Seminar OT
WS 18/19

30.10.18

Notiztitel 30.10.2018

Von Neumannscher Mittelergodensatz

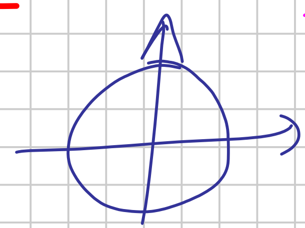
1 Klassischer Mittelergodensatz

Sei X ein BR (Banachraum), $T \in \mathcal{L}(X)$. Die Operatoren

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n, \quad N \in \mathbb{N}$$

heißen Cesàromittel oder Ergodenmittel (ergos = Arbeit, ... = Weg)

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = \mathbb{C}$, $T = \lambda$, $|\lambda| = 1$. Dann hat man



$$\frac{1}{N}\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\lambda^n}_{\frac{\lambda^{N+1}-1}{\lambda-1},\ |\cdot| \le \frac{2}{|\lambda-1|}} \longrightarrow \begin{cases} 1, & \lambda = 1 \\ 0, & \lambda \neq 1. \end{cases}$$

Also: Konvergenz in beiden Fällen $\lambda = 1$ und $\lambda \neq 1$, aber gegen verschiedene Zahlen und aus versch. Gründen.

Bem. Für $(a_n) \subset \mathbb{C}$ oder X heißt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n$$

Cesàrolimes von (a_n), falls $\exists$.

Es gilt: $a_n \to a \quad \underset{\text{i.A.}}{\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \to a$ ü

Bsp $a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, -1, 1$ $\xrightarrow{\text{Cesàro}} 0$, aber $a_n \not\to 0$.

Prop. 1 (Von Neumannsche Zerlegung, 1933)
Sei T eine $\underbrace{\text{Isometrie}}_{\|Tx\| = \|x\| \ \forall x}$ auf einem $\underbrace{HR}_{\text{Hilbertraum}}$ H. Dann gilt:

$$\boxed{H = \underbrace{\mathrm{Fix}\,T}_{\{x : Tx = x\}} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Bild}\,(I-T)}}$$

Beweis

Schritt 1 $\mathrm{Fix}\,T \perp \overline{\mathrm{Bild}\,(I-T)}$

Sei $x \in \mathrm{Fix}\,T$, $y \in H$. Wir haben:

$$\langle x, y - Ty \rangle = \langle x, y \rangle - \langle \underset{\overset{\|}{Tx}}{x}, Ty \rangle$$

$$= \langle x, y\rangle - \underbrace{\langle Tx, Ty\rangle}_{= \langle x, y\rangle \text{ (Isom.)}} = 0$$

<u>Schritt 2</u>: Summe $= H$

Sei $x \perp \operatorname{Bild}(I-T)$. Wir zeigen: $x \in \operatorname{Fix} T$.

Nach Voraus.:

$$0 = \langle x, x - Tx\rangle = \|x\|^2 - \langle x, Tx\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle x, Tx\rangle = \|x\|^2$$

Gleichheit in Cauchy-Schwarz: $Tx = cx$ für ein c

Einsetzen liefert: $\bar{c}\langle x, x\rangle = \|x\|^2$, d.h., $x = 0$ oder $c = 1$ $\blacksquare$

Thm 2 (Von Neumannscher Mittelergodensatz, 1933)

Für eine Isometrie T auf einem HR H gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x \longrightarrow P_{\mathrm{Fix}\,T}\, x \qquad \forall x \in H$$

__Beweis__ Wir benutzen Prop. 1

Sei $x \in \mathrm{Fix}\,T$. Dann ist $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{T^n x}_{=x} = x \to x = P_{\mathrm{Fix}\,T}\, x$

Sei $x = y - Ty \in \mathrm{Bild}(I - T)$. Wir haben

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{T^n x}_{T^n y - T^{n+1} y} = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} (T^n y - T^{n+1} y)}_{Ty - T^{N+1} y \text{ (Teleskopsumme)}}$$

$$= \frac{\underbrace{Ty - T^{N+1}y}_{\|\cdot\| \le 2\|y\|}}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 .$$

D.h., $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x \longrightarrow 0 \quad \forall x \in \operatorname{Bild}(I-T)$

Da $\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n \right\| \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\|T\|^n}_{\le 1} \le 1 \quad \forall N,$

gilt die konv. $\forall x \in \overline{\operatorname{Bild}(I-T)}$.

Linearität + Prop. 1 $\Rightarrow$ Behauptung. $\blacksquare$

<u>Bem.</u> 1) Wenn $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x \;\; \forall x$ konv., heißt T mittelergodisch.

Der starke Limes von $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n$ ist immer eine Projektion, genannt mittelergodische Projektion.

ohne Beweis

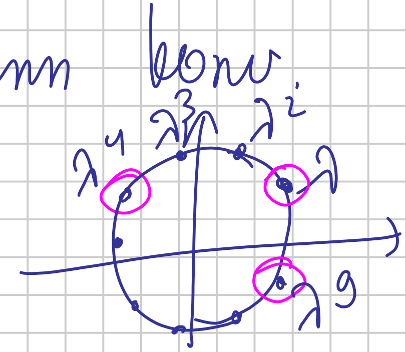
Viel mehr Operatoren sind m-erg., z. B. alle $\underbrace{\text{potenzbeschr.}}_{\sup_n \|T^n\| < \infty}$ Operatoren auf reflexiven Räumen. (ohne Beweis)

