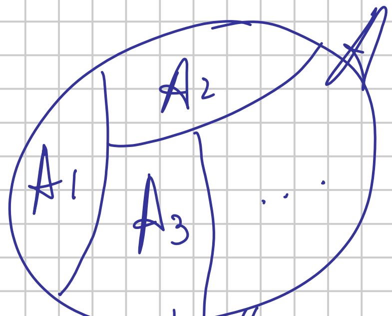
Sei (X,μ,T) ein MDS, $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$.

Def. $B_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(X \setminus A)$ – Punkte, die nie nach A kommen

$B_1 := T^{-1}(A)$ – –"– in einem Schritt –"–



...

$B_n := T^{-n}(A) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A) \right)$ – –"– in n Schritten, aber nicht früher.

...

Def. $A_n := A \cap B_n \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Es gelten:

- $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bis auf eine Nullmenge (Poincare)
- Alle A_n sind paarweise disjunkt.

Def. die Rückkehrzeitfkt $n_A : A \to \mathbb{N}$ durch

$$n_A(x) = n \text{ für } x \in A_n.$$

Frage: Was kann man über n_A sagen?

$\boxed{\text{Lemma 2.4}}$ Sei (X, μ, T) MDS, seien $A, B \in \Sigma_X$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A \cap \left[\bigcap_{j=1}^{k-1} T^{-j}(X \setminus A)\right] \cap T^{-k}(B)\right) + \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A) \cap T^{-n}(B)\right)$$

Beweis $\boxed{n=1}$ $\mu(B) \underset{\mu \text{ ist } T\text{-inv}}{=} \mu(T^{-1}(B)) = \mu(A \cap T^{-1}(B)) + \mu((X \setminus A) \cap T^{-1}(B))$

$\boxed{n=2}$ $\mu(B) = \mu(A \cap T^{-1}(B)) + \mu\Big(\overbrace{T^{-1}((X \setminus A) \cap T^{-1}(B))}^{T^{-1}(X \setminus A) \cap T^{-2}(B)}\Big)$

$$= \mu(A \cap T^{-1}(B)) + \mu(A \cap T^{-1}(X\setminus A) \cap T^{-2}(B))$$

Usw. induktiv. $$+ \mu((X\setminus A) \cap T^{-1}(X\setminus A) \cap T^{-2}(B))$$ $\blacksquare$

Def. die induzierte σ-Algebra und indus. W'Maß auf A:

$$\Sigma_A := \{ B \subset A : B \in \Sigma_X \} = \Sigma_X \cap A \subset \Sigma_X$$

$$\mu_A(B) := \frac{\mu(B)}{\mu(A)} \quad \text{auf } \Sigma_A.$$

Die Rückkehrzeitfkt n_A ist meßbar bzgl. μ_A, da

$$n_A^{-1}(\{k\}) = A_k \in \Sigma_A$$

$\boxed{\text{Th } 2.5}$ Seien (X, μ, T) MDS, $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$. Dann gilt:

$$\int_A n_A \, d\mu_A = \frac{\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n} A)}{\mu(A)}.$$

Erwartungswert von n_A

Insbesondere, wenn $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) = X$ bis auf eine Nullmenge ist, dann gilt

$$\int_A n_A \, d\mu_A = \frac{1}{\mu(A)}$$

Beweis Nimm $B := X$ in Lemma 2.4:

$$1 = \mu(X) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\underbrace{A \cap [\bigcap_{j=1}^{k-1} T^{-j}(X \setminus A)]}_{\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j}) + \mu(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A))$$

$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$ bis auf eine Nullmenge
- Punkte aus A, die erst ab k-ten Schritt nach A kommen

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu(\underbrace{\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j}_{\text{disjunkt}}) + \mu(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) + \mu(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A))$$

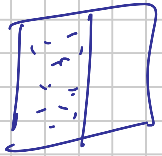
D.h., $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(X) - \mu(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A)) = \mu(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^{-k}(A))$ $\forall n$.

