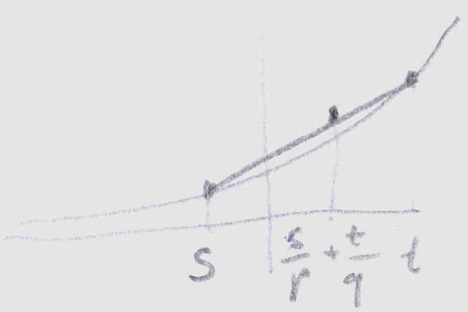
II. 2. ~~Die Räume $L_p(\mu)$~~ Räume p-integrierbarer Funktionen

a) Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski

Satz 1 (Youngsche Ungleichung)
Für $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und für $a, b \geq 0$ gilt stets $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$



$$e^{\frac{s}{p}+\frac{t}{q}} \leq \frac{1}{p}e^s+\frac{1}{q}e^t$$

Setze für $a, b > 0$ $s = p\ln a$, $t = q \ln b$ ein

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

Ist a oder $b = 0$, so gilt die Ungleichung offensichtlich

Wir betrachten nun vollständige Maßraum (X, Σ, μ)
Für $f \in \mathcal{L}_0(\Sigma)$ und $p \in [1,\infty)$ setzen wir

$$N_p(f) = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{(kann } \infty \text{ werden)}$$

$$N_\infty(f) = \operatorname{ess.sup} |f(x)| = \sup\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in M \mid |f(x)| \geq c\}) > 0\}$$

Für $d \geq N_\infty(f)$ ist $|f(x)| \leq d$ f.ü.!

$p, q \in [1,\infty]$ heißen konjugierte Exponenten, wenn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ gilt ($\frac{1}{\infty}=0$ gerechnet)

$N_p(c \cdot f) = |c| \, N_p(f)$ ($0 \cdot \infty = 0$ gerechnet)

$N_p(f) = 0$ gdw $f = 0$ f.ü.

Satz 2 (Hölderscher Ungleichung) Für konjugierte Exponenten p, q und für $f, g \in \mathcal{L}_0(\Sigma)$ gilt stets

$$\mathcal{N}_1(f \cdot g) \leq \mathcal{N}_p(f) \cdot \mathcal{N}_q(g)$$

Im Fall $\mathcal{N}_p(f) = 0$ ist $f = 0$ f.ü. $\leadsto f g = 0$ f.ü., $\mathcal{N}_1(f \cdot g) = 0$. Letzteres gilt auch, falls $\mathcal{N}_q(g) = 0$.

Wir können OEdA $\mathcal{N}_p(f) > 0$, $\mathcal{N}_q(g) > 0$ voraussetzen.

Im Falle $\mathcal{N}_p(f) = \infty$ oder $\mathcal{N}_q(g) = \infty$ stimmt dann die Beh.

OEdA $0 < \mathcal{N}_p(f) < \infty$, $0 < \mathcal{N}_q(g) < \infty$

Wir betrachten den Fall $0 < p, q < \infty$.

$$a = \frac{|f(x)|}{\mathcal{N}_p(f)}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\mathcal{N}_q(f)}$$

$$\frac{1}{\mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g)} \quad |f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p\,\mathcal{N}_p(f)^p} |f(x)|^p + \frac{1}{q\,\mathcal{N}_q(g)^q} |g(x)|^q$$

Integration ergibt

$$\frac{1}{\mathcal{N}_p(f)\,\mathcal{N}_q(g)} \quad \mathcal{N}_1(f \cdot g) \leq \frac{1}{p\,\mathcal{N}_p(f)^p} \mathcal{N}_p(f)^p + \frac{1}{q\,\mathcal{N}_q(g)^q} \mathcal{N}_q(g)^q = 1$$

Im Fall $p = 1$, $q = \infty$ ist $|g(x)| \leq \mathcal{N}_\infty(g)$ f.ü., also $|f(x)\, g(x)| \leq |f(x)|\, \mathcal{N}_\infty(g)$ f.ü.

Integration ergibt die Beh.

