

offen, lokal-endlich, Verfeinerung

$\Leftarrow$ ohne

(Idee: zeige zuerst: Parakompakt $\Rightarrow T_4$, dann wie oben für σ)

IV Kompaktheit

1. Kompaktheit, abzählbare Kompaktheit und Folgenkompaktheit.

$\boxed{\text{Def}}$ 1) Ein top. Raum X heißt **kompakt**, wenn $\forall$ offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h.,

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X, \text{ alle } U_\alpha \text{ offen} \Rightarrow \exists n \; \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I: \; \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} = X.$$

2) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **kompakt**,

wenn A komp. bzgl. der Teilraumtop. ist, d.h.:
$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, alle U_α offen $\Rightarrow$ —"— mit $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$.

<u>Bem.</u> Oft nimmt man die Hausdorff-Eigenschaft in die Def. rein (z.B. Bourbaki)

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\forall$ endl. X ist komp. (und endliche Topologien!)
2) Sei X beliebig mit cofiniter Top. Dann ist X komp.

Ü

$\boxed{\text{Satz}}$ Es sind äquiv.:
(i) X ist kompakt
(ii) $\forall$ Familie $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ abg. Mengen mit $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \emptyset$ enthält eine endliche Familie $(B_{\alpha_j})_{j=1}^{n}$ mit $\bigcap_{j=1}^{n} B_{\alpha_j} = \emptyset$

(iii) $\forall$ Filter auf X besitzt einen Berührungspunkt

(iv) $\forall$ Ultrafilter konvergiert in X.

Beweis (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Ü (Übergang zum Komplement)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Erinnerung: x Berührungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \forall F \in \mathcal{F} \;\; F \cap U \neq \emptyset,$$

d.h., $x \in \overline{F} \;\; \forall F \in \mathcal{F}$.

Ang. $\exists$ Filter $\mathcal{F}$ ohne Berührungspunkte, d.h., $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset$

(ii) $\Rightarrow$ $\exists F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ mit $\bigcap_{j=1}^{n} \overline{F_j} = \emptyset$ $\lightning$ (Def. des Filters)

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sei $\mathcal{F}$ Ultrafilter. Nach Vorauss. $\exists$ Berührungspunkt x. Erinnere: $\exists \tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$ mit $\tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow x$

$\mathcal{F}$ Ultrafilter $\Rightarrow$ $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I} =: \mathcal{U}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Def. $\forall L \subset I$ endlich

$$A_L := X \setminus \left(\bigcup_{\ell \in L} U_\ell \right) \neq \emptyset \quad \text{nach Voraus.}$$

Nach Konstruktion gilt $A_L \cap A_{L'} \neq \emptyset \quad \forall L, L'$ endlich

Also $\exists \, \mathcal{F}$ Filter mit Basis $(A_L)_{L \subset I \text{ endlich}}$ (Obermengen).

Sei $\tilde{\mathcal{F}}$ Ultrafilter mit $\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$.

Nach (iv) $\exists \, x$ mit $\tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow x$, d.h., $\mathcal{U}(x) \subset \tilde{\mathcal{F}}$.

Da (U_α) eine offene Überdeckung ist, $\exists \alpha$ mit $x \in U_\alpha$, d.h., $U_\alpha \in \tilde{\mathcal{F}}$. Aber: $X \setminus U_\alpha = A_{\{\alpha\}} \in \tilde{\mathcal{F}}$ $\lightning$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Folgerung}}$ Sei X komp. Dann besitzt $\forall$ Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset X$ (insb. $\forall$ Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$) einen Häufungspunkt.

Beweis Betrachte den von (x_α) (bzw. (x_n)) erzeugten Filter (Obermengen von $\{x_\alpha, \alpha \geq \alpha_0\}$ bzw. $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$). Sein HP ist auch HP des Netzes/der Folge. (Warum?) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp}}$ ($\forall$ Folge hat einen HP $\not\Rightarrow$ X komp.)

Betr. $\{0,1\}$ mit diskr. Top. und $X := \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ mit Produkttop.

Betr. $A := \left\{ x \in X : \exists \text{ abzählb. } I \subset \mathbb{R} \text{ mit } \pi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \alpha \in I \\ 1, & \alpha \notin I \end{cases} \right\}$

Dann gilt:

- $\forall$ Folge in A hat einen HP in A
- A nicht komp.

