5. Satz von Roth und zweifache Konvergenz

Roth '52 = Szemerédi für 3-AP:

$C \subset \mathbb{N}$, $\bar{d}(C) > 0 \Rightarrow \exists a, n : a, a+n, a+2n \in C$

Wir zeigen wieder mehr:

$\boxed{\text{Th } 5.1}$ Sei (X, μ, T) MDS. Dann gelten:

1) (zweifache Konvergenz) $\forall f, g \in L^\infty$ konv.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f \cdot T^{2n} g$$

in $L^2(X,\mu)$.

2) (Zweifache Rekurrenz) $\forall f \in L^\infty$, $f \geq 0$ gilt

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int f \cdot T^n f \cdot T^{2n} f \, d\mu > 0$$

Insbesondere impliziert 2) den Satz von Roth oben (Furstenbergsche Korrespondenz)

<u>Idee</u>: Wie für polyn. Konv./Rekurrenz:

- Eine Zerlegung $\underset{\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}\ L^2(X,\mu)}{H} = H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2$, H_1, H_2 T-inv.
- $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f \cdot T^{2n} g \xrightarrow{L^2} 0$ wenn f <u>oder</u> $g \in H_2$
- $f_1 := P_{H_1} f > 0$ und beschr., wenn $f > 0$, und

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int f_1 \cdot T^n f_1 \cdot T^{2n} f_1 \, d\mu > 0.$$

5.1 Die Jacobs-Glicksberg-deLeeuw Zerlegung

Erinnerung: T schwach mischend $\overset{WS}{\iff}$ 1 ein einfacher EW und keine weiteren EW von T

$\mathbb{D}$-Definition

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \mu(T^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right| \longrightarrow 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \langle T^n f, g \rangle - \int f \cdot \int \overline{g} \right| \longrightarrow 0 \quad \forall f, g$$

$f := \mathbb{1}_A, \; g := \mathbb{1}_B$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle T^n f, g\rangle| \longrightarrow 0 \quad \forall f \text{ mit } \int f = 0 \text{ und } \forall g.$$

$\boxed{\text{Def. 5.2}}$ Wir nennen f schwach mischend bzgl. T, wenn

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle T^n f, g\rangle| \longrightarrow 0 \quad \forall g.$$

Bem. 1) f ist schw. mischend $\Rightarrow$ $f \perp \mathbb{1}$ (d.h., $\int f = 0$)

Bem.: Für $g := \mathbb{1}$: $|\langle T^n f, g\rangle| = |\int \cancel{T^n} f| = |\int f| \xrightarrow{\text{Ces.}} 0$

$\Rightarrow \int f = 0$

2) f schw. mischend $\Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle T^n f, f\rangle| \longrightarrow 0$$

(d.h., es reicht, $g := f$ zu nehmen)

Bem. $\Rightarrow$ klar

$\Leftarrow$ • $g := f$ ist OK

• $g := T^k f$ OK, da $\langle T^n f, T^k f\rangle \overset{T \text{ isom.}}{=} \langle T^{n-k} f, f\rangle$

$\Rightarrow$ $g \in \operatorname{lin}\{T^k f,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ OK

iii) • $g \in \overline{\operatorname{lin}}\{T^k f,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ OK (Approxim.)

• Für $g \perp \overline{\operatorname{lin}}\{T^k f,\ k \in \mathbb{N}_0\}$, so gilt ja $\langle T^n f, g\rangle = 0$ $\forall n$ ∎

$\boxed{\text{Th 5.3}}$ (Zerlegung in die Eigenfkten und schw. mischende Fkt'en)

Für $H := L^2(X, \mu)$ gilt die Zerlegung in T-inv. abg. TR'e

$$H = H_{kr} \overset{\perp}{\oplus} H_{wmix},$$

wobei

- $H_{kr} := \overline{\text{lin}}\{f : Tf = \lambda f \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{T}\}$

  Kronecker-Teil (strukturiert)

- $H_{wmix} := \{f \text{ schw. mischend bzgl. } T\}$

  schwach mischender Teil (zufällig)

Beweis ii) H_{wmix} ist ein T-inv. abg. lin. TR.

