Ergodentheorie II

SS 2017

0. Einleitung:

Der Satz von Szemerédi

Wir untersuchen die folgende Eigenschaft:

$C \subset \mathbb{N}$

(AP) $\forall k \; \exists a, n : \underbrace{a, a+n, a+2n, \dots, a+kn}_{(AP_k)} \in C$

Länge (→ k), Anfang (→ a), Schritt (→ n)

$\boxed{\text{Th 0.1}}$ (Van der Waerden, 1927)

$\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_m \Rightarrow \exists j : C_j$ hat (AP)

$\boxed{\text{Bsp}}$ (keine ∞-langen AP i. A.)

$\underbrace{1, \ldots, 10}_{\in C_1}, \underbrace{11, \ldots, 100}_{\subset C_2}, \underbrace{101, \ldots, 1000}_{\subset C_1}, \ldots \qquad \mathbb{N} = C_1 \cup C_2$

Weder C_1 noch C_2 erfüllt (AP_∞)

$\Leftrightarrow \exists$ einer ∞-langen AP.

$\boxed{\text{Def. 0.2}}$ Sei $C \subset \mathbb{N}$. Die obere Dichte von C ist

$$\bar{d}(C) := \overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{\#(C \cap \{1, \ldots, N\})}{N} \in [0,1]$$

$[x x \cdots x]_1^N \; x \ldots$

Analog: $\underline{d}(C)$ – untere Dichte. Wenn der Limes $\exists$, nennt man ihn die Dichte von C.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $2\mathbb{N}$ hat Dichte $1/2$

$k\mathbb{N}$ –"– $1/k$

$\exists\, C$ mit $\underline{d}(C)=0$, $\bar{d}(C)=1$: $0,1,1,1,1,1,1,0,0,0 \ldots 0,1,1 \ldots$

$\boxed{\text{Th } 0.3}$ (Szemerédi, 1975)

$\bar{d}(C)>0 \implies C$ erfüllt (AP)

Bem. Szemerédi $\implies$ van der Waerden ($\exists\, C_j$ mit $\bar{d}(C_j)>0$ – folgt aus: $\bar{d}(C_1 \cup C_2) \leq \bar{d}(C_1)+\bar{d}(C_2)$ – Ü)

$\exists$ mehrere Beweise von Szemerédi:

- Furstenberg 1977 – Ergodentheorie
- Gowers 2002 – Fourieranalysis
- Gowers + 4, 2004 – Graphentheorie

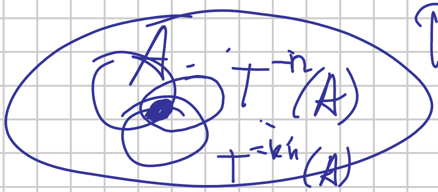
⋮

<u>Furstenberg</u>: Übersetzung in die ET-Sprache + Lösung

$\boxed{\text{Th. 0.4}}$ (Furstenberg multiple Rekurrenz, 1977)

Seien (X, μ, T) ein MDS, $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$ und $k \in \mathbb{N}$.

Dann: $\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}(A) \cap \dots \cap T^{-kn}(A)) > 0$



Es gilt: Furstenberg $\Longleftrightarrow$ Szemerédi, wir brauchen nur $\Rightarrow$,

1. Furstenberges Korrespondenzprinzip

Prop. 1.1 Multiple Rekurrenz$_{(k)}$ $\Longrightarrow$ Szemerédi$_{(k)}$

Hilfsmittel / Fakten aus FA

1) Schwach*-Topologie auf E' für einen BR E:
$\varphi_n \xrightarrow{\text{schwach}^*} \varphi$, wenn $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ $\forall x \in E$

2) $(\ell^1)' = \ell^\infty$ und schwach*-Konv. auf ℓ^∞ entspricht der koord. Konvergenz:

$$t_n \xrightarrow{\text{schwach}^*} t \iff (t_n)_j \to t_j \quad \forall j \qquad ⓤ$$

3) $(C(K))' = \mathfrak{M}(K)$ – Borelmaße auf K mit

$$\underset{\text{Funktional}}{\varphi}(f) = \int f \, d\underset{\text{Maß}}{\mu} \qquad \text{(Satz von Riesz)}$$

Schwach*-Konv. entspricht Konvergenz auf Mengen:

$$\mu_n \xrightarrow{\text{schwach}^*} \mu \iff \mu_n(A) \to \mu(A) \quad \forall A \text{ Borel}$$

4) Satz von Banach-Alaoglu: Die abg. Einheitskugel in E' ist schwach*-kompakt. Insbesondere hat $\forall$ beschr. Folge aus E' eine schwach*-konv. Teilfolge (wenn E separabel ist).

Beweis von Prop. 1.1

Sei $C \subset \mathbb{N}$ mit $\overline{d}(C) > 0$.

Zu konstruieren: (X, μ, T), A, ...

