Beweis der zweifachen Konvergenz

ZZ: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f \cdot T^{2n} g$ konv. in L^2 $\forall f, g$.

Zerlege $f = f_{kr} + f_{wmix}$

$g = g_{kr} + g_{wmix}$.

Nach Prop. 5.4 können wir OBdA $f = f_{kr}$, $g = g_{kr}$ annehmen.

OBdA (Linearität + Dichtheitsargument / Appr.):

$Tf = \lambda f, \quad Tg = \mu g$

Dann gilt aber:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{T^n f}_{\lambda^n f} \cdot \underbrace{T^{2n} g}_{\mu^{2n} g} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (\lambda \cdot \mu^2)^n f \cdot g$$

Bem. Insbesondere haben wir

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f \cdot T^{2n} g = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f_{kr} \cdot T^{2n} g_{kr}$$

gezeigt. Man sagt: der Kroneckerteil ist charakteristisch für zweifache Konvergenz.

5.3 Der Kroneckerfaktor und zweifache Rekurrenz

Es bleibt z.z.: Roth (Szemerédi für 3-AP), d.h.,

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int f \cdot T^n f \cdot T^{2n} f > 0 \quad \text{für } f > 0,\ f \text{ beschr.}$$

Dafür reicht es z.z.:

- $\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int f \cdot T^n f \cdot T^{2n} f > 0$ für $f > 0$, f beschr.; $f \in H_{kr}$

- $f > 0$, f beschr. $\Rightarrow$ $f_{kr} > 0$, f_{kr} beschr.

<u>Beobachtung</u>: Sei $Tf = \lambda f$. Dann

$$\mathrm{Orb}(f) := \{T^n f,\ n \geq 0\} = \{\lambda^n,\ n \geq 0\} \cdot f \subset \mathbb{T} \cdot f$$

insb. ist $\mathrm{Orb}\, f$ rel. komp in $L^2(X, \mu)$

Abschluss kompakt

$\boxed{\text{Def}}$ f heißt fast periodisch bzgl. T, wenn $\overline{\mathrm{Orb}\, f} \subset L^2$ kompakt.

Schreibe: $f \in AP(X)$

$\boxed{\text{Prop. 5.6}}$ 1) f ist fast periodisch $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge

$M_\varepsilon := \{ n : \|T^n f - f\|_2 < \varepsilon \} \subset \mathbb{N}$

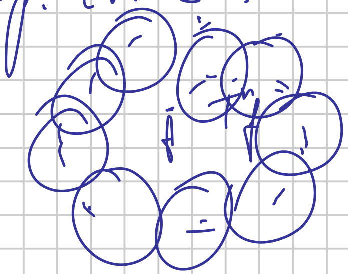
syndetisch, d.h., hat beschränkte Lücken:

$\exists L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad M_\varepsilon \cap [n, n+L] \neq \emptyset \quad \forall n.$

2) $AP(X) = \{ f \text{ fast per.} \}$ ist T-inv., abg. lin. Teilraum von $L^2(X)$.

Beweis 1) $\Rightarrow$ Ang., $\{T^n f, n \geq 0\}$ ist rel. komp. in L^2.

Sei $\varepsilon > 0$ und überdecke den Orbit mit ε-Bällen



Kompaktheit: $\exists k \; \exists n_1, \dots, n_k : \forall n$

wenn $n \geq n_j$

$\|T^{n-n_j} f - f\| \stackrel{\le}{=} \|T^n f - T^{n_j} f\| < \varepsilon$ für ein $j = j(n)$.

insbesondere gilt $\forall n \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$:

$$n - n_1 \in M_\varepsilon \text{ oder } n - n_2 \in M_\varepsilon \text{ oder } \dots \, n - n_k \in M_\varepsilon$$

Die Lücken sind also $\leq \max\{n_1, \dots, n_k\}$, also ist M_ε syndetisch.

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: $\exists L : \bigcup_{n=0}^{L} U_\varepsilon(T^n f) \supset \mathrm{Orb} f$.

(d.h., $f, T^n f, \dots, T^L f$ ist ein $\underbrace{\varepsilon\text{-Netz}}_{\forall g \in \mathrm{Orb} f \ \exists j \in \{0, \dots, L\} : \|g - T^j f\| < \varepsilon}$ für $\mathrm{Orb} f$)

Sei L die größte Lücke in M_ε

Dann gilt $\forall n > L$:

$$n \in M_\varepsilon \text{ oder } n-1 \in M_\varepsilon \text{ oder } \dots \, n - L \in M_\varepsilon,$$

d.h., $\|T^n f - f\| < \varepsilon$ oder $\underbrace{\|T^{n-1} f - f\|}_{\|T^n f - Tf\|} < \varepsilon$ oder $\dots$ $\underbrace{\|T^{n-L} f - f\|}_{\|T^n f - T^L f\|} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Ob $f \subset \bigcup_{j=0}^{L} U_\varepsilon(T^j f)$.