Lasse $n \to \infty$:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(A)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\mu(A_j) \underset{\substack{A \\ \sum\sum}}{=} \sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{k=1}^{j}\mu(A_j)}_{j\cdot\mu(A_j)}$$

$$= \mu(A)\cdot\sum_{j=1}^{\infty} \underset{\substack{=n_A(x) \\ \text{für } x\in A_j}}{j}\cdot\underset{=\mu_A(A_j)}{\boxed{\frac{\mu(A_j)}{\mu(A)}}} = \mu(A)\cdot\int_A n_A \, d\mu_A \qquad \blacksquare$$

Bem. Boltzmann:

$A =$  $\quad \mu(A) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

D.h. der Erwartungswert von $n_A \sim 2^n$, wenn $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) = X$ bis auf eine Nullmenge.

Wann gilt das? (Wann erreicht f. jeder Punkt aus $\underline{X}$ irgendwann A?)

2.2. Ergodizität

Def. 2.6 Sei (X, μ, T) ein MDS. $A \in \Sigma$ heißt invariant unter T, wenn $T^{-1}(A) \subset A$ bis auf eine Nullmenge, d.h.,

$$\mu(A \setminus T^{-1}(A)) = 0.$$

Lemma 5.7 Für ein MDS (X, μ, T) und $A \in \Sigma$ sind äquiv.:

(i) A ist invariant

(ii) $A = T^{-1}(A)$ bis auf Nullm.

(iii) $X \setminus A$ ist invariant.

Beweis (i) ⇒ (ii) folgt aus $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ $T^{-1}(A) = A \Rightarrow T^{-1}(X \setminus A) = X \setminus A$ bis auf Nullm.
bis auf Nullm. Komplement bilden:

$(iii) \Rightarrow (i)$ folgt aus $(i) \Rightarrow (iii)$ für die Menge $X \setminus A$ statt A. ■

Bem. A inv. mit 1 $\mu(A) > 0 \Rightarrow$ Zerlegung in 2 Teilsysteme:
(A, Σ_A, T, μ_A) und $(X \setminus A, \Sigma_{X \setminus A}, T, \mu_{X \setminus A})$.

$\boxed{\text{Def 2.8}}$ Ein MDS (X, μ, T) heißt ergodisch, wenn
A inv. $\Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}$.

Bem. 1) Ergodische Systeme sind „unzerlegbar", eine Art Atome
2) $\exists$ MDS ohne ergodische Teilsysteme:
$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = [0,1]$, μ Leb., $T = id$

$\boxed{\text{Prop. 2.9}}$ Für ein MDS (X,μ,T) sind äquiv.:

(i) (X,μ,T) ist ergodisch

(ii) $\forall A \subset X$ mit $\mu(A)>0$:

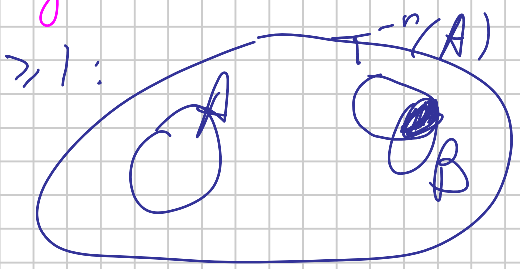
$$\underbrace{\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} T^{-k}(A)}_{\text{Punkte aus } X \text{, die } \infty\text{-oft } A \text{ besuchen.}} = X \quad \text{bis auf eine Nullmenge}$$

(iii) $\forall A \subset X$ mit $\mu(A)>0$

$$\underbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)}_{\text{Punkte aus } X \text{, die } A \text{ irgendwann besuchen}} = X \quad \text{bis auf eine Nullmenge}$$

(iv) $\forall A,B \subset X$ mit $\mu(A),\mu(B)>0$ $\exists n\geq 1$:

$$\mu(T^{-n}(A)\cap B)>0$$



Beweis $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Sei $A\subset X$ mit $\mu(A)$.

