

Beweis

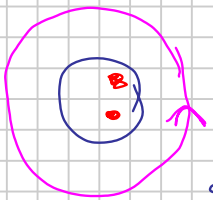
$(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$

Wir zeigen: (f_n) ist gleichm. Cauchy $\Rightarrow$ komp. Meng.
 Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$: $\overline{M_r(z_0)} \subset G$

Da Abomp. Menge in einer endlichen Vereinigung
 solcher Kugeln liegt, reicht es z.z.:

$$\sup_{z \in M_r(z_0)} |f_n(z) - f_m(z)| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{gleichm. Cauchy auf } M_r(z_0)).$$



Seien $z, z' \in U_r(z_0)$. CF:

$$f_n(z) - f_n(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=2r} f_n(w) \left[\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z'} \right] dw$$

$$= \frac{z-z'}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=2r} \frac{f_n(w)}{(w-z)(w-z')} dw$$

$$= \frac{z-z'}{(w-z)(w-z')}$$

Da $\text{dist}(z, \partial U_{2r}(z_0)) > r$ und dasselbe auch für z' , gilt:

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq \frac{|z-z'|}{2r} \cdot \frac{M}{r} = \frac{M}{r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{2r}{r} = \frac{M}{r}$$

Seien $\varepsilon > 0$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{D}$ mit $\bigcup_{j=1}^k U_{\frac{\varepsilon}{3}}(a_j) \supset U_r(z_0)$

Insbesondere gilt: $\forall z \in U_r(z_0) \exists j \in \{1, \dots, k\} : |z - a_j| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{r}{2M}$

Wähle n_0 so, dass $f_{n,m} > n_0$
 $|f_n(a_j) - f_m(a_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$

(Endlich viele a_j + punktw. konv. auf D)

Dann gilt $\forall z \in \mathcal{U}_r(z_0)$ und das entsprechende a_{j_0} mit

$$|z - a_{j_0}| < \frac{\varepsilon}{3}, \frac{r}{2M}$$

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(z) - f_n(a_{j_0})| + |f_n(a_{j_0}) - f_m(a_{j_0})| \\ &\quad + |f_m(a_{j_0}) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \\ &< |z - a_{j_0}| \cdot \frac{2M}{r} < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{r}{2M} \cdot \frac{2M}{r} < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$



[11.5.14] (Satz von Montel)

$\forall$ (gleichm.) beschränkter Folge holom. Fkt'en auf einem Gebiet G

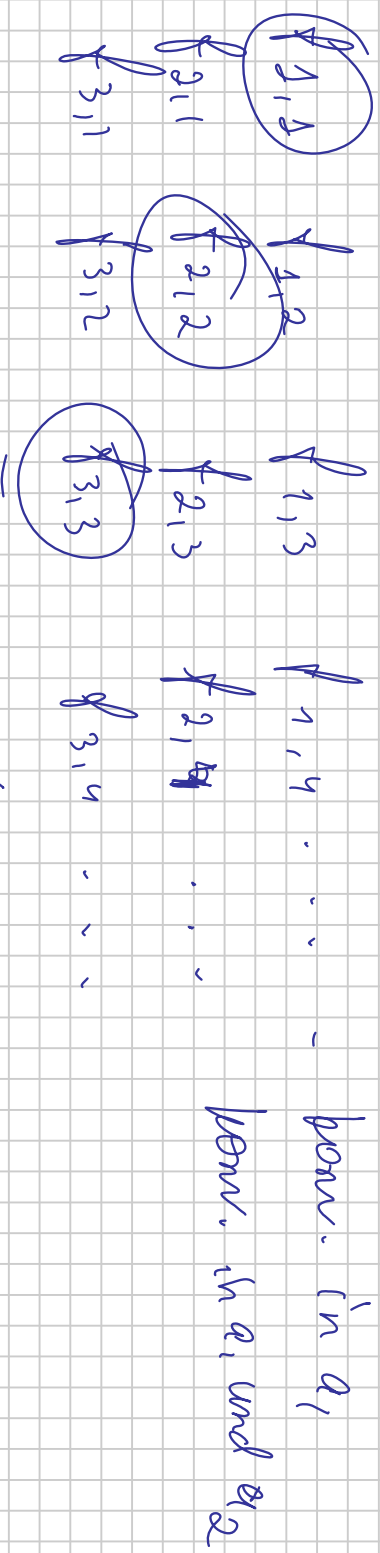
beruht eine kompakte born. Teilfolge.

Beweis Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset G$ dicht $(2.B. G \cap (\mathbb{R} + i\mathbb{D}))$

Bolzano-Weierstraß: $\exists$ Teilfolge $(f_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ von (f_n) s.d.