2) zz: $AP(X)$ ist lin., T-inv., abg. in $L^2(X,\mu)$

- T-inv. folgt aus 1), da $\|T^n \cdot Tf - Tf\| = \|T^n f - f\|$, d.h., $U_\varepsilon(Tf) = U_\varepsilon(f)$
  (oder direkt nach Definition)
- lin. TR: Ü
- abg.: Ang., $f_j \to f$, $f_j \in AP(X)$. zz.: $f \in AP(X)$.
  Sei $\varepsilon > 0$. $\exists j$: $\|f - f_j\| < \varepsilon/3$

Wir haben:

$$\|T^n f - f\| \le \underbrace{\|T^n f - T^n f_j\|}_{= \|f - f_j\| < \varepsilon/3} + \|T^n f_j - f_j\| + \underbrace{\|f_j - f\|}_{< \varepsilon/3}$$

$$< \|T^n f_j - f_j\| + 2\varepsilon/3$$

Wenn also $n \in M_{\varepsilon/3}(f_j)$, so $n \in M_\varepsilon(f)$, d.h.,

$$\underbrace{M_{\varepsilon/3}(f_j)}_{\text{hat beschr. Lücken}} \subset M_\varepsilon(f)$$ ∎

$1) \Rightarrow f \in AP(X)$.

$\boxed{\text{Korollar 5.7}}$ f fast periodisch $\Leftrightarrow f \in H_{kr}$

<u>Beweis</u> $\Leftarrow$ für f Eigenfkt: $T^n f = \lambda^n f$,

$\mathrm{Orb}\, f = \underbrace{\{\lambda^n, n \geq 0\}}_{\text{endlich oder } \mathbb{T}} \cdot f$, also $f \in AP(X)$

$AP(X)$ lin., abg. $\Rightarrow H_{kr} \subset AP(X)$.

$\Rightarrow$ Es reicht z.z.: $AP(X) \cap \underbrace{H_{kr}^{\perp}}_{H_{wmix}} = \{0\}$

(da $H_{kr} \subset AP(X)$)

Ang., $\exists f \neq 0$ schwach mischend mit $f \in AP(X)$.

OBdA $\|f\| = 1$.

Sei $\varepsilon \in (0,1)$. $\exists L$: $M_\varepsilon = \{n : \|T^n f - f\| < \varepsilon\}$ schneidet $\forall$ Intervall der Länge L.

Für $n \in M_\varepsilon$ gilt

$$\langle T^n f, f\rangle = \underbrace{\langle f, f\rangle}_{=\|f\|^2 = 1} + \underbrace{\langle T^n f - f, f\rangle}_{|\cdot| \leq \underbrace{\|T^n f - f\|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\|f\|}_{=1} < \varepsilon}$$

und damit

$$|\langle T^n f, f\rangle| \geq 1 - \varepsilon.$$

Wir haben also: $\forall N$

$$\frac{1}{LN} \sum_{n=1}^{LN} |\langle T^n f, f\rangle| = \frac{1}{LN}\left(\sum_{n=1}^{L} + \sum_{L+1}^{2L} + \ldots + \sum_{L(N-1)+1}^{LN}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\cancel{L}\cancel{N}} \cdot \cancel{N} \cdot (1-\varepsilon) \not\longrightarrow 0 \quad \lightning \text{ (}f\text{ ist nicht schw. mischend)}$$

Prop (Multiple Rekurrenz für fast periodische Fkt'en)

Sei $f \geq 0$, beschr. und fast periodisch. Dann gilt

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int f \cdot T^{n} f \cdot T^{2n} f \cdots T^{kn} f \, d\mu > 0$$

$\forall k$.

Beweis Wir zeigen das für $k=2$, Rest analog.

OBdA sei $\|f\|_\infty < 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Die Menge von n:

$$\|T^n f - f\| < \varepsilon$$

hat Lücken $\leq L$. ($\exists L$).

Für solche n haben wir

$$\|T^{2n} f - f\| \leq \underbrace{\|T^{2n} f - T^n f\|}_{= \|T^n f - f\|} + \|T^n f - f\| \leq 2 \cdot \|T^n f - f\| < 2\varepsilon$$

und damit

$$\left|\int f\cdot T^n f\cdot T^{2n} f - \int f^3\right| \leq \left|\int f\cdot(T^n f - f)\cdot T^{2n} f\right| +$$

$$+ \left|\int f^2\cdot(T^{2n} f - f)\right| \leq \|f\|_\infty^2 \cdot \|T^n f - f\|_2 +$$

Cauchy-Schwarz

$$+ \|f\|_\infty^2 \cdot \|T^{2n} f - f\|_2 < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Da $f>0$, ist $d := \int f^3 > 0$. Wähle $\varepsilon < \frac{d}{6}$, dann:

$$\int f\cdot T^n f\cdot T^{2n} f > d - 3\varepsilon > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Berechne:

$$\frac{1}{NL}\sum_{n=1}^{NL}\int f\cdot T^n f\cdot T^{2n} f = \frac{1}{NL}\left(\sum_{1}^{L} + \dots + \sum_{(N-1)L+1}^{NL}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\cancel{N}L}\cdot\cancel{N}\cdot\frac{d}{2} = \frac{d}{2L} > 0 \quad \forall N$$

Ü: Zeige: $\underline{\lim} > 0$ (ein beliebiges N liegt im Intervall der Form $[mL, (m+1)L[$).

Bemerkung 1) Man kann zeigen: Es sind äquiv.:

(i) $L^2(X,\mu) = H_{kr}$

(ii) (X,μ,T) ist isomorph zu einer Rotation auf einer komp. Abelschen metrisierbaren Gruppe

Solche Systeme heißen kompakt

2) Wir haben gezeigt:

$$L^2(X,\mu) = \{\text{fast per. Fkt'en}\} \overset{\perp}{\oplus} \{\text{schw. mischende Fkt'en}\}.$$

D.h., wenn (X,μ,T) nicht schw. mischend ist,

$\exists$ fast periodische Fkt $\neq$ konst, oder: $\exists$ kompaktes Teilsystem.