$\boxed{\text{Folgerung}}$ Sei X top. Raum und $A \subset X$. Es sind äquiv.:

(i) A komp.

(ii) $\forall$ Ultrafilter $\mathcal{F}$ mit $A \in \mathcal{F}$ konv. gegen ein $x \in A$

(iii) $\forall$ Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset A$ hat einen HP in A.

Beweis: Ü

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Ordnungstop.)

Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge mit Ordnungstop. (erzeugt von Intervallen). Ang., $\forall A \subset X$ besitzt ein Sup. und ein Inf. in X. Dann ist X kompakt: Ü

$\boxed{\text{Prop.}}$ a) Abg. Teilmengen komp. Räume sind kompakt

b) X Hausdorff, $A \subseteq X$ komp. $\Rightarrow$ A abg.

Beweis: a) folgt aus dem Satz, (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

b) **Beobachtung** X Hausdorff, $A \subset X$ komp., $x \notin A$

$\Longrightarrow$ man kann x und A durch off. Umgebungen trennen,

Beweis der Beob. Wähle $\forall a \in A$ $U_a \in \mathcal{U}(a)$, $V_a \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$.

Sei $U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_n}$ eine Teilüberdeckung von A

und betr. $U := U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$, $V := V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_n}$. ∎ Beobachtung

Beob. $\Longrightarrow$ $X \setminus A$ ist offen, d.h., A abg. ∎ Prop.

$\boxed{\text{Satz}}$ (Alexander'scher Subbasissatz)

Sei X top. Raum mit Subbasis $\mathcal{S}$ der Top. Dann gilt:

X komp. $\Longleftrightarrow$ $\forall$ Überdeckung von X mit Elementen aus $\mathcal{S}$ $\exists$ endl. Teilüberdeckung.

Beweis "$\Rightarrow$" klar.

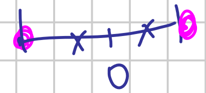
"$\Leftarrow$" Ang., X nicht komp. Dann $\exists \mathcal{F}$ Ultrafilter ohne Limes, d.h., $\forall x \in X \ \exists U_x \in \underline{\underline{\mathcal{S}}}$ mit $U_x \notin \mathcal{F}$ (da $\mathcal{S}$ Subbasis). Da $(U_x)_{x \in X}$ eine off. Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S}$ ist, $\exists x_1, \dots, x_n$ mit $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} = X$.

Da $\mathcal{F}$ Ultrafilter und $U_{x_j} \notin \mathcal{F}$, gilt $X \setminus U_{x_j} \in \mathcal{F} \ \forall j$, also $\bigcap_{j=1}^{n} (X \setminus U_{x_j}) = \underbrace{X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j}\right)}_{\emptyset} \in \mathcal{F}$ ↯ ■

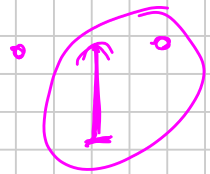
$\boxed{\text{Bsp}}$ $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit natürl. Top. ist kompakt Ü. (als abg. Teilmenge eines $[a,b]$). Insbesondere ist $\forall$ abg. beschr. Menge in $\mathbb{R}$ komp.

$\boxed{\text{Bsp}}$ ($A \subset X$ komp. $\not\Rightarrow$ A abg.)

Sei $X := [-1,1]$ und betr. die Ä'Rel.



$$x \sim y \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = \pm y & \text{für } x \neq \pm 1 \\ x = y & \text{für } x = \pm 1 \end{cases}$$



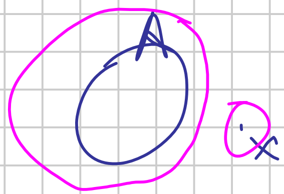
Zeige: $\tilde{X} := X/\sim$ ist T_1, aber nicht T_2,

und $\tilde{X} \setminus [1]$ ist eine komp. Umg. von $[-1]$, die nicht abg. ist.

(Analog: $\tilde{X} \setminus [-1]$ —"— von $[1]$, —"—.)

