

Exercises to the course
Functional Analysis II
Sheet 2

*Nobody learns to think by reading the thoughts of others,
but by thinking for themselves.*
M. EMINESCU (1850–1889)

Exercise 1. (*Spectral radius and behaviour of powers*)

Let X be a complex Banach space.

- (a) Show that for $T \in \mathcal{L}(X)$

$$r(T) < 1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0 \iff \|T^n\| < 1 \text{ for some } n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Let $T, S \in \mathcal{L}(X)$. Prove that $r(TS) \leq r(T)r(S)$ holds as soon as T and S commute. Show that the assumption of commuting cannot be dropped. (Hint: Try $X = \mathbb{C}^2$.)

Exercise 2. (*Two-sided shift and its spectrum*)

Let T be the two-sided shift on $l^2(\mathbb{Z})$, d.h.,

$$T(\dots, t_1, t_0, t_1, \dots) = (\dots, t_2, t_1, t_0, \dots).$$

Let further $\mathbb{T}$ be the unit circle in $\mathbb{C}$ and denote by M the multiplier on $L^2(\mathbb{T})$ defined by $(Mf)(z) := zf(z)$.

- 1) Determine the point spectrum of T .
- 2) Show that T und M are similar.
- 3) Compute $\sigma(M)$ and determine $\sigma(T)$ (cf. Exercise 2, Sheet 1).
- 4) How does the spectrum and the point spectrum change if we replace the two-sided right shift by the two-sided left shift S on l^2 defined by

$$S(\dots, t_1, t_0, t_1, \dots) = (\dots, t_0, t_1, t_2, \dots)?$$

Exercise 3. (*Adjoint operators*)

- (a) Compute the (Hilbert space) adjoints of operators from Example 2.5 0) and 3) from the lectures. What is the adjoint of the Volterra operator on $L^2[0, 1]$?
- (b) Determine T^* and S^* for the two-sided shifts T and S from Exercise 2. Are T , S and M normal/s.a./unitary?
- (c) Prove Prop. 2.6 (b), (c) and (f) from the lectures.

The solutions will be discussed in the exercise class on Wednesday 28. 10. 2026.

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis II
Blatt 2

*Kein Mensch lernt denken, indem er die fertig geschriebenen Gedanken anderer liest,
sondern dadurch, dass er selbst denkt.*
M. EMINESCU (1850–1889)

Aufgabe 1. (*Spektralradius und Verhalten von Potenzen*)

Sei X ein komplexer Banachraum.

- (a) Für $T \in \mathcal{L}(X)$ beweisen Sie die Äquivalenzen

$$r(T) < 1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0 \iff \|T^n\| < 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Seien $T, S \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie, dass $r(TS) \leq r(T)r(S)$ gilt, sobald T und S kommutieren. Zeigen Sie weiterhin, dass die Ungleichung im Allgemeinen falsch ist, wenn T und S nicht kommutieren. (Hinweis: Probieren Sie $X = \mathbb{C}^2$.)

Aufgabe 2. (*Zweiseitiger Shift und sein Spektrum*)

Sei T der zweiseitige Rechtsshift auf $l^2(\mathbb{Z})$, d.h.,

$$T(\dots, t_1, t_0, t_1, \dots) = (\dots, t_2, t_1, t_0, \dots).$$

Sei weiterhin $\mathbb{T}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$ und bezeichne mit M den Multiplikator auf $L^2(\mathbb{T})$ definiert durch $(Mf)(z) := zf(z)$.

- 1) Bestimmen Sie das Punktspektrum von T .
- 2) Zeigen Sie, dass T und M ähnlich sind.
- 3) Berechnen Sie $\sigma(M)$ und bestimmen Sie $\sigma(T)$ (vgl. Aufgabe 2, Blatt 1).
- 4) Wie ändert sich das Spektrum und das Punktspektrum, wenn wir statt des Rechtsshifts den zweiseitigen Linksshift S auf l^2 nehmen, d.h.,

$$S(\dots, t_1, t_0, t_1, \dots) = (\dots, t_0, t_1, t_2, \dots)?$$

Aufgabe 3. (*Adjungierte Operatoren*)

- (a) Berechnen Sie die (Hilbertraum-)Adjungierten von Operatoren aus Beispiel 2.5 0) und 3) aus der Vorlesung. Bestimmen Sie V^* für den Volterra-Operator V auf $L^2[0, 1]$.
- (b) Bestimmen Sie T^* und S^* für die zweiseitigen Shiftoperatoren aus Aufgabe 2. Sind T , S und M normal/s.a./unitär?
- (c) Beweisen Sie Prop. 2.6 (b), (c) und (f) aus der Vorlesung.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, dem 28. 10. 2026 besprochen.