$\boxed{\text{Bem.}}$ Es bleibt noch zz., dass

$$\begin{cases} f > 0 \\ f \text{ beschr.} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_{kr} > 0 \\ f_{kr} \text{ beschr.} \end{cases}$$

Das folgt aus:

$$f_{kr} = \mathbb{E}(f \mid \Sigma')$$

Σ': σ-Algebra, die von Eigenfkt'en erzeugt ist

Hier ohne Beweis

(Interesse $\rightsquigarrow$ Kapitel 5,6 in Einsiedler-Ward).

Das zeigt sofort: $\begin{cases} f \geq 0 \\ f \text{ beschr.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{kr} \geq 0 \\ f_{kr} \text{ beschr.} \end{cases}$

$f_{kr} > 0$ für $f > 0$ folgt dann aus $\underbrace{\int f_{kr} = \int f}_{\int (f_{kr} - f) = 0}$, da $f_{kr} - f \perp H_{kr}$

6. Szemerédi für $k \geq 3$

Problem: Die Zerlegung $L^2 = H_{kr} \oplus H_{wmix}$ reicht nicht für $k \geq 3$.

Grund: $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f \cdot T^{2n} g \cdot T^{3n} h \not\to 0$ ist möglich für z.B. $h \in H_{wmix}$,

d.h., der Kroneckerteil ist nicht mehr charakteristisch.

$\boxed{\text{Bsp 6.1}}$ (Verallgemeinerte Eigenfkt'en)

$\boxed{\text{Def}}$ Sei (X, μ, T) ergodisch.

- f heißt eine verallgemeinerte EF (Eigenfkt) von T der Ordnung 2 wenn $Tf = g \cdot f$ für g mit $Tg = \lambda g$ für ein $\lambda \in \mathbb{T}$ und $|f| = \mathbb{1}$.

- Genauer: Verallg. Eigenfkt der Ordnung k, wenn $|f| = \mathbb{1}$ und $Tf = g f$, g verallg. EF der Ordnung $k-1$.

Beobachtung:

Sei f eine verallg. EF von T der Ordnung 2:

$Tf = g \cdot f$, $Tg = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{T}$, $|g| = \mathbb{1}$, $|f| = \mathbb{1}$.

Es gilt: $T^2 f = T(g \cdot f) = \underbrace{Tg}_{\lambda \cdot g} \cdot \underbrace{Tf}_{g \cdot f} = \lambda \cdot g^2 \cdot f$

$T^3 f = T(\lambda g^2 f) = \lambda \cdot (\lambda \cdot g)^2 \cdot g \cdot f = \lambda^{1+2} \cdot g^3 \cdot f$

$\dots$ (induktion)

$\boxed{T^n f =} \lambda^{1+\dots+(n-1)} \cdot g^n \cdot f = \boxed{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot g^n \cdot f}$

Wir zeigen: 1) $\langle T^n f, f \rangle = 0$ falls $\int g^n = 0$. (d.h. $f \in H_{wmix}$, sobald $\int g^n = 0 \ \forall n$)

2) $T^n(f^3) \cdot T^{2n}\left(\frac{1}{f^3}\right) \cdot T^{3n} f = f \overset{\text{Cesàro}}{\not\to} 0$

Beweis

1) $\langle T^n f, f\rangle = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\langle g^n f, f\rangle}_{= \int g^n \cdot \underbrace{f \cdot \overline{f}}_{1}} = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \int g^n$

2) $T^n(f^3) \cdot T^{2n}\left(\frac{1}{f^3}\right) \cdot T^{3n} f \overset{\text{multipl. von } T}{=} (T^n f)^3 \cdot \frac{1}{(T^{2n} f)^3} \cdot T^{3n} f$

$\cancel{3n^2} - \cancel{3n} - \frac{\cancel{12n^2} + \cancel{6n} + \cancel{9n^2} - \cancel{3n}}{2}$

$= \lambda^{\frac{3n(n-1)}{2} - \frac{6n(2n-1)}{2} + \frac{3n(3n-1)}{2}} \cdot g^{\cancel{3n} - \cancel{6n} + \cancel{3n}} \quad f^{\cancel{3} - \cancel{3} + 1}$ ∎

$= f \quad \forall n$

Ein konkretes Bsp.:

$X = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2, \quad T(x,y) := (x+\alpha, x+y)$ – Schiefprodukt

Betrachte $f(x,y) := e^{2\pi i y}$

$(Tf)(x,y) = f(x+\alpha, x+y) = e^{2\pi i (x+y)} = \underbrace{e^{2\pi i x}}_{=: g(x,y)} \cdot \underbrace{e^{2\pi i y}}_{f(x,y)}$

$$(Tg)(x,y) = g(x+\alpha, x+y) = e^{2\pi i (x+\alpha)} = \underbrace{e^{2\pi i \alpha}}_{\lambda} \cdot \underbrace{e^{2\pi i x}}_{g(x,y)}$$

Also ist f eine verallg. EF der Ordnung 2, die zu g und λ gehört.