Def. $B_n := \bigcup_{k\geq n} T^{-k}(A)$. zz: $\mu(\bigcap_n B_n) = 1$

$$T^{-1}(B_n) = \bigcup_{k \geq n+1} T^{-k}(A) \subset B_n \Rightarrow B_n \text{ ist } T\text{-inv.}$$

Da $\mu(B_n) \geq \mu(A) > 0$, muss $\mu(B_n) = 1$ nach (i) $\forall n$.

Also gilt auch $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 1$

(ii) ⇒ (iii) klar: $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \supset \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(A)$.

(iii) ⇒ (iv) Seien A, B mit $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$. Ang.: $\mu(B \cap T^{-n}(A)) = 0 \quad \forall n$.

Dann ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap T^{-n}(A))$ auch eine Nullmenge.

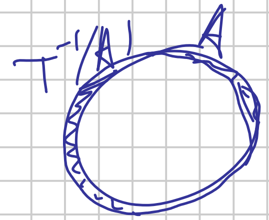
Aber: sie ist gleich

$$B \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right] = B \cap \underbrace{T^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)}_{= X \text{ bis auf eine Nullm nach (iii)}}\Big)}_{\mu = 1}$$

$\Rightarrow \mu(B) = 0$ ↯

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$ Sei A inv., d.h., $T^{-1}(A) \subset A$ bis auf eine Nullmenge.

Dann ist auch $T^{-n}(A) \subset A$ bis auf Nullm.



Betrachte $B := X \setminus A$.

$$B \cap T^{-n}(A) \subset B \cap (A \cup \underset{\text{Nullmenge}}{N}) = \underbrace{(B \cap A)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(B \cap N)}_{\text{Nullmenge}} - \text{Nullmenge}$$

d.h., $\mu(B \cap T^{-n}(A)) = 0 \;\forall n$

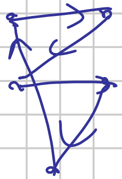
Nach (iv) muss $\mu(A) = 0$ oder $\underbrace{\mu(B) = 0}_{\mu(A) = 1}$ sein. ■

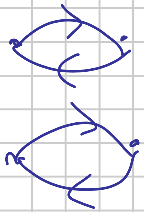
$\boxed{\text{Bsp } 2.10}$ 1) Endliche Systeme: X endlich, μ reskal. Zählmaß, $T: X \to X$ bij (damit MDS).

Dann ist (X, μ, T) erg. $\iff$ ∀ Punkt erreicht anderen Punkt,

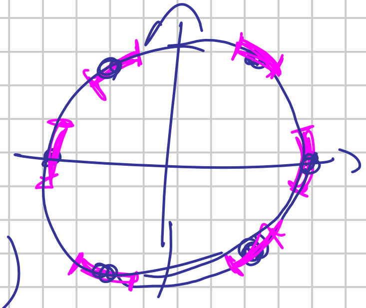
d.h., T ist Perm~~uta~~tion.

$|X|$ - Zykel.





2) Rotation auf $\mathbb{T}$: $(\mathbb{T}, \text{Leb}, a)$



<u>Fall 1</u>: a rational: $a^{n_0} = 1$

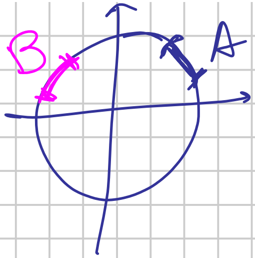
Dann ist die Menge

$$U_\varepsilon(1) \cup U_\varepsilon(a) \cup \ldots \cup U_\varepsilon(a^{n_0 - 1})$$

a-inv. mit Maß $\in (0,1)$, wenn ε klein genug

<u>Fall 2</u> a irrat. Dann ist $\text{Orb}(a) = \{a, Ta, T^2 a, \ldots\}$
$= \{a, a^2, a^3, \ldots\}$

dicht in $\mathbb{T}$.



Seien A, B zwei offene Intervalle.