$C \rightsquigarrow \mathbb{1}_C \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ $\qquad 1, 2, 4, \dots \longrightarrow 1101\dots$

$T : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ Linksshift : $T((t_j)) := (t_{j+1})$

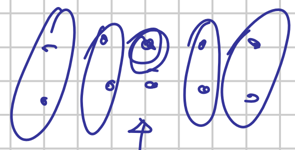
Def. $\quad X := \overline{\{ T^k \mathbb{1}_C ,\ k \in \mathbb{Z} \}}^{\text{schwach}^*} \subset \ell^\infty$

- $\forall x \in X$ ist eine 0-1-Folge
- X ist schwach*-komp. (Banach-Alaoglu)

Sei $T \curvearrowleft$ auf X (invert. Transf.)

Betrachte:

$A := \{(t_j) \in X : t_0 = 1\}$ – Zylinder



0-te Koord.

- A ist abg. und <u>offen</u> ($X \setminus A$ abg.)
- $\boxed{T^m \mathbb{1}_C \in A \Longleftrightarrow m \in C}$

  $(T^m \mathbb{1}_C)_0 = 1 \Leftrightarrow (\mathbb{1}_C)_m = 1 \Leftrightarrow m \in C.$
- C erfüllt $(AP_k) \Leftrightarrow \exists a, n : \underbrace{a, a+n, \dots, a+kn \in C}_{T^a \mathbb{1}_C,\, T^{a+n} \mathbb{1}_C, \dots, T^{a+kn} \mathbb{1}_C \in A}$

  $\Leftrightarrow \exists a, n : T^a \mathbb{1}_C \in \underbrace{A \cap T^{-n} A \cap \dots \cap T^{-kn} A}_{\text{offen}}$

  liegen dicht

  $\Leftrightarrow \exists n : \quad A \cap T^{-n} A \cap \dots \cap T^{-kn} A \neq \emptyset$

Insbesondere, C hat (AP_k), wenn

$\exists \mu$ (T-inv.): $\mu(A \cap \dots \cap T^{-kn} A) > 0$ für ein n.

<u>Konstruktion von μ</u>

Obere Dichte: $\exists (N_k)$: $\underbrace{\dfrac{\#(C \cap \{1, \dots, N_k\})}{N_k}}_{(*)_k} \longrightarrow \bar{d}(C) > 0$

$$(*)_k = \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} 1\!\!1_C(n) = \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} 1\!\!1_A (T^n 1\!\!1_C)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \delta_{\{T^n 1\!\!1_C\}}}_{=: \mu_k \text{ – Borel W'Maße auf } X,\ \text{d.h. } \in (C(X))'} (A)$$

Banach-Alaoglu: $\exists\, \mu_{k_j} \to \mu$ für ein $\mu \in \mathfrak{M}(X)$.

μ erfüllt:

- μ ist W'Maß $\big(\underbrace{\mu_{k_j}(X)}_{=1} \xrightarrow[\text{konv.}]{} \mu(X) \big)$
- μ ist T-inv:

$$\mu_k(T^{-1}B) = \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \underbrace{\delta_{\{T^n \mathbb{1}_C\}}(T^{-1}B)}_{\delta_{\{T^{n+1}\mathbb{1}_C\}}(B)}$$

$$= \frac{1}{N_k} \sum_{n=2}^{N_k+1} \delta_{\{T^n \mathbb{1}_C\}}(B).$$

D.h., $|\mu_k(T^{-1}B) - \mu_k(B)| \leq \frac{2}{N_k} \longrightarrow 0$

- $\mu(A) = \lim_j \mu_{k_j}(A) = d(C) > 0$

Wenn multiple Rekurrenz gilt, dann $\exists\, n$:

$$\mu\big(\underbrace{A \cap T^{-n}A \cap \ldots \cap T^{-kn}A}_{\Rightarrow\ \neq \emptyset}\big) > 0$$

$\Rightarrow$ C hat $(AP)_k$. $\blacksquare$

<u>Erinnere</u> Der Koopmanoperator T auf $L^2(X,\mu)$:

$$(Tf)(x) := f(Tx)$$

T invert. $\Rightarrow$ Koopmanop. T unitär.

Reformulierung der mult. Rekurrenz $(A \rightsquigarrow \mathbb{1}_A > 0)$

Seien (X,μ,T) MDS, $f > 0$ beschr. Dann gilt $\forall k$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int f \cdot T^{n} f \cdot \ldots \cdot T^{kn} f > 0$$

Idee: • Beweise mult. Rek. zuerst für „einfache" Systeme / Funktionen

• Zeige, dass ein beliebiges System / bel. Fkt eine Kombination von einfachen Systemen / Fkten ist.

Bem. Der Limes oben existiert:

Host-Kra, 2005: $\forall f_1, \dots, f_k$ beschr. konv. — multiple Konvergenz

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f_1 \cdot \ldots \cdot T^{kn} f_k$$

in L^2

($k=1$ – von Neumann, $k=2$ werden wir beweisen, $k \geq 3$ viel komplizierter.)