(Analog konstruiert man EF höherer Ordnung:

$$(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k, \quad T(x_1, \dots, x_k) := (x_1+\alpha, x_1+x_2, x_2+x_3, \dots) \; : Ü)$$

Außerdem haben wir:

$$\int g^n = \int e^{2\pi i n x} = 0 \quad \forall n \neq 0.$$

<u>Bemerkung</u> Auch der „verallgemeinerte Kroneckerfaktor"

$$\overline{\text{Lin}} \{ f \text{ verallg. EF von } T \text{ belieb. Ordnung} \}$$ – Abramovfaktor

ist nicht charakteristisch für $k \geq 3$:

$\boxed{\text{Bsp}}$ (<u>Furstenberg 1990</u>) Das Heisenbergsystem

$X = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ & 1 & \mathbb{R} \\ & & 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ & 1 & \mathbb{Z} \\ & & 1 \end{pmatrix}$, T Rotation mit $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ & 1 & \beta \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma \neq 0$

erfüllt:

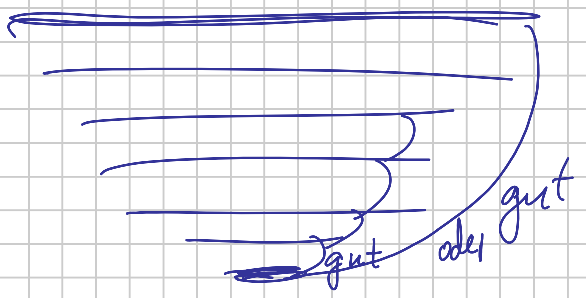
- $\nexists$ nichttriv. verallg. EF der Ordnung ≥ 2 (d.h. Kronecker = Abramov)
- $\exists f$ schwach mischend mit $T^n f_1 \cdot T^{2n} f_2 \cdot T^{3n} f \overset{\text{Cesàro}}{\not\to} 0$.

(ohne Beweis)

Der richtige charakt. Faktor ist also noch größer – gefunden von Host-Kra in 2006.

Idee von Furstenberg: Untersuche MR (= multiple Rekurrenz jeder Ordnung) für immer größere Systeme:

- Beginne mit einem Teilsystem mit MR (z.B. mit Kr)



- Beweise MR für "gute" Erweiterungen: relativ kompakte und schwach mischende Erweiterungen
- Bilde einen Turm von Erweiterungen und zeige: lim = alles

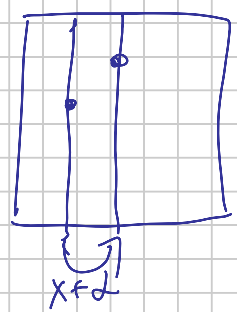
  Das zeigt man mit der Dichotomie:

  X ist eine schw. misch. Erw. des guten Faktor oder $\exists$ nichttriv. Zwischensystem mit MR (komp. Erweiterung).

Zuerst: Was ist ein Teilsystem/Faktor?

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Schiefprodukt) $X = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, $\alpha \in \mathbb{I}$ irrat.

$T(x,y) := (x+\alpha,\ x+y)$



Die Faser über x $(\{x\}\times\mathbb{T})$ $\overset{T}{\mapsto}$ Faser über $R_\alpha x := x+\alpha$

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \square \arrow[d, "\pi_1"] \\ — \arrow[r, "R_\alpha"'] & — \end{tikzcd}$$

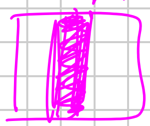
bei π_1 die Proj. auf x

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, R_\alpha)$ ist ein Faktor von $((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2, T)$

und $((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2, T)$ ist eine Erweiterung von $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, R_\alpha)$

<u>Andere Sichtweise</u>: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, R_\alpha) \sim ((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2, \Sigma', T)$,

Σ-Alg. von Zylindermengen



d.h., Fasern können mit Punkten in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ identif. werden.

$\boxed{\text{Satz}}$ (<u>Rohlin</u>) $\forall (X, \mu_X, T)$ $\forall$ Faktor (Y, μ_Y, S) kann $X = Y \times Z$, $T(y,z) = (Sy, *)$

etwas

(Ohne Beweis)

Im Allg. sind die folg. Aussagen äquiv.:

i) (Y, ν, S) ist ein Faktor von (X, μ, T), d.h.,
$\exists \pi : X \to Y$ μ-fast surj. : $\pi_* \mu = \nu$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "S"] & Y \end{tikzcd}$$

ii) (Y, ν, S) ist isomorph zu
(X, Σ', μ, T) für eine Unter-σ-Alg. Σ' von Σ (T-inv.)

iii) $L^\infty(Y, \nu)$ ist isomorph zu einer
(lin.) Unteralgebra $\mathfrak{A}$ von $L^\infty(X, \mu)$
(Beim Schiefprodukt: Fkt'en, die konstant auf Fasern sind)

In diesem Fall ist Σ' = kleinste T-inv. Unter-σ-Algebra von Σ s.d. $\forall f \in \mathfrak{A}$ Σ'-meßbar ist.

(ohne Beweis)

<u>Bem.</u> Nach Rohlin kann man Σ' mit einer Familie von

Zylindermengen und X mit $Y \times Z$ für ein Z identifizieren.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Sei (X, Σ, μ, T) ein MDS (i.A. nicht ergodisch).

Betrachte

$$\mathcal{A} := \operatorname{Fix} T \cap L^\infty(X, \mu)$$

Klar: $\mathcal{A}$ ist eine Algebra. $(f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{A})$

Die zugehörige σ-Algebra Σ' ist

$$\Sigma' = \{A \subset X \text{ } T\text{-inv., d.h., } T^{-1}A = A \text{ bis auf Nullm.}\}$$

(Ü ?)