Seien n_1, n_2: $a^{n_1} \in A$
$a^{n_2} \in B$.

OBdA $n_2 > n_1$. Dann gilt:

$$a^{n_2} \in \underbrace{T^{n_2-n_1}(A) \cap B}_{\text{offenes Intervall}} \neq \emptyset \Rightarrow \mu(T^{n_2-n_1}(A) \cap B) > 0$$

$$\Rightarrow \mu(A \cap T^{-(n_2-n_1)} B) > 0.$$

Wir zeigen später: $(\mathbb{T}, \text{Leb}, a)$ ist tatsächlich ergodisch, und sogar mehr:

$\boxed{\text{Prop. 2.11}}$ Sei (G, a) eine Gruppenrotation. Dann sind äquiv.:

(i) (G, Haar, a) ist ergodisch

(ii) $\text{Orb}\, a = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ ist dicht in G.

Bem. Das Haarmaß μ hat auch die Eigenschaft

$$U \text{ offen}, \neq \emptyset \Rightarrow \mu(U) > 0.$$

Grund: Da G komp., $\exists\, m \in \mathbb{N}$, $g_1, \dots, g_m \in G$:

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} g_j U.$$

Bsp (Bernoullishifts) Wir zeigen, dass $(\{0,\dots,k-1\}^{\mathbb{N}}, \underbrace{\text{Produktmaß}}_{\mu}, \leftarrow)$ und $(\{0,\dots,k-1\}^{\mathbb{Z}}, \underbrace{\text{Produktmaß}}_{\mu}, \leftarrow)$ ergodisch sind, indem wir mehr zeigen:

Prop. 2.12 Sei $(X, \mu, T) = (\{0,\dots,k-1\}^{\mathbb{N}}, \mu, \leftarrow)$ oder $(\{0,\dots,k-1\}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$.

Dann gilt:

$$(*) \quad \mu(T^{-n}(A) \cap B) \longrightarrow \mu(A) \cdot \mu(B) \qquad \forall A, B \in \Sigma$$

Insbesondere sind die B-Shifts ergodisch.

Beweis „Insbesondere ...." folgt aus Prop. 5.9, $(i)\Leftrightarrow(iv)$

zz: $(*)$ gilt.

Schritt 1 Seien A, B Zylindermengen: $0 0 \dots 0 \overset{A_1}{\bullet} 0 0 \dots \overset{A_2}{\bullet} 0 0 \dots 0 \overset{A_k}{\bullet} 0 \dots$

j_1-Stelle $\quad j_2$-Stelle $\quad j_k$-Stelle

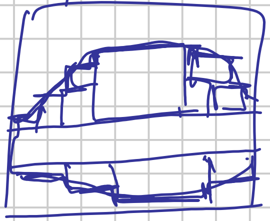
$B = \dots \times \underset{m_1\text{-Stelle}}{B_1} \times \dots \times \underset{m_l\text{-Stelle}}{B_l} \times \dots$

Für $n > m_l$ gilt $T^{-n}A \cap B = \dots B_1 \dots B_l \dots A_1 \dots A_k$ und damit

$$\mu(T^{-n}A \cap B) = \underbrace{\mu(B_1) \cdot \dots \cdot \mu(B_l)}_{\mu(B)} \cdot \underbrace{\mu(A_1) \cdot \dots \cdot \mu(A_k)}_{\mu(A)}$$

Schritt 2 Seien $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, A_j disjunkte Zylinder

$B = \bigcup_{i=1}^{l} B_i \quad B_i$ —"—



Es gilt $T^{-n}(A) \cap B = \bigcup_{i=1}^{\ell} \underbrace{T^{-n}(A)}_{\bigcup_{j=1}^{m} T^{-n}(A_j)} \cap B_i = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{\ell} \underbrace{T^{-n}(A_j) \cap B_i}_{\text{disjunkte Zylinder für große } n}$

Schritt 1 (große n)

$\Rightarrow \mu(T^{-n} A \cap B) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\ell} \mu(T^{-n}(A_j) \cap B_i) \underset{\substack{\text{Schritt 1} \\ \text{(große n)}}}{=} \sum_j \sum_i \mu(A_j) \mu(B_i)$

$= \sum_j \mu(A_j) \cdot \sum_i \mu(B_i) = \mu(A) \cdot \mu(B)$

Schritt 3 Seien A, B meßbar (beliebig) und $\varepsilon > 0$.