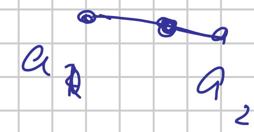
2. Reduktion auf ergodische Maße

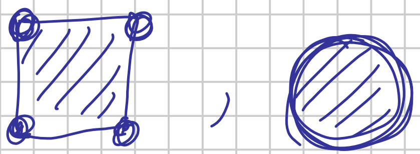
Wir zeigen, dass μ ergodisch gewählt werden kann.

Satz (Krein-Milman) Für $M \subset E'$ (E Banach) konvex und schwach*-abg. gilt:

$$M = \overline{\mathrm{conv}\{\text{Extremalpunkte von } M\}}^{\text{schw.}*}$$

Hier ist $a \in M$ Extremalpunkt von M, wenn $\nexists\, a_1, a_2 \in M$ ($a_1 \neq a_2$), $\nexists\, \lambda \in (0,1)$: $a = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2$.



Bsp 

Wir wenden diesen Satz auf

$$\mathfrak{M}_T(X) := \{T\text{-inv. W'Maße auf } X\}$$

für ein TDS (X,T) an.

<u>Beobachtung</u>

- $\mathfrak{M}_T(X) \subset \mathfrak{M}(X) = (C(X))'$
- $\mathfrak{M}_T(X)$ ist konvex:

  μ_1, μ_2 T-inv., $\alpha \in (0,1)$, dann

  $$\alpha \mu_1(T^{-1}A) + (1-\alpha)\mu_2(T^{-1}A) \underset{\mu_1,\mu_2\ T\text{-inv.}}{=} \alpha \mu_1(A) + (1-\alpha)\mu_2(A)$$

- $\mathfrak{M}_T(X)$ ist schwach*-abg.:

  $$\mu_n \to \mu \iff \underbrace{\int f \, d\mu_n}_{= \int Tf \, d\mu_n} \to \int f \, d\mu \quad \forall f \in C(X)$$

  $$\int Tf \, d\mu_n \to \int Tf \, d\mu,$$

  d.h., $\int f \, d\mu = \int Tf \, d\mu \quad \forall f \in C(X) \Rightarrow \mu$ ist T-inv.

Wie sehen Extremalpunkte aus?

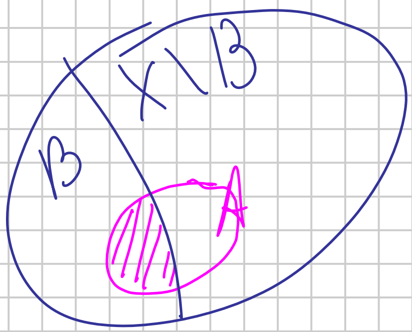
$\boxed{\text{Prop. 2.1}}$ μ ist Extremalpunkt von $\mathfrak{M}_T(X$

$\Leftrightarrow$ (X, μ, T) ergodisch

<u>Beweis</u> $\Rightarrow$ Ang., μ nicht erg., d.h. $\exists B$ mit $\mu(B) \in (0,1)$:

$B = T^{-1}B$ (bis auf Nullmeng)

$X \setminus B = T^{-1}(X \setminus B)$



Def. μ_1, μ_2:

$$\left.\begin{aligned}\mu_1(A) &:= \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} \\ \mu_2(A) &= \frac{\mu(A \cap (X \setminus B))}{\mu(X \setminus B)}\end{aligned}\right\} \text{W'Maße auf } X,$$

- μ_1, μ_2 sind T-inv:

$$\mu_1(T^{-1}(A)) = \frac{\mu(T^{-1}(A) \cap \underbrace{B}_{=T^{-1}(B)})}{\mu(B)} = \frac{\mu(\cancel{T^{-1}}(A \cap B))}{\mu(B)} = \mu_1(A)$$

analog für μ_2

- $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap (X \setminus B)) = \mu(B) \cdot \mu_1(A) + \underbrace{\mu(X \setminus B)}_{1-\mu(B)} \mu_2(A)$

$\Rightarrow$ μ ist nicht extremal $\lightning$

$\Leftarrow$ Sei μ erg., d.h.,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^2(X,\mu)}} \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1} \quad \forall f \in C(X) \quad (*)$$

Ang., μ nicht extremal: $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, $\alpha \in (0,1)$, $\mu_1 \neq \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$.

Dann gilt: $\mu_1 \leq \frac{1}{\alpha}\mu$ und

$$\|g\|_{L^2(\mu_1)} = \left(\int |g|^2 \, d\mu_1\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|g\|_{L^2(\mu)},$$

d.h., Konv. bzg. $L^2(\mu)$ impliziert Konv. in $\|\cdot\|_{L^2(\mu_1)}$.