2) Für (X, μ, T) betr.

$$\mathcal{A} := \overline{\operatorname{lin}}\{\text{EF von } T\} \cap L^\infty(X, \mu)$$

Ü: $\mathcal{A}$ ist eine Algebra

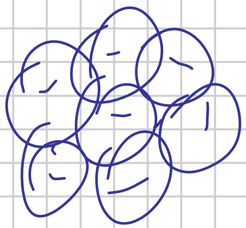
Also ist der Kroneckerfaktor tatsächlich ein Faktor.

3) Auch $\mathcal{A} := \overline{\mathrm{Lin}}\,\{\text{verallg. EF von } T\} \cap L^\infty(X,\mu)$
ist eine Algebra ü
Also kommt $\mathcal{A}$ von einem Faktor / Untersystem.

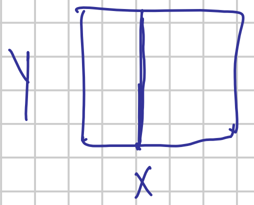
6.1. Kompakte Erweiterungen und multiple Rekurrenz

Erinnere: f heißt fast periodisch, wenn $\{T^n f, n \geq 0\}$ rel. komp. ist, d.h., $\forall \varepsilon > 0 \; \exists l \; \exists g_1, \dots, g_l : \forall n$

$$\|T^n f - g_j\| < \varepsilon \quad \text{für ein } j = j(n)$$



Sei $(\tilde{X}, \tilde{T})$ eine Erweiterung von (X, T), d.h.,
$\tilde{X} = X \times Y$ für ein Y



$$\tilde{T}(x,y) = (TX, *) \quad \text{etwas}$$

$\boxed{\text{Def}}$ $f \in L^2(\tilde{X})$ heißt <u>fast periodisch relativ zu X</u>, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \ell \; \exists g_1, \dots, g_\ell \in L^2(\tilde{X})$:

$\forall n \quad \forall (f.a.)\, x$

$$\| \tilde{T}^n f(x, \cdot) - g_j(x, \cdot) \|_{L^2 (x\text{-Faser})} < \varepsilon$$

für ein $j = (n, x)$.

Notation: $f \in AP(\tilde{X} | X)$

<u>Bemerkung</u> $AP(\tilde{X} | X)$ ist ein lin. TR von $L^2(\tilde{X}, \mu)$

und $AP(\tilde{X} | X) \cap L^\infty$ ist eine Algebra, im Allg. <u>nicht</u> abg.

<u>Bew.</u> (lin. + Algebra)

1) linear: • $c \cdot f$: betr. $c \cdot g_1, \ldots, c \cdot g_\ell$ für $g_1, \ldots, g_\ell$ zu ε / c

• $f_1 + f_2$: betr. $\left(g_\ell^{(1)} + g_m^{(2)}\right)_{\ell,m}$

2) Algebra: für $\varepsilon > 0$ betr. $\left(g_\ell^{(1)} \cdot g_m^{(2)}\right)_{\ell,m}$,

wobei $\left(g_\ell^{(1)}\right)_\ell$ zu $f_1 \in AP(\tilde{X}, X) \cap L^\infty$ und ε

und $\left(g_m^{(2)}\right)_m$ zu f_2 — " — gehören.

$$\underbrace{\left\| \tilde{T}^n (f_1 \cdot f_2)(x,\cdot) - g_\ell^{(1)} g_m^{(2)} (x,\cdot) \right\|_{L^2(x\text{-Faser})}} \leq$$

$$\leq \underbrace{\left\| \tilde{T}^n f_1 (x,\cdot) \right\|_\infty}_{= \|f_1\|_\infty} \cdot \underbrace{\left\| \tilde{T}^n f_2(x,\cdot) - g_m^{(2)}(x,\cdot) \right\|_{L^2(x\text{-Faser})}}_{< \varepsilon}$$

$$+ \underbrace{\left\| g_m^{(2)} \right\|_\infty} \cdot \underbrace{\left\| \tilde{T}^n f_1(x,\cdot) - g_\ell^{(1)}(x,\cdot) \right\|_{L^2(x\text{-Faser})}}_{< \varepsilon}$$

Schneide g_m sonst ab → OBdA $\leq 2\|f_2\|_\infty$

(ersetze $g_m(x,y)$ durch 0, wenn $|g_m(x,y)| > 2 \cdot \|f_2\|_\infty$.

$$\leq \varepsilon \left(\|f_1\|_\infty + 2 \cdot \|f_2\|_\infty \right) \quad \text{für geschickte } l, m. \blacksquare$$

Also haben wir eine Kette von Faktoren:

$$\tilde{X} \to Y \longrightarrow X$$

$\mathbb{R}$ gehört zu $\overline{AP(\tilde{X}, X)}$

Def $(\tilde{X}, \tilde{T})$ heißt <u>kompakt rel. zu (X, T)</u> (oder: <u>kompakte Erweiterung von (X, T)</u>) wenn $\overline{AP(\tilde{X}, X)} = L^2(\tilde{X})$, d.h., wenn rel. fast per. Pkt'en dicht in $L^2(\tilde{X})$ liegen.