Da Zylinder die Produkt-Σ-Alg. erzeugen, $\exists A_1, B_1$ wie im Schritt 2 mit

$\mu(A \triangle A_1) < \varepsilon$

$\mu(B \triangle B_1) < \varepsilon$.

$\Rightarrow \mu(T^{-n}(A) \triangle T^{-n}(A_1)) < \varepsilon \quad \forall n$

Nach Schritt 2 $\exists n_0: \quad \forall n > n_0$

$$T^{-n}A \cap B = \underbrace{T^{-n}(A_1) \cap B_1}_{\substack{\mu \text{ davon} \\ \shortparallel}}$$ bis auf eine Menge mit Maß $\leq 2\varepsilon$

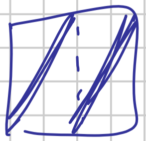
$$\mu(A)\cdot\mu(B) = \mu(A_1)\cdot\mu(B_1)$$ bis auf Fehler $\leq 2\varepsilon$

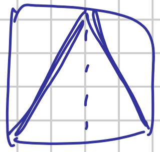
$$\Big(|ab-cd| \leq \underbrace{|a-c|}_{\leq\varepsilon}\cdot\underbrace{|b|}_{\leq 1} + \underbrace{|c|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|b-d|}_{\leq\varepsilon}\Big)$$

$$\Rightarrow \Big|\mu(T^{-n}(A)\cap B) - \mu(A)\cdot\mu(B)\Big| \leq 4\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$ ■

Bem. Die Eigenschaft $(*)$ heißt Mischung (oder starke Mischung) und ist viel mehr als Ergodizität.

Ü Zeigen Sie, dass die Verdoppelungsabb. und die Zeltabb. ergodisch sind.





$\boxed{\text{Th } 2.13}$ (Kac)

Sei (X,μ,T) ergodisch und sei $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$. Die erwartete Rückkehrzeit zu A erfüllt

$$\int_A n_A \, d\mu_A = \frac{1}{\mu(A)}.$$

Beweis Nach Prop. 2.9 gilt $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)$ bis auf eine Nullmenge + Th. 2.5. ■

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Rekurrenz in zufälliger Literatur)

Das Buch von Nietzsche „Also sprach Zarathustra" enthält $\sim$ 680.000 Zeichen. Ang., Snoopy tippt zufällig auf seiner Schreibmaschine. Behauptung: Er tippt Nietzsches Buch ∞-oft mit Wahrscheinlichkeit 1.

Beweis $N := 680.000$ (# Zeichen im Buch)

Schreibmaschine: 90 Zeichen (ang.) $p = \frac{1}{90}$

Betrachte $(X, \mu, T) := \underset{\text{Bernoullishift}}{\underbrace{B(\underbrace{p, \dots, p}_{90 \text{ Mal}})}}$, d.h., $X = \{0, \dots, 89\}^{\mathbb{Z}}$ (oder $\mathbb{N}$)

$T = \leftarrow$, μ Produktmaß

sei Buch $= R_1 \cdots R_N$ – endliches Wort.

$A := \{x_1 = R_1, \dots, x_N = R_N\}$ – Zylinder.

$$\mu[\exists k \in \mathbb{Z} : \underbrace{x_{k+1} = R_1, \dots, x_{k+N} = R_N}_{T^k x \in A}] =$$

$$= \mu\left(\bigcup_k T^{-k}(A)\right) \underset{\text{Bernoullishift ist ergodisch!}}{=} 1 \quad (\text{da } \mu(A) > 0)$$

„∞-oft" entspricht $\mu\left(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(A)\right) = 1$ ∎

Erwartete Wartezeit (Kac): (90) 680.000.