Wir haben:

$$\int f \, d\mu_1 \underset{\mu_1 \text{ T-inv.}}{=} \int \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f \, d\mu_1 \longrightarrow \int f \, d\mu \underbrace{\int 1 \, d\mu_1}_{=1} = \int f \, d\mu$$

$\xrightarrow{\|\cdot\|_{L^2(\mu_1)}} \int f \, d\mu \cdot 1$ nach $(*)$

$\forall f \in C(X)$

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 \text{ ↯}$$

$\blacksquare$

Erinnere: Fürstenbergsches Korrespondenzprinzip:

$X = \overline{\{T^n 1_C, n \in \mathbb{Z}\}}^{\text{schw}*}$, $T \circlearrowleft$, $A = \{x \in X : t_0 = 1\}$

μ: $\mu(A) = \bar{d}(C) > 0$

Prop. 2.1 + Krein-Milman: $\mu \in \overline{\text{conv}}\{$T-inv. ergodische Maße$\}$

Daraus folgt: $\exists \nu \in \mathcal{M}_T(X)$ erg.:

$$\nu(A) \geq \frac{\mu(A)}{2} = \frac{\bar{d}(C)}{2} > 0$$

D.h., $\exists$ ergodisches Maß ν : $\nu(A \cap T^{-n}A \cap \ldots \cap T^{-kn}A) > 0$ nach Furstenberg.

Wir werden multiple Rekurrenz (Furstenberg) nur für ergodische Maße (teilweise) beweisen.

3. Zum Aufwärmen: polynomielle Konvergenz und Rekurrenz

$\boxed{\text{Th 3.1}}$ (Furstenberg–Sárközy, '77)

Sei $C \subset \mathbb{N}$ mit $\bar{d}(C) > 0$, $p \in \mathbb{Z}[X]$ mit $p(0) = 0$.

Dann $\exists x, n$: $x, x + p(n) \in C$.

(z.B.: $x, x+n^2 \in C$).

$\boxed{\text{Bsp}}$ ($p(0)=0$ kann nicht weggelassen werden)

$C = 2\mathbb{N}$, $p(n) = 2n+1$. Dann $\nexists\, x, n : x, x+2n+1 \in C$

Eine leichte Modifikation des Korrespondenzprinzips liefert

(Ũ) : Th 3.1 folgt aus:

$\boxed{\text{Th 3.2}}$ Seien (X, μ, T) ein MDS, $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$, $p \in \mathbb{Z}[X]$ mit $p(0) = 0$. Dann gilt:

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-p(n)} A) > 0$$

Wieder: $A \rightsquigarrow 1_A$. $\mu(A \cap T^{-p(n)} A) = \int T^{p(n)} f \cdot f \, d\mu$
$= \langle T^{p(n)} f, f \rangle$

Wir zeigen mehr:

Th 3.3 Seien $p \in \mathbb{Z}[X]$, (X,μ,T) MDS.

1) (Polynomielle Konvergenz)

$\forall f \in L^2$ konv. $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} f$ in $L^2(X,\mu)$

2) (Polynomielle Rekurrenz)

Wenn $p(0)=0$, $f \in L^\infty$, $f>0$, dann

$$\lim \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\langle T^{p(n)} f, f\rangle}_{\int T^{p(n)} f \cdot f \, d\mu} > 0 .$$

Insbesondere ist der Limes in 1) auch >0.

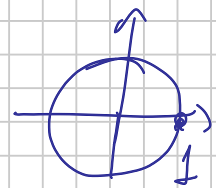
2) $\Rightarrow$ Furstenberg–Sárközy

FA-Hilfsmittel Der Spektralsatz für unitäre Operatoren

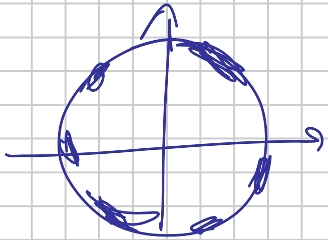
Seien H Hilbert, U unitär auf H und $x \in H$ zyklisch für U, d.h.,

$$H = \overline{\mathrm{lin}}\{U^n x,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann $\exists\ \nu \in \mathfrak{M}(\mathbb{T})$ – das Spektralmaß von x – s.d.



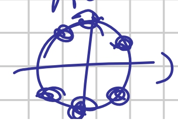
Borel



$$\begin{cases} H \overset{\text{isomorph}}{\sim} L^2(\mathbb{T}, \nu) \\ U \sim M \text{ - Multiplikator: } (Mf)(\lambda) := \lambda \cdot f(\lambda) \\ x \sim \mathbb{1} \end{cases}$$

Außerdem ist $\sigma(U) = \mathrm{supp}\,\nu$ und:

λ_0 ist EW von $U \iff \nu(\{\lambda_0\}) > 0$, d.h., λ_0 ist Atom für ν.

(Erinnere: U unit. Matrix $\Rightarrow U \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$ , $\dim \to \infty$  FH)

Beweis: Polynomielle Konvergenz

Wir beweisen die Aussage für invertierbare T ($\Leftrightarrow$ Koopmanoperator ist unitär) – reicht für Furstenberg–Sárközy.

