Notiztitel 31.01.2017

Z.z.: $f \in L^1(X,\mu)$ reellwertig. Dann gilt $\forall N$

$$\int_{\{x:\, f(x)+\dots+(T^n f)(x)>0 \text{ für ein } n\le N\}} f(x)\, d\mu \geq 0$$

$E_N := \{x:\, \underbrace{f(x)+\dots+T^n f(x)}_{f_{n+1}(x)} > 0 \text{ für ein } n \le N\}$

$f_0 := 0,\quad f_1 = f,\ \dots,\quad f_n := f + Tf + \dots + T^{n-1} f$

$F_N := \max\{f_0, \dots, f_N\}$

Eigenschaften von F_N:

- $F_N \geq 0$, $F_N \geq f_n \quad \forall n = 0, \dots, N$
- $TF_N + f \geq Tf_n + f = f_{n+1} \quad \forall n \leq N$

insb. gilt:

$$TF_N + f \geq \max\{f_1, \dots, f_N\}$$

Sei $x \in E_N$, d.h., $F_N(x) > 0$. Dann gilt:

$$\max\{f_1, \dots, f_N\}(x) = \max\{0, f_1, \dots, f_N\}(x)$$

und damit $\boxed{TF_N + f \geq F_N \text{ auf } E_N}$

Da $F_N \geq 0$ (und auch $TF_N \geq 0$), gilt:

$$\int_{E_N} f \geq \int_{E_N} F_N \, d\mu - \int_{E_N} TF \, d\mu = \left[\begin{matrix} F_N = 0 \\ \text{auf } X \setminus E_N \end{matrix}\right]$$

$$= \int_X F_N \, d\mu - \int_{E_N} T F_N \, d\mu \geq \int_X F_N \, d\mu - \int_X T F_N \, d\mu = 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Korollar 3.7}}$ (Maximale Ungleichung)

Sei (X, μ, T) ein MDS, $f \in L^1(X, \mu)$. Dann gilt:

$$\mu\{x : (S^* f)(x) > \lambda\} \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}$$

für den Max'Operator

$$S^* f := \sup_N \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n f \right| .$$

Insbesondere erfüllt S^* die max. Ungleichung mit $C(\lambda) := \frac{1}{\lambda}$.

<u>Beweis</u> Betrachte $|f| - \lambda$. Max. Ergodensatz liefert:

$$\int_{\{x:\ \exists n\,:\ \underbrace{|f|(x)+\dots+T^{n-1}|f|(x)-n\cdot\lambda>0}_{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T^j|f|(x)>\lambda}\}} (|f|-\lambda)\,d\mu \geq 0,$$

d.h.,

$$\|f\|_1 \geq \int_{\{x:\ \frac{1}{n}\sum_{n=0}^{n-1}T^j|f|(x)>\lambda\} \text{ für ein } n} |f|\,d\mu \geq \lambda\cdot\mu\left(\{x:\ \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T^j|f|(x)>\lambda\}\right)$$

$$\geq \lambda\cdot\mu\Big(\{x:\ \underbrace{\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T^j f\Big|(x)>\lambda \text{ für ein } n}_{(S^*f)(x)>\lambda}\}\Big)$$

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T^j f\Big| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T^j|f|$$

und damit $\frac{\|f\|_1}{\lambda} \geq \mu(\{x : (S^* f)(x) > \lambda\})$ $\blacksquare$

Beweis des Birkhoffschen Ergodensatzes (Zusammenfassung)

Beobachtung: f .ü. konv. von $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T^j f \iff f$.ü. konv. von $S_n f := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j f$

Der Beweis von von Neumann liefert f .ü. konv.

auf $D := \underbrace{\mathrm{Fix}\,T}_{\text{konv. gegen } f} \oplus \underbrace{(I-T)(L^\infty(X,\mu))}_{\text{konv. gegen } 0}$ – dichte Teilmenge von $L^1(X,\mu)$

Maximale Ungl.: $\mu(\{x : (S^* f)(x) > \lambda\}) \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}$ $\forall \lambda > 0$ $\forall f \in L^1$

für $S^* f := \sup_n |S_n f|$

Banachsches Prinzip: Die Menge

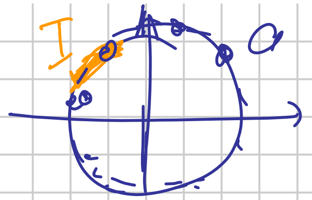
$$F := \{ f \in L^1 : S_n f \text{ konv. f.ü.} \}$$

ist abg. in L^1. Da $F \supset D$, ist F dicht und abg., also $= L^1(X, \mu)$. ∎

3.6. Anwendung: Gleichverteilung

Sei $a \in \mathbb{T}$ irrat. Wir wissen: Der Orbit $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in $\mathbb{T}$. Es gilt aber mehr:

$\boxed{\text{Th}}$ (Weyl) Die Folge $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichverteilt in $\mathbb{T}$, d.h., $\forall$ Intervall $I \subset \mathbb{T}$ gilt



$$\frac{|\{j \in \{1,\dots,n\} : a^j \in I\}|}{n} \longrightarrow \text{Länge}(I)$$

(wobei $\text{Länge}(\mathbb{T}) = 1$)

__Beweis__ Wir wissen: $(\mathbb{T}, \text{Leb}, a)$ ist ergodisch. ~~Birkhoff~~:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{1}_I (a^j x)}_{|\{j \in \{1,\dots,n\} : a^j x \in I\}|} \longrightarrow \underbrace{\int \mathbb{1}_I \, d\mu}_{\text{Länge}(I)}$$

gilt für f.a. $x \in \mathbb{T}$

Wir brauchen aber Konv. für $x = 1$ (damit $\forall x$: $a^j x \in I \Leftrightarrow a^j \in \bar{x} \cdot I$)

Beobachtung: $\mu = \text{Leb}$ ist das einzige a-inv. W'Maß

(Erinnere: μ a-inv. $\Rightarrow$ a^n inv. $\forall n$ $\Rightarrow$ λ-inv. $\forall \lambda \Rightarrow \mu$ Haar $=$ Leb.)

Wie in Krylov-Bogolyubov:

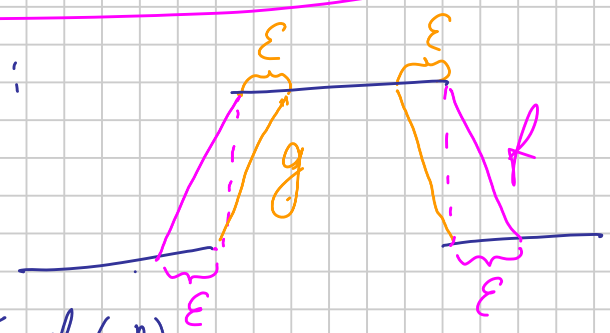
$\forall$ Teilfolgenlimes von $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \delta_{\{a^n\}}$ ist ein a-inv. W'maß, also das Lebesguemaß. D.h.,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \delta_{\{a^n\}} \longrightarrow \text{Leb} \text{ in } C(\mathbb{T})^*, \text{ d.h.,}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a^n) \longrightarrow \int f\,d\mu \quad \forall f \in C(\mathbb{T}) \quad (*)$$

Sei $\varepsilon>0$ und def. stetige f, g so:

$$g \le \mathbb{1}_A \le f$$



Es gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(a^n) \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(a^n) \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a^n)$$

$\text{Länge}(I) - \varepsilon \leq \int g \, d\mu \quad (*)$ $\qquad$ $(*)$ $\int f \, d\mu \leq \text{Länge}(\mathring{I}) + \varepsilon$

insbes. gilt:

$$\text{Länge}(\mathring{I}) - \varepsilon \leq \underline{\lim} \leq \overline{\lim} \leq \text{Länge}(I) + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(a^n) \longrightarrow \text{Länge}(\mathring{I}) \qquad \blacksquare$$

Bemerkungen 1) Aus dem Birkhoffschen Ergodensatz folgt eine andere Aussage: $\forall B \subset \mathbb{T}$ meßbar gilt

$$\frac{|\{j \in \{1, \dots, n\} : a^j x \in B\}|}{n} \longrightarrow \mu(B)$$

für fast alle x.

2) Wir haben eigentlich das Folgende bewiesen!

Prop Sei (X, T) ein top. dynam. System (X komp., T stetig) mit einem eindeutigen T-inv. erg. W'Maß μ auf X.

Dann gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(T^n x) \to \int f\,d\mu \qquad \forall f \in C(X) \quad \underline{\forall x \in X}$$

(d.h., Birkhoff für $f \in C(X)$ und $\underline{\forall x}$)

Solche Systeme (mit einem eindeutigen T-inv. W'Maß μ) heißen <u>eindeutig ergodisch</u>. Man kann zeigen: μ ist automatisch ergodisch.