2.3 Der Koopmanoperator und sein Spektrum

Betrachte $p \in [1, \infty)$ und $E := L^p(X, \mu)$.

Der zu einer μ-erh. Transformation T gehörige **Koopmanoperator** ist

$$T : E \to E \quad , \quad (Tf)(x) := f(Tx) \qquad \forall x \; \forall f.$$

Achtung: Derselbe Buchstabe!

T vor x — die Transf.

T vor f — der Operator

Eigenschaften des Koopmanop. auf L^p:

- T lin., isometrisch (insb. kontraktiv: $\|T\|=1$):

$$\|Tf\|_p^p = \int_X |f(Tx)|^p \, d\mu \overset{}{=} \int_X |f(x)|^p \, d\mu = \|f\|_p^p$$

Erinnere: Lemma 1.8: $\int g = \int g \circ T$

Hier: $g(x) := |f(x)|^p$

- $T\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}$, insbesondere: $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$:

$$(T\mathbb{1}_A)(x) = \mathbb{1}_A(Tx) = \begin{cases} 1, & \boxed{Tx \in A} \; x \in T^{-1}(A) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(x)$$

- T ist positiv:

$$f \geq 0 \Rightarrow Tf \geq 0$$

- T ist multiplikativ und respektiert Konjugation:

$$T(f \cdot g) = Tf \cdot Tg, \text{ sobald } f \cdot g \in L^p, \; Tf \cdot Tg \in L^p$$

(z.B. $\forall f, g \in L^\infty(X, \mu)$)

$$T(\bar{f}) = \overline{Tf} \quad \forall f \in L^p$$

- $|Tf| = T|f| \rightsquigarrow$ Verbandshomomorphismus

$$(T|f|)(x) = |f|(Tx) = |f(Tx)| = |Tf|(x)$$

Bem.: $\forall$ Operator auf L^p mit obigen Eigenschaften (≥ 0, mult., isometr., $T|f| = |Tf|$ ...) ist ein Koopmanop., d.h., $\exists$ μ-treue Transf. T dass. (ohne Beweis)

$\boxed{\text{Prop.}}$ Der Koopmanop. ist ~~genau dann~~ invertierbar (und damit unitär für $p=2$), wenn (X, μ, T) invertierbar ist.

Beweis sei (X, μ, T) inv., dann $\exists S: X \to X$ μ-treu:

$$T \circ S = id, \quad S \circ T = id \text{ f.ü.}$$

Behauptung: Der Koopmanop. S ist das inverse von T.

$$(\underbrace{(T \circ S)f}_{T(S(f))})(x) = T(Sf)(x) = (Sf)(Tx) = f(\underbrace{S(Tx)}_{x}) = f(x) \text{ f.ü.}$$

Analog $(S\circ T)f = f$.

Also ist $T: L^p \to L^p$ inv.

Frage: Wie sieht $\sigma(T)$ und $P\sigma(T)$ aus?

Erinnere: • $P\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \underbrace{\lambda - T}_{\lambda \cdot I - T} \text{ ist nicht inj}\}$

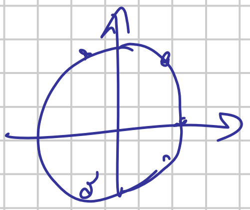
Punktspektrum

$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists f \neq 0 : Tf = \lambda f\}$

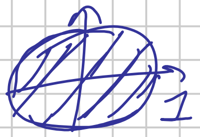
• $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ nicht invert.}\}$

Spektrum $= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ nicht bij}\}$

Erinnerung (Ü): • T isom. $\Rightarrow \forall$ EW $\lambda \in P\sigma(T)$ erfüllt $|\lambda| = 1$



• T isom., inv. $\Rightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{T}$

T isom., nicht inv. $\Rightarrow \sigma(T) =$ 

Außerdem gilt: $1 \in P\sigma(T)$, da $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$ 

Prop. 2.14 Sei (X,μ,T) ein MDS und $T: L^p \to L^p$ der Koopmanop. dazu.