Satz 3 (Ungleichung von Minkowski)

Für $f, g \in \mathcal{L}_0(\Sigma)$ und $p \in [1, \infty]$ gilt stets

$$N_p(f+g) \le N_p(f) + N_p(g)$$

Beweis im Fall $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Wir setzen $h = |f| + |g|$. $N_p(f+g) = (\int |f+g|^p d\mu)^{1/p} \le \dots N_p(h)$

OEdA $N_p(f) < \infty$, $N_p(g) < \infty$, $N_p(h) > 0$

$h^p \le (2 \max(|f|, |g|))^p \le 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \le 2^p (|f|^p + |g|^p)$

$\leadsto N_p(h) < \infty$

$$N_p(h)^p = \int (|f(x)| h(x)^{p-1} + |g(x)| h(x)^{p-1}) d\mu \dots$$

$$\le (N_p(f) + N_p(g)) \, N_q(h^{p-1})$$

NR $\left(\int h^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} =$

$pq = p + q$

$\frac{p}{q} = p - 1$

$$= \left(\int h^p d\mu\right)^{1/q} = N_p(h)^{\frac{p}{q}} = N_p(h)^{p-1}$$

$$N_p(h) = N_p(h)^{p-(p-1)} \le N_p(f) + N_p(g)$$

Im Fall $p = \infty$ ist $|f(x)| \le N_\infty(f)$ f.ü., $g(x) \le N_\infty(g)$ f.ü.,

also $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le N_\infty(f) + N_\infty(g)$ f.ü.

Im Fall $p = 1$ ist wieder OEdA $N_1(f) < \infty$, $N_1(g) < \infty$

dann ist $h = |f| + |g|$ integrierbare Majorante für $f + g$

und die Behauptung ist die Integraldreiecksungl.

b) Definition und Eigenschaften der Räume $L_p(\mu)$

Weiter sei (X, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum. $1 \leq p \leq \infty$

$$\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu) = \{ f \in \mathcal{L}_0(\Sigma) \mid N_p(f) < \infty \}$$

Dies ist wegen Betragshomogenität und Minkowski-Ungleichung ein linearer Raum.

I.a. kein normierter Raum, da $N_p(f) = 0$ gdw $f = 0$ f.ü.

Spezialfall: Zählmaß auf $\mathbb{N}$.
Funktionen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sind Folgen $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} = (f(j))_{j=1}^{\infty}$
Diese sind integrierbar mit Integral $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ gdw $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$.

Auf $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p = \{(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \mid \sum |\alpha_j|^p < \infty \}$
(bzw. $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \ell_\infty = \{ (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \mid \sup |\alpha_j| < \infty \}$)
ist $\| \alpha_j \|_p = N_p((\alpha_j)) = \left(\sum |\alpha_j|^p \right)^{1/p}$
(bzw $= \sup_j |\alpha_j|$ für $p = \infty$) ein Norm

~~Minkowski-Un~~ Hölder-Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q \right)^{1/q}$$

$$\left(1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

Im Allgemeinen sieht man Funktionen als gleich an, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden

$f \sim g$ (äquivalent) gdw $f = g$ f.ü.

$\mathcal{N} = \{ f \in \mathcal{L}_0 \mid f = 0 \text{ f.ü.} \}$ lin. UR

$f + \mathcal{N} = \{ f + g \mid g \in \mathcal{N} \} = \tilde{f}$

$g \in \tilde{f}$ gdw $f \sim g$

(Die üblichen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation lassen sich sehr einfach überprüfen.

$L_0(X, \Sigma, \mu) = \{ \tilde{f} \mid f \in \mathcal{L}_0 \}$, $L_p(X, \Sigma, \mu) = \{ \tilde{f} \mid f \in \mathcal{L}_p \}$

Lineare Räume mit Operationen

$$(f + \mathcal{N}) + (g + \mathcal{N}) = \tilde{f} + \tilde{g} \overset{\text{def}}{=} (f + g) + \mathcal{N}$$

$$c \cdot (f + \mathcal{N}) = c \cdot \tilde{f} \overset{\text{def}}{=} cf + \mathcal{N}$$

Auf L_p wird dann durch

$$\| \tilde{f} \| = \| \tilde{f} \|_p = N_p(f)$$

eine Norm gegeben.