Sei $f \in L^2(X,\mu)$ und def. $H := \overline{\text{lin}}\{T^n f, n \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist f zyklisch für $T|_H$, also $\exists$ Spektralmaß ν auf $\mathbb{T}$:

$$T^n f \sim \lambda \mapsto \lambda^n \text{ auf } L^2(\mathbb{T},\nu)$$

D.h., Konvergenz von $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} f$ in $L^2(X,\mu)$ entspricht Konv. von $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \lambda^{p(n)}$ in $L^2(\mathbb{T},\nu)$.

Fall 1: λ irrational ($\lambda^n \neq 1 \ \forall n \neq 0$)

$\boxed{\text{Satz}}$ (Weyl): $(\lambda^{p(n)})_{n=1}^{\infty}$ ist gleichverteilt in $\mathbb{T}$ $\forall \lambda$ irrational

$\forall p \in \mathbb{Z}[X]$, $\deg p \geq 1$.

Oder (additiv): $(\alpha p(n))$ ist gleichverteilt in $[0,1]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\forall p$ mit $\deg p \geq 1$.

Beweis – später, sorry

($p(n) = n$ – WS)

Erinnere (WS): Weyl-Kriterium: (a_n) gleichverteilt in $[0,1]$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i a_n k} \longrightarrow 0 \quad \forall k \neq 0.$$

Insbesondere gilt für $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ (α irrat.); $a_n = \alpha p(n)$, $k = 1$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \alpha p(n)} \longrightarrow 0$$

nach Weyl.

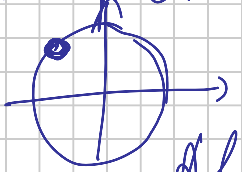
Fall 2 λ rational: $\exists a$, $\lambda^a = 1$. OBdA $p(0) = 0$: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{p(n)+c} f = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} (T^c f)$

Da $p(0) = 0$, gilt:

$$p(n+a) = p(n) + a \cdot \text{etwas}$$

(gilt für $n, n^2, n^3, \dots$)

Also gilt $\lambda^{p(n+a)} = \lambda^{p(n)}$ da $\lambda^a = 1$.

$\boxed{\text{Bsp}}$:  $a = 3$, $p(n) = n^2$. $n^2 \bmod 3$: $1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$

Also haben wir:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \lambda^{p(n)} = \left[N = k \cdot a + r, \quad r \in \{0, \dots, a-1\} \right]$$

$$= \frac{1}{ka+r} \left[\underbrace{\sum_{n=1}^{ka} \lambda^{p(n)}}_{k \cdot \sum_{n=1}^{a} \lambda^{p(n)}} + \sum_{n=ka+1}^{ka+r} \lambda^{p(n)} \right]$$

$$= \underbrace{\frac{k}{ka+r}}_{\to \frac{1}{a}} \sum_{n=1}^{a} \lambda^{p(n)} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=ka+1}^{ka+r} \lambda^{p(n)}}_{\to 0} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{a} \lambda^{p(n)}}_{=: c(\lambda)}$$

Satz von Lebesgue (majorisierte Konv.):

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \lambda^{p(n)} \xrightarrow[L^2(\mathbb{T},\nu)]{} g,$$

wobei

$$g(\lambda) = \begin{cases} c(\lambda), & \lambda \text{ rat. und ein } \underline{\text{Atom}} \text{ von } \nu. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere ist $\lim = 0$, wenn ν keine Atome hat, d.h., wenn T keine EW hat.

Beweis Rekurrenz ZZ: $f > 0$ und beschr. $\Rightarrow \lim \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle T^{p(n)} f, f\rangle > 0$ pol. Konvergenz.
(positive Korrelation mit f)

$\boxed{\text{Schritt 1}}$ (Zerlegung in strukturierten und zufälligen Teil)

Erinnere: $L^2(X,\mu) = \operatorname{Fix} T \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{Rg}(1-T)}$ — siehe den Beweis des Mittelergodensatzes

$T = I$ $\qquad$ $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f \to 0$

Dasselbe für T^a für $a \in \mathbb{N}$:

$$L^2 = \operatorname{Fix} T^a \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{Rg}(1-T^a)} \qquad \forall a$$

<u>Eigenschaft von $\operatorname{Fix} T^a$:</u>

$$a \,\vdots\, b \implies \operatorname{Fix} T^a \subset \operatorname{Fix} T^b$$

Insbesondere haben wir:

$$\operatorname{Fix} T \subset \operatorname{Fix} T^2 \subset \operatorname{Fix} T^{2\cdot 3} \subset \ldots \subset \operatorname{Fix} T^{n!} \subset \ldots,$$

Dies impliziert

$$L^2(X,\mu) = \underbrace{\overline{\bigcup_{a=1}^{\infty} \operatorname{Fix} T^a}}_{=:\, H_{rat}} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\operatorname{Rest}}_{= \bigcap_{a=1}^{\infty} \overline{\operatorname{Rg}(1-T^a)}}$$

Komponente des rationalen Spektrums

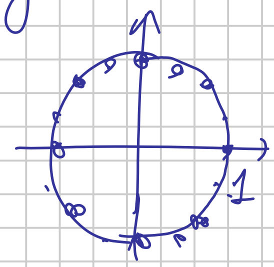
Eigenschaften von H_{rat}

- H_{rat} ist ein lin. abg. T-inv. Teilraum:

  T-inv.: $T^q x = x \Rightarrow T^q(Tx) = Tx$

  lin.: $T^a x = x$, $T^b y = y \Rightarrow T^{a \cdot b}(x+y) = x+y$

- $H_{rat} \supset$ Eigenvektoren zu rat. Eigenwerten



  $Tx = e^{2\pi i \frac{p}{q}} x \Rightarrow T^q x = x$

  Es gilt sogar: $H = \overline{\text{lin}}\{\text{Eigenvektoren zu rat. Eigenwerten}\}$

  (Ü: Probieren Sie den Spektralsatz)

- $f_{rat} := P_{H_{rat}} f > 0$ und beschränkt:

≥ 0: Def. $f_{a!} := P_{Fix\, T^{a!}} f$

Mittelergodensatz: $f_{a!} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{T^{a!n} f}_{\geq 0} \geq 0$

(ii): Y_n abg. lin. TR
$Y_n \subset Y_{n+1} \ \forall n$
$Y := \overline{\bigcup Y_n}$
$\Bigg\} \Rightarrow P_Y x = \lim P_{Y_n} x \quad \forall x$

(Bem.: Für $Y_n = L^2(X, \Sigma_n, \mu)$ ist das der Martingalsatz)

Unter-σ-Alg.

Es gilt also
$$f_{rat} = L^2\text{-}\lim f_{a!} \geq 0 \quad \text{(warum?)}$$

$\neq 0$: $0 < \int f \, d\mu = \langle f, \mathbb{1} \rangle = \langle f_{rat}, \mathbb{1} \rangle = \int f_{rat} \, d\mu$

$f - f_{rat} \perp H_{rat} \ni \mathbb{1}$

beschr. folgt genauso wie ≥ 0

Zerlege $f = \underset{\in H_{rat}}{f_{rat}} + \underset{\in H_{rest}}{f_{rest}}$, $f_{rat} \perp f_{rest}$

Dann:

$$\langle T^n f, f \rangle = \langle T^n f_{rat}, f_{rat} \rangle + \langle T^n f_{rest}, f_{rest} \rangle + \underbrace{\langle \underbrace{T^n f_{rat}}_{\in H_{rat}}, f_{rest} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \underbrace{T^n f_{rest}}_{\in H_{rest}}, f_{rat} \rangle}_{=0}$$

Wir zeigen:

- $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} f_{rest} \longrightarrow 0$ in L^2
- $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle T^{p(n)} f_{rat}, f_{rat} \rangle > 0$

$\boxed{\text{Schritt 2}}$: Der zufällige Teil (Rest)

Erinnere: Wir haben gezeigt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} x \longrightarrow 0$$

sobald das zugeh. Spektralmaß keine rat. Atome hat, d.h., T keine rat. Eigenwerte hat.

$\boxed{\text{Schritt 3}}$: Strukturierter Teil (H_{rat})

Sei $f \in H_{rat}$ (erinnere: $f_{rat} > 0$, beschr.)

OBdA: $\|f\|_\infty \leq 1$

Fall 1: $f = f_a$, d.h., $T^a f = f$.

$$p(0)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} a \mid p(a) \\ a \mid p(2a) \\ \vdots \end{array} \Rightarrow \langle \underbrace{T^{p(an)} f}_{=f}, f\rangle = \|f\|^2$$

und damit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{a\cancel{N}} \underbrace{\sum_{n=1}^{aN} \langle T^{p(n)} f, f\rangle}_{\geq \cancel{N}\cdot\|f\|^2} \geq \frac{\|f\|^2}{a} > 0$$

<u>Fall 2</u> Sei $f \in H_{rat}$ beliebig.

Bezeichne $\underline{d := \int f\, d\mu > 0}$.

Da $H_{rat} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{n!}$ und $H_{n!} \nearrow$, $\exists\, a$:

$$\|f - f_a\|_2 < \frac{d^2}{4} \qquad \text{für } f_a = P_{\mathrm{Fix}\,T^a} f.$$

Erinnere: $\|f_a\|_\infty \leq \|f\|_\infty \leq 1$ (Mittelergodensatz)

Wir haben:

$$\langle T^n f, f\rangle = \langle T^n f_a, f\rangle + \langle T^n(f - f_a), f\rangle$$

$$= \langle T^n f_a, f_a\rangle + \underbrace{\langle T^n f_a, f - f_a\rangle}_{|\cdot| \leq \|T^n f_a\| \cdot \|f - f_a\| \leq 1 \cdot \frac{d^2}{4}} + \underbrace{\langle T^n (f - f_a), f\rangle}_{|\cdot| \leq \frac{d^2}{4}}.$$

insbesondere: $\langle T^{p(a_n)} f, f\rangle \geq \underbrace{\langle T^{p(a_n)} f_a, f_a\rangle}_{= \|f_a\|^2} - \frac{d^2}{2}$

$$\geq \|f_a\|^2 - \frac{d^2}{2} \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \langle f_a, \mathbb{1}\rangle^2 - \frac{d^2}{2}$$

da $\cancel{f} - f_a \perp H_{rat} \ni \mathbb{1}$

$$= \langle f, \mathbb{1}\rangle^2 - \frac{d^2}{2} = d^2 - \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2}$$

Wie oben gilt: $\lim \frac{1}{aN} \sum_{n=1}^{aN} \langle T^{p(n)} f, f \rangle \geq \frac{1}{a} \cdot \frac{d^2}{2} > 0$.