3) Wie oben kann man zeigen:

$(x_n) \subset \mathbb{T}$ ist gleichverteilt $\iff \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int f\,d\mu \quad \forall f \in C(K)$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{x_n^k}_{e^{2\pi i k \varphi_n}} \longrightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$$

$\varphi_n = \arg(x_n)$

(Trick: appr. $\forall f \in C(\mathbb{T})$ mit (trig.) Polynomen in der $\|\cdot\|_\infty$-norm)

3.7 Weitere Anwendungen

1) Normale Zahlen

$\boxed{\text{Def}}$ Eine Zahl $x \in [0,1]$ heißt **einfach normal**, wenn in der Dezimalentwicklung

$x = 0, x_1 x_2 \dots$

die Folge (x_n) gleichverteilt in $\{0,\dots,9\}$ ist, d.h.,

$$\forall k \in \{0,\dots,9\} \quad \frac{|\{j \in \{1,\dots,n\} : x_j = k\}|}{n} \longrightarrow \frac{1}{10}.$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $x = 0{,}012\dots9012\dots9\dots$

$\boxed{\text{Th}}$ (Borel) Fast jedes $x \in [0,1)$ ist einfach normal.

Beweis Die Dezimaldarstellung ist eindeutig für f.a. x.

Betrachte $X = [0,1)$, $Tx = 10x \bmod 1$ auf $[0,1)$.

Wir wissen: $([0,1), \text{Leb}, T)$ ist isomorph zum Bernoullishift

$$B\left(\frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right) := \left(\{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}, \leftarrow\right)$$

durch den Isomorphismus.

$$\Phi : \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0, 1]$$

$$\Phi(x_1, x_2, \dots) := 0, x_1 x_2, \dots$$

(Φ ist „fast bij" – bij bis auf 2 Nullmengen)

Da $B\left(\frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right)$ ergodisch ist, so ist auch $([0,1], \text{Leb}, T)$ ergodisch.

Sei $k \in \{0, \dots, 9\}$ eine Ziffer.

Betrachte

$$A := \{x \in [0,1] ; x_1 = k\} = \left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right)$$

Wir haben $\mu(A) = \frac{1}{10}$ und damit nach Birkhoff:

$$\frac{|\{j\in\{1,\dots,n\}: x_j = k\}|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\mathbb{1}_A(T^j x)}_{=1 \iff x_{j+1}=k} \longrightarrow \mu(A) = \frac{1}{10}$$

für f.a. x.

D.h., die Konv. gilt $\forall b \in \{0,\dots,9\}$ für f.a. x $\blacksquare$

Bem. Eine Zahl heißt normal, wenn $\forall d$ $\forall$ endliche Kombination von Ziffern $k_1,\dots,k_d$ mit asymptotischer Häufigkeit $\frac{1}{10^d}$ vorkommt. Genauso zeigt man: f.a. x sind normal!

② Das starke Gesetz der großen Zahlen

$\boxed{\text{Th}}$ (Kolmogorov) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein W'Raum, seien

$(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{P})$ unabh., identisch verteilte reelle Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(X_1) \quad \mathbb{P}\text{-f.ü.}$$

<u>Erinnere</u>. • identisch verteilt: $\mathbb{P}(X_n^{-1}(A))$ ist unabh. von n, d.h.,

$\nu(A) := \mathbb{P}(X_n^{-1}(A))$ ist ein W'Maß auf $\mathbb{R}$, genannt Distribution von X_n, das unabh. von n ist.

• unabh.: Die Mengen $(X_n^{-1}(A_n))$ sind unabh., d.h.,

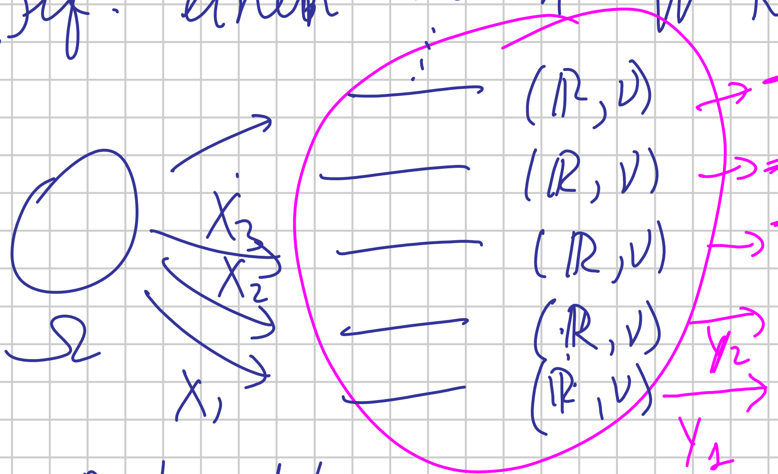
$\forall k \quad A_{i_1}, \dots, A_{i_k} \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}^{-1}(A_{i_j})\right) = \nu(A_{i_1}) \cdots \nu(A_{i_k}).$$