$(f_{1,n}(a_1))_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ born.
 Dies $\overline{f_1}$ hat eine weitere $\overline{f_2}$ (s.d. in a_2 born.

von.



Diagonalfolge $(f_{n,n})$ born. in $\forall a_j$

Lemma 5.13: $(f_{n,n})$ kompakt in $\mathcal{C}$

Bem. Man kann "f_n beschr." durch "f_n lokal beschr." ersetzen.

$\forall z \exists$ Kugel, wo (f_n) beschr.

6. Die Riemannsche Vermutung



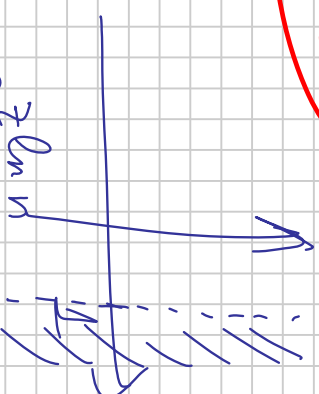
Für σ mit $\Re z > 1$ def.

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

— die Riemannsche Zeta-Fkt.

Bem.

1) ζ komp. absolut, da $\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{e^{\Re z \ln n}} = \frac{1}{n^{\Re z}}$.



2) ζ ist holom. auf $\{z: \operatorname{Re} z > 1\}$, da die Reihe gleichm. auf $\{z: \operatorname{Re} z > 1+\delta\}$ $\forall \delta > 0$ konv. $\left(\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$

Prop. 6.1 (Euler (1748))

Für z mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt $\zeta(z) \neq 0$ und

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)$$

(Hier: $\prod_{p \text{ prim}} \dots = \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{\substack{p \leq R \\ p \text{ prim}}} \dots$)

Beweis Sei $N \in \mathbb{N}$ fest und betrachte

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \text{alle Primfaktoren} \leq N\}.$$

Es gilt:

$$\prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots\right)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^z}\right)^{vk} = 1 + \frac{1}{p_1^z} + \frac{1}{p_2^z} + \frac{1}{p_v^z} + \frac{1}{p_1^2 p_2^z} + \dots$$

endliches Produkt, Reihen absolut summierbar

$$= \sum_{n \in A} \frac{1}{n^z}$$

Damit haben wir:

$$\left| \zeta(z) - \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} \right| = \left| \sum_{n \notin A} \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{n \notin A} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

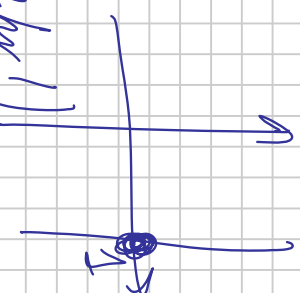
$(n \notin A \Rightarrow) n > N$

$$\Rightarrow \zeta(z) = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

Bem. D.h., Verhalten von $\zeta \leftrightarrow$ Verhalten von Primzahlen
Eigenschaften der Zeta-Fkt

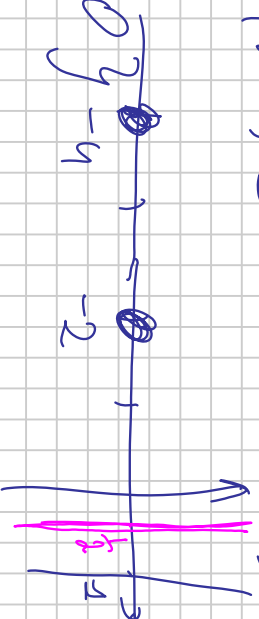
• ζ ist holom. fortsetzbar auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

(wir nehmen die Fortsetzung auch ζ)
Achtung! Die Formel $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ gilt nicht mehr!



• 1 ist ein einfacher Pol von ζ (d.h., ζ ist meromorph) mit Residuum 1.

• Die Nullstellen in $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ sind $-2, -4, -6, \dots$



- ζ hat ∞ -viele Nullstellen auf der „kritischen Geraden“ $\{z: \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\}$ (Hardy 1914)

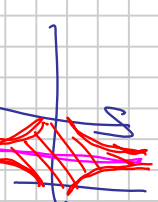
Riemannsche Vermutung (Riemann 1859)

Alle Nullstellen von ζ liegen in

$$\{z: \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\} \cup \{-2, -4, -6, \dots\}.$$

Bem.

1) Riemannsche Vermutung $\Rightarrow$ die Primzahlen sind „regulär“ verteilt.

2) Beweisen, höchstens in , die ersten

10¹³ Nullstellen liegen auf der Geraden / 2004 (Gauß-De Michel)

3) Eins der Nulleniumprobleme.