4 Ein Hilfsmittel: das van der Corput Lemma.

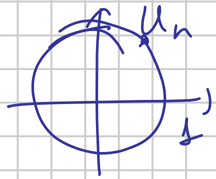
$\boxed{\text{Th } 4.1}$ (Van der Corput Lemma/Trick)

Seien $\mathbb{H}$ Hilbert, (u_n) beschr. in $\mathbb{H}$. Definiere $\forall h$

$$\gamma_h := \overline{\lim} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle u_{n+h}, u_n \rangle \right|.$$

Wenn $\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \gamma_h = 0$, dann gilt $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u_n = 0$.

Bem. 1) $\langle u_{n+h}, u_n\rangle$ heißen manchmal „diskrete Ableitungen längs h": Wenn $H = \mathbb{C}$ und $u_n = e^{i\varphi_n}$, dann hat man



$$\langle u_{n+h}, u_n\rangle = e^{i(\varphi_{n+h} - \varphi_n)}$$

analog zu $\dfrac{f(x+h\cdot 1) - f(x)}{1}$

2) Es gilt sogar mehr: (für $\|u_n\| \le 1$)

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u_n \right\| \le \overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \gamma_h$$

van der Corputsche Ungleichung

Ein alternativer Beweis von Schritt 2 (Rest) für polyn. Rekurrenz/Konvergenz ohne Spektralsatz und ohne Weyl

Sei $g \perp H_{rat}$. ZZ: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} g \longrightarrow 0$ in $L^2(X,\mu)$

$\forall$ Polynom $p \in \mathbb{Z}[\cdot]$ mit $\deg p \geq 1$.

(T nicht invert. $\Rightarrow$ $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$)

<u>Induktion nach $\deg p$</u>

<u>$\deg p = 1$</u> Da $g \perp \mathrm{Fix}\, T^a$ $\forall a$, gilt nach dem Mittelergodensatz

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{an} g \longrightarrow 0 \quad \text{in } L^2 \quad \forall a$$

Für $b \in \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}_0$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{an+b} g = T^b\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{an} g\right) \longrightarrow 0$$

<u>$\deg p$: $k-1 \rightsquigarrow k$</u>

Idee: Van der Corput für $u_n := T^{p(n)} g$

Sei $h \in \mathbb{N}$.

$$\langle u_{n+h}, u_n \rangle = \langle T^{p(n+h)} g, T^{p(n)} g \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ isom.}}}{=} \langle T^{p(n+h)-p(n)} g, g \rangle$$

Beobachtung:

$q_h(n) := p(n+h) - p(n)$ ist ein Polynom der Ordnung $k-1$ (also auch nicht konstant)

Ind' Voraus.:

$$\gamma_h := \overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle u_{n+h}, u_n \rangle \right| = \overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \langle \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{p(n+h)-p(n)} g}_{\to 0 \text{ in } L^2}, g \rangle \right|$$

$$= 0 \quad \forall h.$$

VdC: $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{p(n)} g \longrightarrow 0$. ∎

Noch eine Anwendung: Satz von Weyl

Wir zeigen: $\forall p \in \mathbb{Z}[\cdot]$, $p \neq$ konst. $\forall \alpha$ irrat. ist die Folge $\{\alpha p(n) \bmod 1\}$ <u>gleichverteilt</u> in $[0,1]$, oder

<u>Beweis</u>: Induktion: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \alpha p(n) k} \longrightarrow 0$ $\quad \forall k \neq 0$ (Weyl-Kriter. vom WS)

<u>$\deg p = 1$</u> $\quad p(n) = an + b$

$$\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \alpha a n k}}_{\to\, 0} \cdot e^{2\pi i \alpha b k} \longrightarrow 0 .$$

$\to 0$ (WS, erinnere: $\frac{1}{N}\left|\frac{e^{2\pi i \alpha a (N+1) k} - 1}{e^{2\pi i \alpha k} - 1}\right| \leq \frac{2}{N \cdot |e^{2\pi i \alpha k} - 1|} \longrightarrow 0$)

<u>$\deg p : d \rightsquigarrow d+1$</u>

$u_n := e^{2\pi i \alpha p(n) k} \in \mathbb{C}$

$$\langle u_{n+h}, u_n \rangle = e^{2\pi i (p(n+h) - p(n)) k}$$

Polynom mit Ordnung d

$$\xrightarrow{\text{Ces.}} 0 \quad \text{(Ind'Voraus.)}$$

D.h., $\gamma_h := \lim \left| \frac{1}{N} \sum_1^N \langle u_{n+h}, u_n \rangle \right| = 0 \quad \forall h$ ∎

VdC: $u_n \xrightarrow{\text{Ces.}} 0$

<u>Beweis (van der Corput)</u>

OBdA sei $\|u_n\| \leq 1 \quad \forall n$. (warum?)