In l_p, $L_p(\Omega)$ wird immer diese Norm genommen, solange nichts gegenteiliges vereinbart wird!

$(1 \le p \le \infty)$

Satz 4. Die Räume $L_p(X, \Sigma, \mu)$ sind vollständige normierte Räume.

Beweis im Fall $1 < p < \infty$.
(Fall $p = 1$ folgt aus I. 1, Satz 7, Fall $p = \infty$ ist viel einfacher)

Bestimmen q aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Fakt 1: Jede CF, die eine konvergente Teilfolge hat, konvergiert.

Fakt 2: Konvergiert in einem normierten Raum jede Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$, für die $\|f_j\| \le 4^{-j}$ sind, so ist der Raum vollständig.

Fakt 3 $(1 \le p < \infty)$: Sind Funktionen $f_j, f, g : X \to \mathbb{C}$ mit $f_j \in \mathcal{L}_0$, $g \in \mathcal{L}$, $f_j \to f$ f.ü. und $|f_j|^p \le g$ gegeben, so ist $f \in \mathcal{L}_p$ und

$$\lim_{j \to \infty} N_p(f_j - f) = 0$$

$$N_p(f_j - f)^p = \int_X \underbrace{|f_j - f|^p}_{\xrightarrow{\text{f.ü.}} 0,\ \le 2^p \cdot g} d\mu \longrightarrow 0$$

Seien also $f_j \in \mathcal{L}_p$, $\tilde{f}_j \in L_p$ mit $\|\tilde{f}_j\| = \mathcal{N}_p(f_j) < 4^{-j}$ gegeben.

Dann folgt

$$\int \left(\sum_{j=1}^{k} |f_j|\right)^p d\mu = \int \left(\sum_{j=1}^{k} 2^{-j}\, 2^j |f_j|\right)^p$$

$$\int \left(\sum_{j=1}^{k} 2^{-jq}\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{k} 2^{jp} |f_j|^p\right)^{1/p \cdot p} d\mu$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-jq}\right)^{1/q} \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^j \mathcal{N}_p(f_j)\right)^p \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-jq}\right)^{1/q} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-jp}$$

Nach Beppo Levi konvergiert $\left(\sum_{j=1}^{k} |f_j(x)|\right)^p$ f.ü. gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}$

Dann konvergiert $\sum_{j=1}^{k} f_j(x)$ f.ü. gegen eine Funktion f (Majorante $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|$)

Dabei gilt $\left|\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\right|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|\right)^p \leq g(x)$ f.ü.

Nach Fakt 3 folgt

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{k} \tilde{f}_j\right) - \tilde{f}\right\|_p = \mathcal{N}_p\left(\left(\sum_{j=1}^{k} f_j\right) - f\right) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Daraus folgt mit Fakt 2 die Behauptung

Satz 5 $L_2(\mu) = L_2(X, \Sigma, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

Beweis: $f \bar{g}$ ist messbar, $|f \bar{g}| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$

Deshalb ist $f \bar{g}$ integrierbar. Das Integral ändert sich nicht, wenn man f bzw g durch andere Funktionen derselben Funktionenklasse ersetzt. Deshalb ist $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle$ wohldefiniert und es gilt

$$\|\tilde{f}\| = \|\tilde{f}\|_2 = N_2(f) = \sqrt{\int |f|^2 d\mu} = \sqrt{\int f \bar{f} \, d\mu}$$

$$= \sqrt{\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle} \geq 0$$

Dies ist $= 0$ gdw $f = 0$ f.ü.

$$\overline{\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle} = \overline{\int_X f \bar{g} \, d\mu} = \int g \bar{f} \, d\mu = \langle \tilde{g}, \tilde{f} \rangle$$

$$\langle c\tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \int_X c f \bar{g} \, d\mu = \ldots c \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle$$

$$\langle \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2, \tilde{g} \rangle = \langle \widetilde{f_1 + f_2}, \tilde{g} \rangle = \int (f_1 + f_2) \bar{g} \, d\mu$$

$$= \ldots = \langle \tilde{f}_1, \tilde{g} \rangle + \langle \tilde{f}_2, \tilde{g} \rangle.$$

$\mathbb{F}$

Definition: $f \in L_p(\mu)$ heißt reell, wenn eine reellwertige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g \in f$ existiert.