$\boxed{\text{Satz}}$ Ein komp. Hausdorff-Raum ist T_4, insb. normal und regulär.

<u>Beweis</u> Seien A, B abg., disj. Nach der Beobachtung oben (A komp.):



$\forall x \in B \; \exists \, \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}(x) \; \exists \, V_x \in \mathcal{U}(A)$ mit $\mathcal{U}_x \cap V_x = \emptyset$.

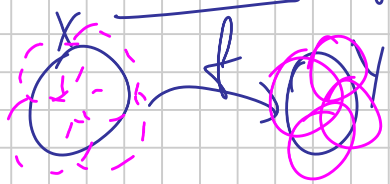
Da B komp., $\exists$ endl. Teilüberdeckung $\mathcal{U}_{x_1}, \dots, \mathcal{U}_{x_n}$ von B.

Nimm $\mathcal{U} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{x_j}$, $V := \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}$. ∎

Ü Zeige: Komp. + $T_3 \Rightarrow T_4$.

$\boxed{\text{Satz}}$ Sei X komp., $f: X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ komp.
Insbesondere nehmen stet. Fkt'en $f: X \to \mathbb{R}$ auf komp. Räumen ihr sup. und inf. an.

Beweis Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine off. Überdeckung von $f(X)$. Dann ist



$(f^{-1}(U_\alpha))_{\alpha \in I}$ —"— von X.

X komp. $\Rightarrow \exists$ endl. Teilüberd. $(f^{-1}(U_{\alpha_j}))_{j=1}^n$

$\Rightarrow (U_{\alpha_j})_{j=1}^n$ endl. Teilüberd. von $f(X)$.

„Insbesondere" folgt, da $f(X) \subset \mathbb{R}$ komp. $\Rightarrow f(X)$ beschr. und abg. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Folgerung}}$ Seien X komp., Y Hausdorff und $f: X \to Y$ stetig, bij.
Dann ist f^{-1} stetig, d.h., f ist ein Homöom.

<u>Beweis</u> zz: $A \subset X$ abg. $\Rightarrow f(A)$ abg.
Dies gilt, da A komp. $\underset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(A)$ komp. $\underset{Y \text{ Hausdorff}}{\Rightarrow} f(A)$ abg.

$\boxed{\text{Satz}}$ (Tychonoff)
Sei $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von top. Räumen. Dann gilt:

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \text{ komp.} \Leftrightarrow \forall X_\alpha \text{ komp.}$$

<u>Beweis</u> $\Rightarrow$ X komp., $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$, $(x_\alpha)_\alpha \mapsto x_\alpha$ stetig $\Rightarrow \pi_\alpha(X) = X_\alpha$ komp.

$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. zz: $\exists x$ mit $\mathcal{F} \to x$.

Betr. $\forall \alpha \in I$ den Bildfilter $\pi_\alpha(\mathcal{F}) = \{\pi_\alpha(F), F \in \mathcal{F}\}$

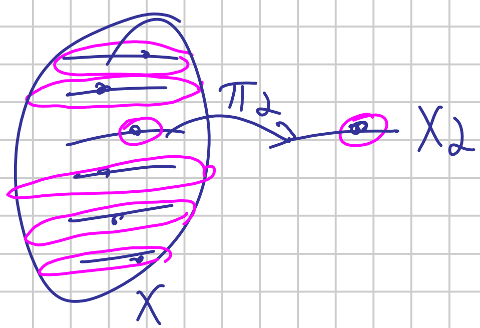
- $\pi_\alpha(\mathcal{F})$ ist ein Ultrafilter auf X_α (Warum? $\pi_\alpha(\mathcal{F})$ nicht max. $\Rightarrow \mathcal{F}$ nicht max). Warum ohne Obermengen?

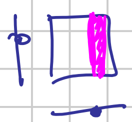
- X_α komp. $\Rightarrow \exists x_\alpha \in X$ mit $\pi_\alpha(\mathcal{F}) \to x_\alpha$.

zz: $\mathcal{F} \to x := (x_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Es reicht zz.: $\forall U \in \mathcal{U}(x)$, $U \in$ Subbasis der Produkttop., gilt $U \in \mathcal{F}$.

Sei U also von der Form $U = \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, U_α offen, mit $x \in U$.