Sei $H \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zuerst:

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u_n - \frac{1}{N} \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=0}^{H-1} u_{n+h} \right\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

<u>Beweis</u>: Für $N > H$:

$$\left\| \frac{u_1 + \ldots + u_N}{N} - \frac{\frac{u_1+\ldots+u_H}{H} + \ldots + \frac{u_N+\ldots+u_{N+H-1}}{H}}{N} \right\|$$

$\leq$ [$u_H, \ldots, u_N$ kommen H mal vor hier $\Rightarrow$ kürzen sich]

$$\leq \frac{1}{N} \cdot 2 \left[\|u_1\| + \ldots + \|u_{H-1}\| + \|u_{N+1}\| + \ldots + \|u_{N+H-1}\| \right]$$

$$\leq \frac{2}{N} \cdot 2 \cdot (H-1) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \qquad \blacksquare$$

Es reicht also zz:

$$\underbrace{\overline{\lim_{N\to\infty}} \left\| \frac{1}{NH} \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=0}^{H-1} u_{n+h} \right\|}_{(*)}$$

kann beliebig klein sein (für große H).

$$\|(*)\| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1} u_{n+h} \right\|$$

Da $x \mapsto x^2$ konvex ist, gilt

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_N}{N}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \dots + a_N^2}{N}$$

und damit:

$$\|(*)\|^2 \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1} u_{n+h} \right\|^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{H^2}\sum_{h_1,h_2=0}^{H-1} \langle u_{n+h_1}, u_{n+h_2}\rangle .$$

Daraus folgt:

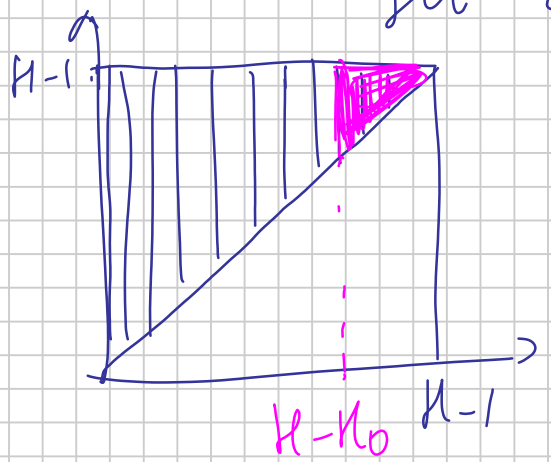
$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \|(*)\|^2 \leq \frac{1}{H^2}\sum_{h_1,h_2=0}^{H-1} \underbrace{\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle u_{n+h_1}, u_{n+h_2}\rangle \right|}_{=\gamma_{|h_1-h_2|}}$$

(warum?)

Wir zeigen: $\frac{1}{H^2} \sum_{h_1,h_2=0}^{H-1} \gamma_{|h_1-h_2|} \xrightarrow[H\to\infty]{} 0$

Sei $\varepsilon > 0$ und nimm H_0: $\forall H \geq H_0$

$$\frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \gamma_h < \varepsilon .$$

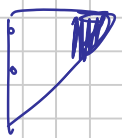


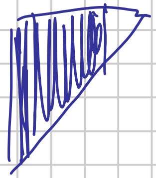
Dann haben wir:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{H^2} \sum_{h_1,h_2=0}^{H-1} \gamma_{|h_1-h_2|} \leq \frac{1}{H^2} \sum_{h_1=0}^{H-1} \sum_{h_2=h_1}^{H-1} \gamma_{h_2-h_1}$$

Diagonale kommt doppelt vor

$$= \underbrace{\frac{1}{H} \sum_{h_1=0}^{H-H_0} \frac{1}{H} \sum_{h_2=h_1}^{H-1} \gamma_{h_2-h_1}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{1}{H^2} \sum_{h_1=H-H_0}^{H-1} \sum_{h_2=h_1}^{H-1} \gamma_{h_2-h_1}}_{\mathrm{II}}$$

II  $\mathrm{II} \leq \frac{1}{H^2} \cdot H_0^2 \xrightarrow[H \to \infty]{} 0$.

I  : $\mathrm{I} = \frac{1}{H} \sum_{h_1=0}^{H-H_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{k} \sum_{h=0}^{H-h_1-1} \gamma_h}_{\leq \frac{1}{H-h_1-1} \sum_{h=0}^{H-h_1-1} \gamma_h < \varepsilon,}$

da $H - h_1 \geq H_0$

Insgesamt: $\frac{1}{H^2} \sum_{h_1, h_2 = 0}^{H-1} \gamma_{|h_1 - h_2|} \xrightarrow[H \to \infty]{} 0$, wir sind fertig. ■