

Exercises to the course
Functional Analysis II
Sheet 1

Teachers open the door, but you must enter by yourself.
CHINESE PROVERB

Exercise 1. (*Spectrum and resolvent: multipliers on sequence spaces*)

Let $X = l^2$ and let $T \in \mathcal{L}(X)$ be a multiplier, i.e., of the form

$$T(t_1, t_2, \dots) = (a_1 t_1, a_2 t_2, \dots), \quad (t_j) \in l^2$$

for a fixed sequence $(a_j) \in l^\infty$. Determine the point spectrum, the spectrum and the resolvent of T . What changes if we consider the spaces $X = c_0$ or $X = l^p$, $p \in [1, \infty]$?

Exercise 2. (*Spectrum and resolvent: Volterra operator and similar operators*)

(a) Let $X = C[0, 1]$ and consider the Volterra operator $T \in L(X)$ defined by

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad f \in X, \quad t \in [0, 1].$$

Compute the norm of T and show that the point spectrum of T is empty. Is T invertible? (Use here the definition of invertibility only.)

(b) Let X_1 and X_2 be Banach spaces. Operators $T_1 \in L(X_1)$ and $T_2 \in L(X_2)$ are called *similar* if $T_1 = S^{-1}T_2S$ holds for an invertible operator $S \in L(X_1, X_2)$. Show that similar operators have the same spectrum and point spectrum and satisfy

$$\dim \ker(\lambda - T) = \dim \ker(\lambda - S) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

What can you say about the resolvents?

Exercise 3. (*Left shift with infinite dimensional eigenspaces*)

Modify Example 1.6 2) from the lectures to construct an operator T on a separable Banach or Hilbert space with the following properties:

- $P_\sigma(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$,
- $\dim \ker(\lambda - T) = \infty$ für jedes λ mit $|\lambda| < 1$.

(Hint: Consider $\mathbb{N}^2$ instead of $\mathbb{N}$.)

The solutions will be discussed in the exercise class on Wednesday 21. 10. 2026.

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis II
Blatt 1

Lehrer öffnen die Tür, hineingehen muss man aber selbst.
CHINESISCHES SPRICHWORT

Aufgabe 1. (*Spektrum und Resolvente: Multiplikatoren auf Folgenräumen*)
Seien $X = l^2$ und $T \in L(X)$ ein Multiplikator, d.h.,

$$T(t_1, t_2, \dots) = (a_1 t_1, a_2 t_2, \dots), \quad (t_j) \in l^2$$

für eine feste Folge $(a_j) \in l^\infty$. Bestimmen Sie das Punktspektrum, das Spektrum und die Resolvente von T . Was ändert sich, wenn man den Raum $X = c_0$ oder $X = l^p$, $p \in [1, \infty]$ betrachtet?

Aufgabe 2. (*Spektrum und Resolvente: Volterra-Operator und ähnliche Operatoren*)

(a) Seien $X = C[0, 1]$ und $T \in L(X)$ der *Volterra-Operator* gegeben durch

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Berechnen Sie die Norm von T und zeigen Sie, dass das Punktspektrum von T leer ist. Ist T invertierbar? (Benutzen Sie hier ausschließlich die Definition der Invertierbarkeit.)

(b) Seien X_1 und X_2 zwei Banachräume. Operatoren $T_1 \in L(X_1)$ und $T_2 \in L(X_2)$ heißen *ähnlich*, wenn $T_1 = S^{-1}T_2S$ für einen invertierbaren Operator $S \in L(X_1, X_2)$ gilt. Zeigen Sie, dass ähnliche Operatoren gleiches Spektrum und Punktspektrum haben sowie

$$\dim \ker(\lambda - T) = \dim \ker(\lambda - S) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

erfüllen. Was kann man über die Resolventen sagen?

Aufgabe 3. (*Linksshift mit unendlichdimensionalen Eigenräumen*)

Modifizieren Sie Beispiel 1.6 2) aus der Vorlesung, um einen Operators T auf einem Banachraum oder einem Hilbertraum mit folgenden Eigenschaften zu konstruieren:

- $P_\sigma(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$,
- $\dim \ker(\lambda - T) = \infty$ für jedes λ mit $|\lambda| < 1$.

(Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{N}^2$ statt $\mathbb{N}$.)

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, dem 21. 10. 2026 besprochen.