Bsp (<u>Schiefprodukt ist eine komp. Erweiterung von $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, R_\alpha)$</u>)

$$T(x, y) = (x + \alpha, x + y)$$

Fakt: $f_l(x, y) := e^{2\pi i l x}$, $h_m(x, y) := e^{2\pi i m y}$. Die Menge $\{f_l \cdot h_m\}_{l,m=-\infty}^{\infty}$ bildet eine ONB in $L^2([0,1]^2)$ (warum?)

Es reicht zz.: $\forall f_\ell$, $\forall h_m$ sind rel. fast per. (⟹ Produkte, Lin.komb auch)

- $\forall f_\ell$ ist eine EF (Eigenfkt): $Tf_\ell = e^{2\pi i \ell \alpha} f_\ell$

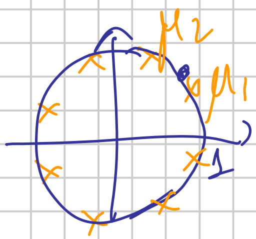
  $\Rightarrow f_\ell$ ist fast per

- $\forall h_m$ ist eine verallg. EF der Ordnung 2:

$$Th_m = f_m \cdot h_m$$

siehe oben $\rightarrow$ $$T^n h_m = \lambda^{\frac{m(n+1)n}{2}} f_m^n \, h_m \quad \text{für } \lambda := e^{2\pi i \alpha},$$

d.h., $$T^n h_m(x,\cdot) = \underbrace{\lambda^{\frac{m(n+1)n}{2}} e^{2\pi i m n x}}_{\text{ist unabh. von } y \text{ und liegt in } \mathbb{T}} \cdot h_m(x,\cdot)$$



Sei $\varepsilon > 0$ und wähle ein ε-Netz $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ von $\mathbb{T}$,

Def. $g_j := \mu_j \cdot h_m$.

Da $|h_m| = 1$, ist h_m rel. fast per.
($T^n h_m(x,\cdot)$ ist ε-nah an ein $\mu_j \cdot h_m(x,\cdot)$) $\blacksquare$

Bem. Das Schiefprodukt ist <u>nicht kompakt</u>:
Betrachte $f := h_1$, $f(x,y) = e^{2\pi i y}$
$$(T^n f)(x,y) = \lambda^{\frac{(n+1)n}{2}} \cdot e^{2\pi i y} \cdot e^{2\pi i n x}$$
Fubini: $T^n f \perp T^m f$ für $n \neq m$,
damit gilt $d(T^n f, T^m f) = \sqrt{2}$.
Also ist der Orbit von f nicht kompakt.

$\boxed{\text{Thm 6.1}}$ Wenn (X,μ,T) MR ist und
(multiple Rekurrenz $\forall k$)
$(\tilde{X},\tilde{\mu},\tilde{T})$ eine kompakte Erweiterung von (X,μ,T) ist,

dann ist $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ MR.

Lemma 6.2 Sei $f > 0$, beschr. Dann $\exists\, \tilde{f} > 0$ mit $\tilde{f} \leq f$, $\tilde{f}$ rel. fast periodisch.

Ohne Beweis von 6.2 (keine Zeit)

Beweis von 6.1

Wir benutzen die endliche Version von Van der Waerden

$\forall k$ (Länge) $\forall r$ (Farben) $\exists\, W(k,r)$ (van der Waerden-Zahl): $\forall n \geq W(k,r)$

$\forall$ Färbung von $\{1, \dots, n\}$ mit r-vielen Farben

$\exists$ einfarbige arithm. Progression der Länge k.

Schritt 1 (MR und gute Fasern)

Sei $f > 0$, $\|f\|_\infty \leq 1$. Nach Lemma 6.2 kann man OBdA annehmen: f rel. fast per.

Behauptung: $\exists \delta > 0$: $\exists A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$: $\int f(x,y)\,dy \geq \delta$ $\forall x \in A$.

Beweis: Def. $\forall \delta$ $A_\delta := \{x : \int f(x,y)\,dy \geq \delta\} \subset X$

$A_\delta \nearrow_{\delta \to 0} \underbrace{\{x : \int f(x,y)\,dy \neq 0\}}_{\text{Maß} > 0}$ $\Rightarrow$ Behaupt.

Sei $k \geq 2$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta, k)$, ε wird später gewählt.

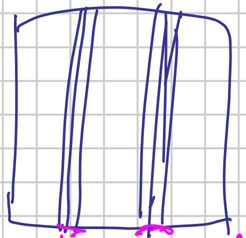
f rel. f. per.: $\exists \ell$ $\exists g_1, \dots, g_\ell$: $\forall n$ $\forall$ (f.a.) x

$\|\tilde{T}^n f - g_j\|_{L^2(x\text{-Faser})} < \varepsilon$ für ein $j = j(x,n)$.

Def. $L := W(k, \ell)$ aus VdWaerden,

d.h.: betrachte $g_1, \dots, g_\ell$ als Farben!

MR für (X, μ, T) und dieses L:



$E_n \subset A$

$\exists \delta' > 0$: $\mu(\underbrace{A \cap T^{-n} A \cap \ldots \cap T^{-Ln} A}_{=: E_n}) \geq \delta'$

für viele n.

Wir nehmen an: Die Menge solcher n ist syndetisch (hat beschr. Lücken) – z.B. Kroneckerfaktor erfüllt das.

(der allg. Fall ist analog aber länger)

D.h., $\exists \eta > 0$: solche n haben Proportion $\geq \eta$.