Def.
$$\mathrm{Fix}\,T = \{f \in L^p : Tf = f\}$$

Es sind äquiv.:

(i) (X,μ,T) ist ergodisch

(ii) $\dim \mathrm{Fix}\,T = 1$, d.h., 1 ist ein einfacher Eigenwert mit $\mathrm{Fix}\,T = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$

In diesem Fall hat $\forall$ Eigenf~~kt~~kt von T konstanten Betrag:
$$Tf = \lambda f \Rightarrow |f| = \text{konst.}$$

Beweis „In diesem Fall": ang. (i)$\Leftrightarrow$(ii) und $Tf = \lambda f$.
Wir wissen: $|\lambda| = 1$ (da T isometrisch) und damit
$$T|f| = |Tf| = |\lambda f| = |f| \Rightarrow |f| \in \mathrm{Fix}\,T = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}, \text{ also } |f| = \text{konst.}$$

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Sei $f \in \mathrm{Fix}\, T$, d.h., $f(Tx) = f(x)$ f.ü.

Dann sind $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ auch in $\mathrm{Fix}\, T$, d.h., sei f OBdA reellwertig.

Sei $c \in \mathbb{R}$. Behauptung:

$$A := \{x : f(x) \leq c\}$$

ist T-inv.

$$T^{-1}(A) = \{x : \underbrace{Tx \in A}_{f(Tx) \leq c}\} = \{x : \underbrace{f(Tx)}_{= f(x) \text{ f.ü.}} \leq c\} = A \text{ bis auf eine Nullmenge}$$

T erg. $\Rightarrow$ $\mu(A) = 0$ oder 1 $\underset{\text{(ü)}}{\Rightarrow}$ f konst.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Sei A T-inv., d.h., $T^{-1}(A) = A$ bis auf eine Nullm.

$$\Rightarrow T\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{\underbrace{T^{-1}(A)}_{=A}} = \mathbb{1}_A \Rightarrow \mathbb{1}_A \in \mathrm{Fix}\, T = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$$

$\Rightarrow \mathbb{1}_A = \text{konst}$, also $\equiv 0$ oder $\equiv 1$, d.h., $\mu(A) = 0$ oder 1. ■

Bem. Der Zusatz gilt nicht, wenn $(X, \mu; T)$ nicht erg. (im Allg.)

Bsp. $T = id$: $\mathrm{Fix}\, T = L^p$)

Aber es gilt:

$\boxed{\text{Lemma 2.15}}$ $\forall \lambda \in P_\sigma(T)$ ist $\mathrm{Ker}(\lambda - T) \cap L^\infty(X, \mu)$ dicht in $\mathrm{Ker}(\lambda - T)$ (beschränkte $\underset{\text{Eigenfkten}}{\text{EF}}$ liegen dicht).

Beweis Schritt 1 $f \in \mathrm{Fix}\, T \Rightarrow \mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}} \in \mathrm{Fix}\, T$:

$$\left(T \mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}}\right)(x) = \mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}}(Tx) = \begin{cases} 1 ; & \text{wenn } |\overbrace{f(Tx)}^{f(x) \text{ f.ü.}}| \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}}(x)$$

Schritt 2 Sei $f \in \mathrm{Ker}(\lambda - T)$, d.h., $Tf = \lambda f$. Finde $f_n \to f$, f_n beschr. mit $Tf_n = \lambda f_n$.

