

Exercises to the course
Functional Analysis II
Sheet 3

*It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there,
which grants the greatest enjoyment.*

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855)

Exercise 1. (*Classification of spectrum*)

Let X be a Banach space and $T \in \mathcal{L}(X)$. Show the following assertions.

- (a) The approximate point spectrum $A\sigma(T)$ is always closed. Does the same hold for the point spectrum?
- (b) $P\sigma(T') = R\sigma(T)$.
- (c) $R\sigma(T') = P\sigma(T'') \supset P\sigma(T)$, where “ $\supset$ ” cannot be replaced by “ $=$ ” in general. (Hint: Consider the left shift on $X = c_0$ and $\lambda = 1$.)
- (d) If X is a Hilbert space, then $P\sigma(T^*) = \overline{R\sigma(T)}$ and $R\sigma(T^*) = \overline{P\sigma(T)}$, where $\overline{A} := \{\bar{\lambda} : \lambda \in A\}$ for $A \subset \mathbb{C}$.

Exercise 2. (*Spectrum of multipliers*)

Determine the approximate point spectrum and the residual spectrum of the following operators.

- (a) $X = l^2$, $T(t_1, t_2, \dots) = (a_1 t_1, a_2 t_2, \dots)$ for some fixed bounded sequence $(a_j)_{j=1}^\infty$. What changes if we replace l^2 by c_0 or l^p ?
- (b) $X = C[0, 1]$, $(Tf)(s) = a(s)f(s)$ for some fixed function $g \in C[0, 1]$. What changes if we replace $C[0, 1]$ by $L^2[0, 1]$ or $L^p[0, 1]$?

Exercise 3. (*Compactness*)

- (a) Are the shift operators on l^p ($p \in [1, \infty]$) and c_0 compact?
- (b) Show that a multiplier with a sequence (a_j) on any of the spaces l^p and c_0 is compact if and only if $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.
- (c) Show that a multiplier on any of the spaces $L^p[0, 1]$ and $C[0, 1]$ is compact if and only if it is zero.

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis II
Blatt 3

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855)

Aufgabe 1. (*Aufteilung des Spektrums*)

Seien X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$.

- (a) Das approximative Punktspektrum $A\sigma(T)$ ist stets abgeschlossen. Gilt dasselbe für das Punktspektrum?
- (b) $P\sigma(T') = R\sigma(T)$.
- (c) $R\sigma(T') = P\sigma(T'') \supset P\sigma(T)$, wobei “ $\supset$ ” im Allgemeinen nicht durch “ $=$ ” ersetzt werden kann. (Hinweis: Betrachten Sie den Linksshift auf $X = c_0$ und $\lambda = 1$.)
- (d) Wenn X ein Hilbertraum ist, so gelten $P\sigma(T^*) = \overline{R\sigma(T)}$ und $R\sigma(T^*) = \overline{P\sigma(T)}$, wobei $\overline{A}$ die Menge $\{\overline{\lambda} : \lambda \in A\}$ für $A \subset \mathbb{C}$ bezeichnet.

Aufgabe 2. (*Spektrum von Multiplikatoren*)

Bestimmen Sie das approximative Punktspektrum und das Residualspektrum von folgenden Operatoren.

- (a) $X = l^2$, $T(t_1, t_2, \dots) = (a_1 t_1, a_2 t_2, \dots)$ für eine gegebene beschränkte Folge $(a_j)_{j=1}^\infty$. Was ändert sich, wenn man l^2 durch c_0 oder l^p für $1 \leq p < \infty$ ersetzt?
- (b) $X = C[0, 1]$, $(Tf)(s) = a(s)f(s)$ für eine gegebene Funktion $g \in C[0, 1]$. Was ändert sich, wenn man $C[0, 1]$ durch $L^2[0, 1]$ oder $L^p[0, 1]$ ersetzt?

Aufgabe 3. (*Kompaktheit*)

- (a) Sind die Shifts auf l^p ($p \in [1, \infty]$) und c_0 kompakt?
- (b) Ein Multiplikator auf jedem der Räume l^p und c_0 ist genau dann kompakt, wenn $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.
- (c) Ein Multiplikator M_a auf jedem der Räume $L^p[0, 1]$ und $C[0, 1]$ ist genau dann kompakt, wenn $a = 0$.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, dem 4. 11. 2026 besprochen.