Weiter gilt $H_{kr} \perp H_{wmix}$:

Sei g mit $Tg = \lambda g$ und f schw. mischend. Dann:

$$|\langle f, g\rangle| \overset{T \text{ isom.}}{=} |\langle T^n f, \underbrace{T^n g}_{\lambda^n g}\rangle| = |\langle T^n f, g\rangle| \xrightarrow[\text{da } f \text{ schw. mischend.}]{\text{Ces}} 0$$

zz: $H_{kr} + H_{wmix} = H$

Sei $f \perp$ Eigenfkt'en von T (alle EW $\in \mathbb{T}$)

zz.: f ist schwach mischend, d.h., $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle T^n f, f\rangle|^2 \longrightarrow 0$

(hier: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \to 0 \underset{\text{wenn } (a_n) \text{ beschr.}}{\overset{a \mapsto a^2 \text{ ist konvex}}{\Longleftrightarrow}} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \to 0$.)

Beobachtung: $|\langle T^n f, f\rangle|^2 \overset{|z|^2 = z\cdot\bar{z}}{=} \int_X (T^n f)(x)\,\overline{f}(x)\,d\mu(x) \cdot \int_X T^n \overline{f}(y) \cdot f(y)\,d\mu(y)$

$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{X\times X} T^n f \otimes T^n \overline{f} \cdot \overline{f} \otimes f \; d(\mu\times\mu) =$

wobei $(f\otimes g)(x,y) := f(x)\cdot g(y)$

$= \int_{X\times X} (T\times T)^n (f\otimes \overline{f}) \cdot \overline{f}\otimes f \; d(\mu\times\mu)$.

Also gilt: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle T^n f, f\rangle|^2 = \langle\langle \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (T\times T)^n}_{=:F_N} (f\otimes\bar f), f\otimes \bar f\rangle\rangle_{X\times X}$

$\xrightarrow[N\to\infty]{\text{von Neumann}} \langle \underbrace{P_{Fix(T\times T)} f\otimes\bar f}_{=:F}, f\otimes\bar f\rangle$

Wir zeigen: $F=0$

Idee: Benutze Integraloperatoren + Spektraltheorie von komp. s.a. Operatoren.

Def. K_N, K auf $L^2(X,\mu)$ durch:

$$(K_N g)(x) := \int F_N(x,y)\, g(y)\, dy$$
$$(Kg)(x) := \int F(x,y)\, g(y)\, dy.$$

Es gelten:

- $\|K_N - K\| \underset{\text{FA Bsp. (ii)}}{\leq} \|F_N - F\|_{L^2} \xrightarrow[\text{von Neumann}]{} 0$

- $(T\times T)^n(f\otimes f)(x,y) = (T^n f)(x)\cdot(T^n f)(y)$, d.h.,

$$(K_N g)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int (T^n f)(x)\,(T^n f)(y)\,g(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle g, T^n f\rangle\cdot(T^n f)(x)$$

D.h.,

$$\boxed{K_N g = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle g, T^n f\rangle\cdot T^n f}$$ – endlich dim. Operatoren

$\Rightarrow$ $\forall K_N$ ist komp. $\Rightarrow$ K auch komp. als Limes

- $\forall K_N$ ist s.a.

$$\langle K_N g, h\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle g, T^n f\rangle\langle T^n f, h\rangle = \langle g, K_N h\rangle$$

$\Rightarrow$ K auch s.a. $(N\to\infty)$.

Wir zeigen: $\forall \lambda \neq 0$ ist kein EW von K

Ang.: $\exists \lambda \neq 0,\ h \neq 0 : Kh = \lambda h$

Dann ist auch $T^n h$ $\forall n$ ein Eigenvektor von K zu λ:

<u>Schritt 1</u>: Zeige zuerst $KT = TK$

$$K_N T g = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle Tg, T^n f \rangle \, T^n f$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle g, T^{n-1} f \rangle \, T \cdot T^{n-1} f$$

$$= T \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle g, T^n f \rangle \, T^n f$$

$N \to \infty$: $KTg = TKg$.