Schritt 2 (VdW in guten Fasern)

Sei n fest. Betrachte $f, \tilde{T}^n f, \ldots, \tilde{T}^{Ln} f$.

Rel. f.p.: $\forall m \in \{0, \ldots L\}$ $\forall$ (f.a.) x $\exists j = j(m,n,x)$:

$$\|\tilde{T}^{mn} f - g_j\|_{L^2(x\text{-Faser})} < \varepsilon .$$

D.h., für ein festes x haben wir eine Färbung von

$\{0, \dots, L\}$ in ℓ-viele Farben.

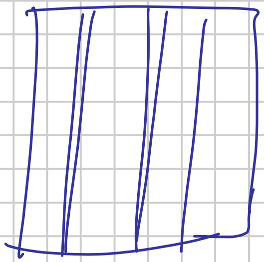
vdW: $\exists\, a, d$ (abh. von x, n) : $a, a+d, \dots, a+kd$ zu demselben g_i gehören. Insb. gilt

(**) $$\|\tilde{T}^{(a+id)n} f - \tilde{T}^{an} f\|_{L^2(x\text{-Faser})} < 2 \cdot \varepsilon$$
$\forall i = 0, \dots, k$.

(2ε-nah aneinander)

Schritt 3: Fasern mit derselben Progression

$\exists \leq L$ Möglichkeiten für a, d.



$E_n' \subset E_n \subset A$

Schubfachprinzip: $\exists\, E_n' \subset E_n$ mit $\mu(E_n') \geq \frac{\mu(E_n)}{L^2}$

s.d. $\forall x \in E_n'$ dasselbe a, d hat.

Schritt 4: Endabschätzung

Nach (**) und Δ-Ungl. gilt $\forall x \in E_n'$:

$$\int_{x\text{-Faser}} \tilde{T}^{an} f \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{(a+kd)n} f \geq \int_{x\text{-Faser}} \left(\tilde{T}^{an} f\right)^k - \underbrace{k \cdot 2\varepsilon}_{\text{ii}}$$

$$= \int_{A \ni \tilde{T}^{an} x\text{-Faser}} f^k - 2k\varepsilon \underset{\text{iii}}{\geq} \delta^k - 2k\varepsilon \geq \frac{\delta^k}{2}$$

iii $\int f > \delta \Rightarrow \int f^k > \delta^k$

für $\boxed{\varepsilon < \frac{\delta^k}{4k}}$

Da $f \geq 0$:

$$\int_{\tilde{X}} \cancel{\tilde{T}^{an}} f \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{(\cancel{a}+kd)n} f \geq \int_{E_n'} \ldots \underset{\text{Fubini}}{\geq} \mu(E_n') \cdot \frac{\delta^k}{2} \geq \frac{\delta'}{L^2} \cdot \frac{\delta^k}{2}$$

D.h.

$$\int_{\tilde{X}} f \cdot \tilde{T}^{dn} f \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{kdn} f \geq \frac{\delta' \delta^k}{2L^2}$$

Problem noch: $d = d(n) \in \{1, \dots, L\}$

Da $n \cdot d(n) \leq NL$ für $n \leq N$ und $\forall t \in \{0, \dots, NL\}$

$\exists$ höchstens L Möglichkeiten als $n \cdot d(n)$ geschrieben zu werden,

haben wir mit $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{NL} \int f \cdot \tilde{T}^{n} f \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{kn} f \geq \frac{\delta^{1} \delta^{k}}{2L^{2}} \cdot \eta$$

Proportion von guten n

$$\Rightarrow \frac{1}{LN} \sum_{n=1}^{NL} \text{---}\text{''}\text{---} \geq \frac{\delta^{1} \delta^{k}}{2L^{3}} \eta \qquad \forall N$$

(ii): $\underline{\lim} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} \text{---}\text{''}\text{---} > 0.$ ∎

Zusatz zum Beweis

Erinnere: klassisches Van der Waerden Thm.:

$\mathbb{N} = C_1 \cup \dots \cup C_r \implies \exists\, C_j$ mit $\underset{\exists \text{ beliebig lange AP.}}{(AP)}$

Wir zeigen:

vdW $\implies$ quantitativen vdW, d.h.,

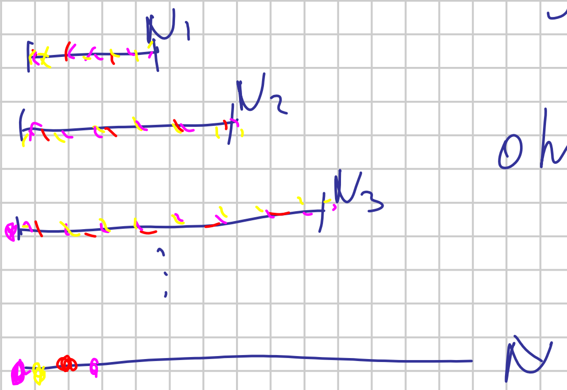
$\forall r\ \forall k\ \exists W(k,r): \forall N \geq W(k,r)\ \forall$ Färbung von $\{1, \dots, N\}$ mit r Farben $\exists$ einfarbige $\underbrace{k\text{-AP}}_{\text{AP Länge } k}$

Beweis Ang., quant. vdW ist falsch, d.h.,

$\exists r\ \exists k\ \exists (N_n)$ mit $N_n \to \infty$: $\exists$ Zerlegung

$\{1, \dots, N_n\} = C_{n,1} \cup \dots \cup C_{n,r}$

ohne eine einfarbige k-AP.