Kann dabei $g \geq 0$ gewählt werden, so schreibt man $f \geq 0$.

Satz 6: Jedes $f \in L_p(\mu)$ kann als Linearkombination $f = \sum_{k=1}^{4} c_i f_i$ mit $f_i \geq 0$, $f_i \in L_p$ geschrieben werden.

Finde g mit $f = \tilde{g} = g + N$.

$g_1 = (\operatorname{Re} g)_+$, $g_2 = (\operatorname{Re} g)_-$, $g_3 = (\operatorname{Im} g)_+$, $g_4 = (\operatorname{Im} g)_-$

$\rightsquigarrow f = \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 + i\,\tilde{g}_3 - i\,\tilde{g}_4$

Satz 7: Sei $\mathcal{R} \subset \Sigma_{fin} = \{ M \in \Sigma \mid \mu(M) < \infty \}$ ein Ring von Mengen, so dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die von $\mathcal{R}$ und den μ-Nullmengen erzeugte σ-algebra ist Σ.
2. Es existieren $A_j \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X$.

Dann ist für $1 \leq p < \infty$ die lineare Hülle von Äquivalenzklassen von Elementen χ_M mit $M \in \mathcal{R}$ dicht in $L_p(\mu)$.

Beweisidee: Es reicht zu zeigen, dass jedes $f \geq 0$ in $E := \overline{\mathrm{lin}} \{ \tilde{\chi}_M \mid M \in \mathcal{R} \}$ liegt.

Spezialfall:

Ist μ endlich und $X \in \mathcal{R}$, so kann im Fall $p = 1$ Satz 6 mit $\Sigma_0 = \mathcal{R}$ angewandt werden.

Im Fall $1 \leq p < \infty$ findet man für $f \geq 0$, $f \in \mathcal{L}_p$ nach Sätzen 6, 7 ETF f_j mit $f_j \longrightarrow f^p$ f.ü. und mit Majorante $g \in \mathcal{L}$. Dabei kann $f_j \geq 0$ erreicht werden (ersetze notfalls f_j durch $(\mathrm{Re}\, f_j)_+$).

Mit Fakt 3 folgt $\lim_{j \to \infty} N_p(f_j^{1/p} - f) = 0$

Im allgemeinen Fall kann $A_l \subset A_{l+1}$ $(l \in \mathbb{N})$ vorausgesetzt werden.

Ist dann $f \in \mathcal{L}_p$, $f \geq 0$, so sieht man leicht, dass $\lim\limits_{l \to \infty} N_p(\chi_{A_l} \cdot f - f) = 0$ ist. Somit reicht es aus, für jedes feste $A_l = A$ zu zeigen, dass die Äquivalenzklasse von $\chi_A \cdot f$ in E liegt.

Dies lässt sich durch Betrachtung des Maßes $\mu_1 = \chi_A \cdot \mu$ und der von $\mathcal{R}$ und den μ_1-Nullmengen erzeugte Mengenalgebra Σ_0 auf den Spezialfall zurückführen.

Bezeichnungen: $L_p(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n, \Sigma, \lambda)$

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist $L_p(U) = L(U, \Sigma_1, \lambda_1)$, wobei Σ_1, λ_1 durch Einschränkung von Σ, λ auf U entstehen (Vgl. Beispiel 7 in I.1.9.)

Diese Räume sind separabel. Als abzählbaren Ring $\mathcal{R}$ in Satz 7 kann man das System der endlichen Vereinigungen spezieller Würfel, die in U enthalten sind, nehmen.