<u>Schritt 2</u> zz: $T^n h$ ein Eigenvektor von K

$$KT^n h = T^n \underbrace{Kh}_{\lambda \cdot h} = \lambda T^n h$$

Also ist $\overline{\mathrm{Orb}_T h} \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda - K) =: Y$

Da K kompakt ist und $K|_Y = \lambda \cdot I$, gilt $\dim Y < \infty$

Also ist $\overline{\mathrm{Orb}_T h}$ endlich dim., T-inv., und damit ist T darauf eine unitäre Matrix.

$\forall$ unit. Matrix kann man diagonalisieren, d.h.,

$\overline{\mathrm{Orb}_T h}$ ist von endlich vielen Eigenfkt'en aufgespannt.

Insbesondere gilt

$$h = h_1 + \dots + h_K, \quad Th_j = \lambda_j h_j, \quad h_j \neq 0 \ \forall j.$$

Auf der anderen Seite gilt $f \perp$ EF von T

$\Rightarrow Tf, T^2 f, \dots \perp$ EF von T

$\Rightarrow$ Bild $K_N \perp EF$ von T $\forall N$

$\Rightarrow$ Bild $K \perp EF$ von T

Aber $h \in$ Bild K (da Eigenvektor von K) $\lightning$ zu $h = h_1 + \ldots + h_k$.

Damit hat K keine Eigenwerte $\neq 0$, s.a. + komp. $\Rightarrow K = 0$

Spektralsatz für komp. s.a. Operato

$\Rightarrow$ der Kern $F = P_{Fix(T \times T)}(f \otimes \bar{f}) = 0$ f.ü. (warum?)

$\Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |\langle T^n f, f \rangle|^2 \longrightarrow 0$. $\blacksquare$

5.2 Der schwach mischende Teil und zweifache Konvergenz

$\boxed{\text{Prop. 5.4}}$ Seien T ergodisch und f oder g schw. mischend. Dann:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f \cdot T^{2n} g \longrightarrow 0 \text{ in } L^2.$$

<u>Beweis</u> Def. $u_n := T^n f \cdot T^{2n} g$ und berechne

$$\langle u_{n+k}, u_n\rangle = \langle T^{n+k} f \cdot T^{2n+2k} g, T^n f \cdot T^{2n} g\rangle$$

$$= \langle \cancel{T}^n (T^k f \cdot T^{n+2k} g), \cancel{T}^n (f \cdot T^n g)\rangle$$

$$= \int (T^k f \cdot \bar{f}) \cdot T^n (T^{2k} g \cdot \bar{g})$$

$$\xrightarrow[\text{von Neumann + Ergodizität}]{\text{Cesàro}} \int T^k f \cdot \bar{f} \cdot \int T^{2k} g \cdot \bar{g} = \langle T^k f, f\rangle \cdot \langle T^{2k} g, g\rangle.$$

Wenn f schw. mischend, dann gilt

$$\gamma_k := \overline{\lim} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle u_{n+k}, u_n \rangle \right| = |\langle T^k f, f\rangle| \cdot |\langle T^{2k} g, g\rangle|$$

$$\leq |\langle T^k f, f\rangle| \cdot \|g\|^2 \xrightarrow{\text{Cesàro}} 0$$

f schw. mischend

Vd Corput $\Rightarrow$ $u_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} 0$

Ü Dasselbe für g schw. mischend. $\blacksquare$

<u>Bem.</u> 1) Ein ähnliches Argument zeigt, dass $\forall$ schw. mischende System schw. mischend jeder Ordnung ist, d.h.,

$\forall k \; \forall \; A_0, \ldots, A_k \in \Sigma$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \mu(A_0 \cap T^{-n} A_1 \cap \ldots \cap T^{-kn} A_k) - \mu(A_0) \cdots \mu(A_k) \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Insbesondere haben schw. mischende Systeme multiple Rekurrenz jeder Ordnung.

2) <u>Offen</u> (Rohlin 1949): Ist $\forall$ mischende System mischend jeder Ordnung, d.h., $\forall k$ $\forall A_0, \dots, A_k$

$$\mu(A_0 \cap T^{-n} A_1 \cap \dots \cap T^{-kn} A_k) \longrightarrow \mu(A_0) \cdot \ldots \cdot \mu(A_k) \,?$$

(Offen sogar für $k=2$).