- $U \in \mathcal{U}(x)$
- $U_\alpha \in \pi_\alpha(\mathcal{F})$, da $\pi_\alpha(\mathcal{F}) \to x_\alpha$.

Also $\exists F \in \mathcal{F}$ mit $U_\alpha = \pi_\alpha(F)$,

$\Rightarrow U = \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(U_\alpha)) = \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(F)) \supset F$, d.h., $U \in \mathcal{F}$.

Also gilt $\mathcal{F} \to x$ und X ist kompakt.

<u>Bem.</u> Wir haben im Beweis gezeigt: Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ gilt:

$$\mathcal{F} \to x \iff \pi_\alpha(\mathcal{F}) \to \pi_\alpha(x) \quad \forall \alpha.$$

Folgerung (Heine-Borel)

$A \subset \mathbb{R}^n$ komp. $\iff$ A abg. und beschr.

Ü $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ist Hausdorff $\iff$ $\forall X_\alpha$ Hausdorff.

Weitere Kompaktheitsbegriffe

Def Ein top. Raum X heißt

- abzählbar kompakt, wenn $\forall$ <u>abzählb.</u> offene Überdeckung $\exists$ endl. Teilüberd.

• folgenkompakt, wenn $\forall$ Folge eine konv. TF hat.

Bem. komp. $\Rightarrow$ abz. komp.

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Abz. komp. $\not\Rightarrow$ komp.)

sei $[0,1]^{\mathbb{R}}$ mit Produkttop.,

$$X := \{ (x_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset [0,1]^{\mathbb{R}} : x_t \neq 0 \text{ für höchstens abz. viele } t \in \mathbb{R} \}$$

Ü Zeige: X ist abz. komp., aber nicht komp.

Zeige zuerst: $\forall$ abz. Menge in X $\subset$ abz. komp. Teilmenge, die homöomorph zum abz. Produkt von $[0,1]$ ist.

Zeige: nicht abg. in $[0,1]^{\mathbb{R}}$, $[0,1]^{\mathbb{R}}$ Hausdorff

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Hausdorff + komp. $\not\Rightarrow$ folgenkomp.)

Betr. $X := \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ mit Produkttop., wobei $\{0,1\}$ mit diskt. Top.

- X ist Hausdorff und komp. als Produkt solcher Räume.
- X nicht folgenkomp.:

Betr. $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ def. durch

$$(x_n)_M := \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \notin M \\ 1, & \text{wenn } n \in M \text{ und } \#(\{m \in M : m < n\}) \text{ gerade} \\ 0, & \text{wenn } n \in M \text{ und } \#(\{m \in M : m < n\}) \text{ ungerade} \end{cases} \quad (M \subset \mathbb{N})$$

für $M \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ü: (x_n) hat keine konv. TF.

Bem. Es gilt auch: folgenkomp. $\not\Rightarrow$ komp.!

Ü (Verwende das Bsp oben für abz. komp. $\not\Rightarrow$ komp.:

$X = \{ (x_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset [0,1]^{\mathbb{R}} : x_t \neq 0$ für höchstens abz. viele $t \in \mathbb{R} \}$

und zeige: $\forall$ Folge hat eine konv. TF

(erinnere: konv. in $[0,1]^{\mathbb{R}}$ = punktweise konv.)).

$\boxed{\text{Prop}}$ X folgenkomp. $\Rightarrow$ X abz. kompakt

<u>Beweis</u> <u>Schritt 1</u> Wir zeigen zuerst:

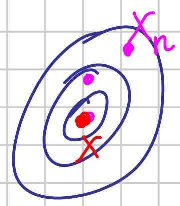
X folgenkomp. $\Rightarrow$ $\forall$ Filter mit einer abz. Basis $\exists$ konv. Oberfilter

(<u>Bem.</u> Es gilt sogar $\Leftrightarrow$)

Sei $\mathcal{B} := \{ B_n, n \in \mathbb{N} \}$ eine Basis von einem Filter $\mathcal{F}$ auf X.