2) Motivation: „Ergodenhypothese" von Boltzmann 1890

② Polynomieller Mittelergodensatz

Sei $p \in \mathbb{Z}[\cdot]$ mit $p(\underbrace{\mathbb{N}_0}_{\{0,1,2,\dots\}}) \subset \mathbb{N}_0$. Wann konv.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} \;?$$

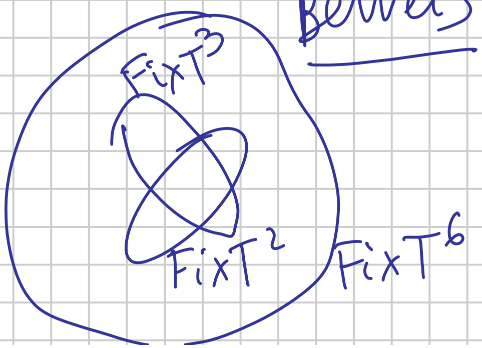


$\boxed{\text{Prop. 3}}$ (**Rationales Spektrum und die zugeh. Zerlegung**, Furstenberg, 1977)

Sei T eine Isometrie auf einem HR H. Dann gilt:

$$\boxed{H = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Fix} T^n} \overset{\perp}{\oplus} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\operatorname{Bild}(I - T^n)}}$$

<u>Beweis</u>



Beobachtung: $n \vdots m \Rightarrow \operatorname{Fix} T^n \subset \operatorname{Fix} T^m$

(da $T^m = T^n \cdot \ldots \cdot T^n$)

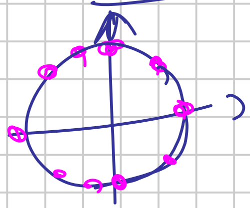
und: $\operatorname{Fix} T \subset \operatorname{Fix} T^{1 \cdot 2} \subset \operatorname{Fix} T^{1 \cdot 2 \cdot 3} \subset \ldots$,

$\bigcup_n \operatorname{Fix} T^n = \bigcup_n \underbrace{\operatorname{Fix} T^{n!}}_{\text{monoton wachsend.}}$

Entsprechend: $\bigcap_n \overline{\text{Bild}(I-T^n)} = \bigcap_n \overline{\underbrace{\text{Bild}(I-T^{n!})}_{\text{monoton fallend}}}$. ■

Der Rest folgt aus Prop. 1.

Bem. Man kann zeigen:



$$\overline{\bigcup_n \text{Fix}\, T^n} = \overline{\text{lin}}\{x : Tx = \lambda x \text{ mit } \lambda \in \mathbb{T} \underbrace{\text{rational}}_{\lambda^d = 1 \text{ für ein } \lambda}\}$$

$\supset$ Sei x mit $Tx = \lambda x$, $\lambda^d = 1$ für ein d.

$$T^d x = \underbrace{\lambda^d}_{1} x = x, \text{ d.h., } x \in \text{Fix}\, T^d$$

$\subset$ ohne.

Dieser T-inv. abg. lin. TR von H heißt Komponente des rationalen Spektrums, H_{rat}.

Es folgt analog:

Thm. 4 (Polynomieller Mittelergodensatz, Furstenberg 1977)

Seien H, T, p wie oben. Dann konv.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} x \quad \forall x \in H.$$

Beweis Schritt 1: Konv. auf H_{rat}.

Sei x mit $T^d x = x$ für ein d.

Beobachtung: $p(n+d) = p(n) \mod d$

$$a_0 + a_1(n+d) + \dots + a_\ell (n+d)^\ell = a_0 + a_1 n + \dots + a_\ell n^\ell + d \cdot \text{etwas}$$

Also ist $T^{p(n)}x$ d-periodisch

$$T^{p(n+d)}x = T^{p(n)} \cdot T^{d\cdot \text{etwas}} x = T^{p(n)} \cdot \underbrace{T^d \cdots T^d x}_{=x}$$

Beobachtung: (a_n) periodisch $\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n$ konv. ü :

$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_d}, \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_d}, \dots$

__Schritt 2__ Konv. gegen 0 auf $\bigcap_n \overline{\text{Bild}(I - T^n)}$:

„van der Corput trick“ $\rightarrow$ ohne Beweis (Induktion nach $\deg P$)

Induktionsanfang: Ang., $\deg P = 1$: $P(n) = an + b$.

$$T^b\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(T^a)^n x\right) \longrightarrow 0$$ nach von Neumann, wenn $x \in \overline{\text{Bild}(I-T^a)}$

Bem. 1) Ter Elst–Müller 2015: Satz gilt für potenzbeschr.n Operatoren auf Hilberträumen.

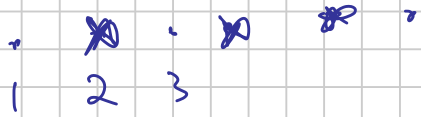
2) Anwendungen in Zahlentheorie: (mit mehr info über den Limes)

$\boxed{\text{Satz}}$ (Furstenberg–Sarközy 1978)

Sei $C \subset \mathbb{N}$ mit

$$\bar{d}(C) := \overline{\lim} \frac{|C \cap \{1,\dots,N\}|}{N} > 0,$$

obere Dichte



Sei $p \in \mathbb{Z}[\cdot]$ mit $p(\mathbb{N}_0) \subset \mathbb{N}_0$ und $p(0)=0$.

Dann $\exists\, a, n$ mit $a,\ a + p(n) \in C$

<u>Bem.</u> Satz falsch ohne $f(0)=0$!

$\boxed{\text{Bsp}}$ $C = 2 \cdot \mathbb{N}$, $p(n) = 2n+1$