Schubfachprinzip: $\exists$ Teilfolge von (N_n):

$n = 1$ dieselbe Farbe

$\exists$ Teilfolge $(N_n^{(2)})$ davon: $n=2$ dieselbe Farbe

...

$N_1^{(1)}$ $N_2^{(1)}$ $N_3^{(1)}$ ... $-$ $n=1$ dieselbe Farbe

$N_1^{(2)}$ $N_2^{(2)}$ $N_3^{(2)}$ ... $n=2$ ...

Diagonalfolge: $\exists\, (N_n^{(n)})$: $\forall n$ dieselbe Farbe hat

D.h., wir haben eine Färbung von $\mathbb{N}$ in r-viele Farben.

VdW (klassisch), $\exists$ Farbe mit einer k-AP

Da punktweise Konv. und k-AP ja endlich ist,

$\exists n: \{1, \dots, N_n\} \supset$ einfarbige k-AP $\lightning$ $\blacksquare$

6.2 Schwach mischende Erweiterungen und Skizze des Restes des Beweises

von Furstenberg / Szemerédi.

Erinnere: • (X,μ,T) schw. mischend $\iff \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \left| \int f \cdot T^n g - \int f \cdot \int g \right| \to 0 \quad \forall f, g$

• (X,μ,T) nicht schw. mischend

$\Rightarrow \exists$ kompakten Faktor (d. h., $\exists f$ per. Fkt $\neq$ konst)

$\boxed{\text{Def.}}$ $(\tilde{X},\tilde{\mu},\tilde{T})$ heißt schw. mischende Erweiterung von (X,μ,T) (oder: schw. mischend rel. zu (X,μ,T)), wenn $\forall f, g \in L^\infty$

und $P_X : L^2(\tilde{X}) \to L^2(X)$ def. durch

$$(P_X f)(x) := \int f(x,y)\, dy$$

(wird über X gemittelt)

gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| P_X(f \cdot \tilde{T}^n g) - P_X f \cdot T^n(P_X g) \|_{L^2(X)} \longrightarrow 0.$$

<u>Bem.</u> 1) P_X ist bedingte Erwartung bzgl. der Zylinder-σ-Algebra.

2) (X, μ, T) schw. mischend $\iff$ schw. mischend rel. zu $\{\bullet\}$

Prop. (Multiple Rekurrenz für schw. mischende Erw.)

Sei $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ schw. mischend rel. zu (X, μ, T), $k \geq 2$, $f_0, \dots, f_k \in L^\infty(\tilde{X})$. Dann gilt (rel. schw. Mischung $\forall$ Ordnung):

$$(*) \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| P_X(f_0 \cdot \tilde{T}^n f_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{kn} f_k) - P_X f_0 \cdot \ldots \cdot T^{kn}(P_X f_k) \|_{L^2(X)} \to 0.$$

Insbesondere gilt MR für $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$, wenn MR für (X, μ, T) gilt.

<u>Beweis</u> 1. Teil – ohne (van der Corput)

2. Teil („insb."):

Sei $f > 0$, beschr. auf $\tilde{X}$. Nach $(*)$:

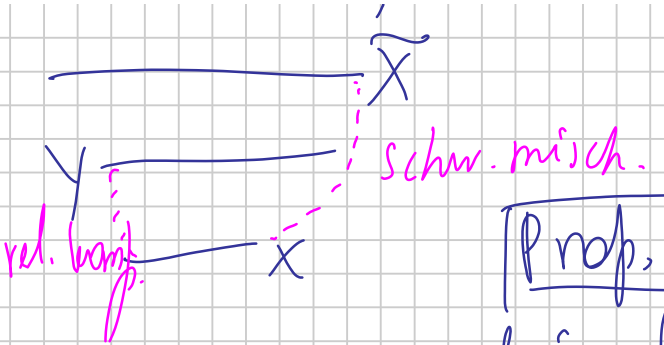
$$\int_{\tilde{X}} f \cdot \tilde{T}^n f \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{kn} f \, d\mu \underset{\text{Fubini}}{=} \int_X P_x\left(f \cdot \ldots \cdot \tilde{T}^{kn} f\right) dx$$

$$\underline{\lim} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \text{—''—} \underset{(*)}{=} \underline{\lim} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int_X \underbrace{(P_x f)}_{>0} \cdot \ldots \cdot T^{kn}(P_x f) > 0 .$$

MR für X und $P_x f$ ■

Thm (Dichotomie zwischen schw. mischenden & komp. Erweiterungen)

Sei $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ erg. und Erw. von (X, μ, T). Wenn $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ nicht rel. schw. mischend ist, $\exists$ Zwischenfaktor Y:



Y komp. Erw. von X.

$\boxed{\text{Prop.}}$ (MR für Limes von Faktoren)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ wachsende Kette von Faktoren

(oder: $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \nearrow$ $\underbrace{\sigma\text{-Alg.}}_{T\text{-inv.}}$)

Wenn $\forall X_j$ MR erfüllt, dann auch $\lim_j X_j$ (oder: die von $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ erz. σ-Alg.)

<u>Bem.</u> $\forall \Sigma_j$ gehört der lin. TR $L^2(X, \Sigma_j, \mu)$

<u>Schlussargument: Lemma von Zorn:</u>

$\exists$ maximalen Faktor X_{max} mit MR

Dichotomie: $X_{max} = X$.