Betr. $\qquad \tilde{\mathcal{B}} := \{ \tilde{B}_n := \bigcap_{j=1}^{n} B_j \,,\ n \in \mathbb{N} \}$

– auch eine abz. Basis von $\mathcal{F}$ mit $\tilde{B}_n \downarrow$



Wähle $\forall n$ ein $x_n \in \tilde{\mathcal{B}}_n$. Nach Vorauss.

$\exists$ konv. TF (x_{n_k}), $x_{n_k} \to x$. Dann konv. $\tilde{\mathcal{F}}$ erzeugt

von $\{ \{ x_{n_k}, k \geq j \}, j \in \mathbb{N} \}$ gegen x (warum?)

und $\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$

<u>Schritt 2</u> zz: X abz. kompakt:

Sei $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ eine off. Überdeckung von X. Ang.: $\nexists$ endl.

Teilüberdeckung. Dann ist

$$\mathcal{B} := \{ X \setminus \left(\bigcup_{n \in I} U_n \right), \ I \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \}$$

eine Filterbasis (warum?), abz

Nach Schritt 1 $\exists$ konv. Oberfilter $\tilde{\mathcal{F}}$ gegen ein x.

Da (U_n) überd., $\exists j$ mit $x \in U_j$. Da $\tilde{\mathcal{F}} \to x$, muss $U_j \in \tilde{\mathcal{F}}$

$\lightning$ (da $X \setminus U_j \in \tilde{\mathcal{F}}$ nach Konstr.) $\blacksquare$

<u>Bem.</u> Da komp. $\not\Rightarrow$ Folgenkomp., gilt abz. komp. $\not\Rightarrow$ Folgenk.

$\Downarrow$ abz. komp. $\not\Rightarrow$

$\boxed{\text{Satz}}$ X abz. komp. $\Leftrightarrow$ $\forall$ Folge (x_n) $\exists$ Häufungspunkt.

<u>Beweis</u> $\Rightarrow$ Ang., X abz. komp., $(x_n) \subset X$.

Betr. $A_k := \overline{\{x_n, n \geq k\}}$, $U_k := X \setminus A_k$.

Ang.: (x_n) hat keinen HP, d.h., $\bigcap_k A_k = \emptyset$

$\Rightarrow$ (U_k) ist eine abz. off. Überdeckung von X.

Nach Voraus. $\exists$ endl. Teilüberd., d.h., $\exists\, m$: $\bigcap_{k=1}^{m} A_k = \emptyset$

$\lightning$ (da $\bigcap_{j=1}^{m} \{x_n, n \geq j\} \neq \emptyset$)

$\Leftarrow$ Sei (U_n) eine abz. off. überd. ohne endl. Teilüberd.

Betr. $\forall n$ ein $x_n \in X \setminus \bigcup_{j=0}^{n} U_j$. Nach Voraus. $\exists$ Häufungsp. x von (x_n). Da (U_n) überd., $\exists j$ mit $x \in U_j$.

Nach Konstr. gilt aber $x_n \notin U_j$ $\forall n > j$ $\lightning$ (x kein HP) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Folgerung}}$ X abz. komp., $A \subset X$ abg. $\Rightarrow$ A abz. komp.

Satz Erfüllt X das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so gilt

$$X \text{ folgenkomp.} \iff \text{abz. komp.}$$

Beweis z.z.: $\Leftarrow$. Sei X abz. komp. mit dem 1. Abz'Axiom.
Sei $(x_n) \subset X$. Nach Vorauss. (+ Satz davor) $\exists$ HP x von (x_n). Sei $(U_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{U}(x)$ eine Umgebungsbasis.
Betr. (V_n) mit

$$V_n := \bigcap_{j=1}^{n} U_j$$

– abz. Umg'basis mit $V_n \downarrow$
Def. (x_{n_k}) induktiv:

- Sei $x_{n_1} \in V_1$ beliebig

• Sei $n_{k+1} > n_k$ mit $x_{n_k} \in V_k$

Da $V_n \downarrow$, gilt $x_{n_k} \to x$ (Warum?) $\blacksquare$

Wir haben also:

$$\begin{tikzcd}
\text{Komp.} \arrow[rr, Rightarrow, shift left, "/"] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] & & \text{Folgenkomp.} \arrow[ll, Rightarrow, shift left, "/"] \arrow[dl, Rightarrow, shift left] \\
& \text{abz. komp.} \arrow[ul, Rightarrow, shift left, "/"] \arrow[ur, Rightarrow, shift left, "/"] &
\end{tikzcd}$$

wenn 2. Abz'Axiom erfüllt
(da $\forall$ off. überd. eine abz. Teilüb. hat (warum?))

wenn 1. Abz'Axiom erfüllt

$\boxed{\text{Satz}}$ Sei X metrisch. Dann gilt:

X komp. $\Leftrightarrow$ folgenkomp. $\Leftrightarrow$ abz. komp.