<u>Beweis</u> Betrachte

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_\Omega \underbrace{X_1(\omega)}_{=:t}\, dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dV(t)$$

Def. einen neuen W'Raum



$$(X, \Sigma, \mu) := \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Borel}(\mathbb{R}), \prod_{n=1}^{\infty} \nu\right)$$

und den Linksshift

$\tau : X \to X$ (hier: 1)

Betrachte $Y_n : X \to \mathbb{R}$ die n-te Projektion:

$$Y_{j+1}(x) = Y_1(\tau^j x) \quad \forall x.$$

Damit gilt nach Birkhoff:

$(*)$ $\quad \dfrac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{Y_1(\tau^j x)}_{Y_{j+1}(x)} \longrightarrow \int_X Y_1 \, d\mu \quad$ f.ü. $(\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}, \mu)$

$\uparrow$ Birkhoff + Ergodizität des Shiftes

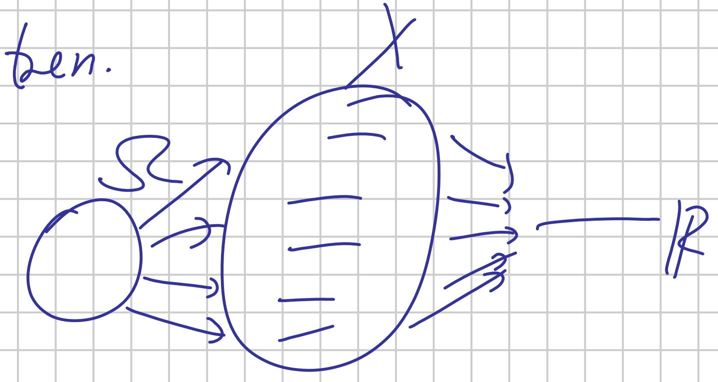
Da $\mu(\underbrace{Y_1^{-1}(A)}_{\text{Zylindermenge}}) = \nu(A)$, gilt:

$$\int_X \underbrace{Y_1}_{\text{"}=t\text{"}} \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} t \, d\nu(t).$$

ZZ: Man kann Y_j durch X_j ersetzen. (in $(*)$)

Betrachte $\varphi: \Omega \to X$

$\varphi(\omega) := (X_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$.



Behauptung: φ ist maßtreu.

Beweis: $\varphi^{-1}\left(\begin{matrix}\text{Zylinder} \\ \text{erzeugt von } A_{j_1}, \dots, A_{j_k}\end{matrix}\right) = \bigcap_{i=1}^{k} X_{j_i}^{-1}(A_{j_i})$

$$\mathbb{P}(\varphi^{-1}(-\text{"}-)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_{j_i}^{-1}(A_{j_i})\right) = \prod_{i=1}^{k} \nu(A_{j_i}) = \mu(\text{Zylindermeng})$$

(X_n) unabh.!

Behauptung. $\blacksquare$

Es gilt:

$$X_n = Y_n \circ \varphi.$$

Also haben wir:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}(\omega) = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}(\varphi\,\omega),$$

d.h.,

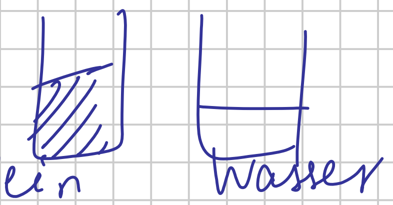
$$\left\{ \omega : \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}(\omega) \not\to \mathbb{E}(X_1) \right\} \overset{\text{maßtreu}}{=} \varphi^{-1}\left(\left\{ x : \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}(x) \not\to \mathbb{E}(X_1) \right\} \right)$$

hat Maß 0 nach (*)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\omega : \text{—"—}) = 0 \qquad \blacksquare$$

<u>Bem.</u> Genauso folgt aus dem von Neumann Theorem das schwache Gesetz der großen Zahlen für unabh., identisch verteilte Zufallsvariablen.