Beweis Da 1. Abz'Axiom erfüllt ist, gilt folgenkomp. $\Leftrightarrow$ abz. komp.

zz: X abz. komp. $\Rightarrow$ komp.

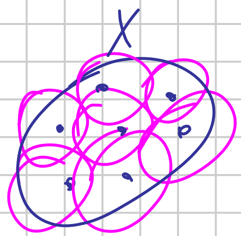
Schritt 1 X abz. komp., metrisch $\Rightarrow$ X separabel
(∃ abz. dichte TM)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Da ∀ Folge einen HP hat, ∄ unendl. $E \subset X$ mit $d(x,y) \geq \frac{1}{n}$ $\forall x,y \in E,\ x \neq y$.

∃ also eine endl. Menge $K_n \subset X$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X\ \exists y \in K_n : d(x,y) < \frac{1}{n}$$

(wähle $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus U_{\frac{1}{n}}(x_1)$ usw. bis es nicht weiter geht),



Dann ist
$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$
eine abz. <u>dichte</u> Teilmenge von X.

$\forall x\ \forall n\ \exists y \in K_n \subset D$ mit $d(x,y) < \frac{1}{n}$

<u>Schritt 2</u> Betr.
$$\mathcal{B} := \{ U_{\frac{1}{n}}(y),\ y \in D,\ n \in \mathbb{N} \}$$
– eine abz. Basis der Top. (warum?)

Also hat $\forall$ off. Überd. von X eine abz. Teilüberdeckung
$\Rightarrow$ eine endl. Überd. $\blacksquare$

X abz. komp.

<u>Bem.</u> 1) Wir haben gezeigt, dass für metr. Räume

X komp. $\Leftrightarrow$ folgenkomp. $\Leftrightarrow$ abz. komp. $\Rightarrow$ separabel

$\Uparrow$ 2. Abz. Axiom

2) ℓ^∞ mit $\|\cdot\|_\infty$ bzw. d_∞ ist nicht separabel (Warum?)
also nicht komp usw.

2. Lokalkompakte Räume

$\boxed{\text{Def}}$ X heißt <u>lokalkompakt</u>, wenn $\forall x \in X$ $\exists$ komp. Obermenge einer Umg. von x.

<u>Bem.</u> 1) X lokalkomp. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ $\exists\, U \in \mathcal{U}(x)$: $\overline{U}$ komp. (Warum?)
falls X Hausdorff

2) X komp. $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ X lokalkomp.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = \mathbb{R}$ – nicht komp., aber $\forall x\ \exists (a,b) \ni x$,

$\boxed{\text{Satz}}$ $\forall$ lokalkomp. Hausdorff-Raum ist regulär.

<u>Beweis</u> z.z.: T_3 (regulär $= T_3 + T_1$)

Sei $x \in X$, $A \subset X$ abg. mit $x \notin A$

Sei $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $K := \overline{U}$ komp.

- K abg. (da X Hausdorff).
- K ist T_3 (sogar T_4, da komp. Hausdorff.)

Betr. $\tilde{U} := U \cap (X \setminus A) \in \mathcal{U}(x)$, $\tilde{U} \subset K$.

Da K regulär, kann man x und $K \setminus \tilde{U}$ durch off. Mengen trennen (in K). Insbes. $\exists V \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$V \subset \overline{V} \subset \tilde{U} \overset{K}{\subset} K \cap (X \setminus A).$$

(warum?)

Dann trennen V und $X \setminus \overline{V}$ x und A. $\left(\begin{matrix} \overline{V} \subset X \setminus A \\ X \setminus \overline{V} \supset A \end{matrix} \right)$ ■