4. Starke und schwache Mischung (Kurzfassung)

Bsp 

Wir vermischen Wein und Wasser. Wann sind sie gut vermischt?

Intuitiv: $\dfrac{\mu(\text{Wein im Region } B)}{\mu(B)} \approx$ Anteil vom Wein im ganzen Glas $\forall B$

$\boxed{\text{Def 4.1}}$ Ein MDS (X,μ,T) heißt **mischend** (oder stark mischend), wenn

$$\mu(T^{-n}(A) \cap B) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)\mu(B)$$

$\forall A, B$ meßbar

$\boxed{\text{Bsp}}$: Bernoullishifts

Bem.: 1) (X,μ,T) mischend $\Rightarrow$ ergodisch

A T-inv.: $\mu(\underbrace{T^{-n}A \cap A}_{=\mu(A)}) \to \mu(A)^2$

$\Rightarrow \mu(A) = \mu(A)^2$, also $\mu(A) = 0$ oder 1.

2) $\not\Leftarrow$ $\boxed{\text{Bsp}}$ $0 \rightleftarrows 1$ $X = \{0,1\}$, $\mu(\{0\}) = \frac{1}{2} = \mu(\{1\})$, T.

Ergodisch – klar ($\{0\}$, $\{1\}$ nicht T-inv.)

Aber <u>nicht</u> mischend:

$$\mu\left(T^{-n}(\{0\}) \cap \{0\}\right) = \begin{cases} 1/2, & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

– divergiert

3) Man kann zeigen: Rotationen sind nie mischend

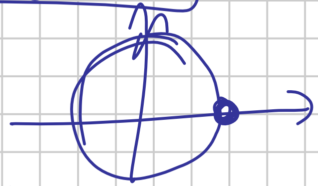
$\boxed{\text{Prop 4.2}}$ Es sind äquiv.:

(i) (X, μ, T) ist mischend

(ii) $T^n f \longrightarrow \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1}$ schwach, d.h.,

$$\langle T^n f, g \rangle \longrightarrow \int f \, d\mu \cdot \int \overline{g} \, d\mu \quad \forall f, g \in L^2.$$

Folgerung 4.3 (X,μ,T) mischend $\Rightarrow \begin{cases} P\sigma(T)\cap\mathbb{T} = \{1\} \\ 1 \text{ ist einfacher EW: } \\ \quad \operatorname{Ker}(1-T) = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}. \end{cases}$



__Beweis__ Sei $Tf = \lambda f$, $f \neq 0$, $f \perp \mathbb{1}$. Mischung liefert:

$$\lambda^n \cdot \|f\|^2 = \langle \underbrace{T^n f}_{\lambda^n \cdot f}, f \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{↯}$$

$\blacksquare$

Frage: Gilt $\Leftarrow$?

$\boxed{\text{Def}}$ 1) Sei $J \subset \mathbb{N}$.

Die Dichte von J ist:

1 2 3 4

$$d(J) := \lim_{n\to\infty} \frac{|J \cap \{1,\dots,n\}|}{n} \leq 1,$$

wenn existiert. (sonst: obere bzw. untere Dichte: $\overline{\lim}$ bzw. $\underline{\lim}$)

2) Ein MDS (X,μ,T) heißt <u>schwach mischend</u>, wenn $\forall A,B \in \Sigma$ es $J \subset \mathbb{N}$ mit $d(J)=1$ existiert mit

$$\mu(T^{-n}A \cap B) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ n\in J}]{} \mu(A)\mu(B)$$

Kurz: $D\text{-}\lim \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$

<u>Bem.</u> Mischung $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ schwache Mischung $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ Ergodizität
$ \underset{(2)}{\not\Leftarrow} \underset{(4)}{\not\Leftarrow}$

(1) ✓

(3) A T-inv.: $D\text{-}\lim \mu(A) = \mu(A)^2$

(4)

(2) Sehr schwer: 1944: Halmos: „Eine „typische“ Transf. ist mischend“ — Baire Kategorie — schwach

1948: Rohlin: „ — " — nicht mischend" — starke

Ein konkretes Bsp kam nach 10 Jahren

$\boxed{\text{Th } 4.4}$ (Charakterisierung schwacher Mischung)

Es sind äq.:

(i) (X, μ, T) ist schwach mischend

(ii) $\forall f, g \in L^2$ $D\text{-}\lim \langle T^n f, g\rangle = \int f \int g$

(iii) $P_\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{1\}$, 1 ist einfacher EW.

Beweis: ohne.