Da $\lambda \in \mathbb{T}$, ist $|f| \in \mathrm{Fix}\, T$ $(T|f| = |Tf| = |f|)$

Betrachte $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}}$

- $|f_n| \leq n$
- $Tf_n = \lambda f_n$:

$$T(\overbrace{f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}}}^{f_n}) = \underbrace{Tf}_{\lambda f} \cdot \underbrace{T\mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}}}_{\mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}} \text{ nach Schritt 1, da } |f| \in \text{Fix.}}$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}}}_{f_n}$$

$\boxed{\text{Th 2.16}}$ (Punktspektrum des Koopmanoperators)

Sei (X, μ, T) ein MDS mit Koopmanop. T auf $L^p(X, \mu)$, $p \in [1, \infty)$.

(a) $P_\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ ist eine Vereinigung von Untergruppen von $\mathbb{T}$ und ist unabh. von p.

(b) (X,μ,T) erg. $\Longleftrightarrow$ $\forall \lambda \in P_\sigma(T)$ ist einfach und erzeugt von einer unimodularen Fkt: $\mathrm{Ker}(\lambda - T) = \mathbb{C}\cdot f_\lambda$, $|f_\lambda| = 1$

in diesem Fall ist $P_\sigma(T)$ eine Untergruppe von $\mathbb{T}$.

Beweis Unabh. von p folgt aus Lemma 2.15:

$$\exists \text{ EF in } L^p \Longleftrightarrow \exists \text{ EF in } L^\infty$$

Eigenfunktion

Noch zz: $\lambda \in P_\sigma \Rightarrow \lambda^n \in P_\sigma \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Ang.: $\lambda \in P_\sigma(T) \overset{\text{Lemma 2.15}}{\Longrightarrow} \exists f_\lambda$ beschr. $\neq 0$ mit $T f_\lambda = \lambda \cdot f_\lambda$

Dann gilt: $T(f_\lambda^n) \underset{T \text{ multipl.}}{=} (\underbrace{T f_\lambda}_{\lambda f_\lambda})^n = \lambda^n \cdot f_\lambda^n$ für $n \geq 0$.

$$T(\overline{f_\lambda}^n) = \ldots = \overline{\lambda}^n \cdot \overline{f_\lambda}^n = (\lambda)^{-n} \cdot \overline{f_\lambda}^n$$

(Achtung: $\overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$, wenn $\lambda \in \mathbb{T}$)

b) (X, μ, T) erg. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Fix}\,T = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $\lambda \in P\sigma$ und $f_\lambda \neq 0 \in F$ dazu mit $\|f_\lambda\| = 1$

Dann ist $|f_\lambda| \in \mathrm{Fix}\,T$, d.h., $|f_\lambda| = c\cdot\mathbb{1}$. $\Rightarrow$ $c = 1$ und $|f_\lambda| = \mathbb{1}$

zz: λ ist einfach, d.h., $Tg = \lambda g \Rightarrow g = \underset{\in\mathbb{C}}{a}\cdot f_\lambda$

Sei g mit $Tg = \lambda\cdot g$.

Da $T(\overline{f_\lambda}\cdot g) = \underbrace{\overline{Tf_\lambda}}_{\cancel{\overline{\lambda}\cdot\overline{f_\lambda}}}\cdot\underbrace{Tg}_{\cancel{\lambda\cdot g}} = \overline{f_\lambda}\cdot g$, gilt

$\overline{f_\lambda}\cdot g \in \mathrm{Fix}\,T$, d.h., $\underbrace{\overline{f_\lambda}}_{1/f_\lambda}\cdot g = a\cdot\mathbb{1}$, also: $g = a\cdot f_\lambda$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nimm $\lambda = 1$ und $f_1 = \mathbb{1}$:

$\operatorname{Fix} T = \operatorname{Ker}(1-T) = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$, also T erg.

„In diesem Fall": ZZ: $\lambda\cdot\mu \in P_\sigma(T)$, falls $\lambda,\mu \in P_\sigma$

Betr. $f_\lambda \cdot f_\mu$

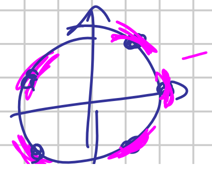
$$T(f_\lambda \cdot f_\mu) = \underbrace{Tf_\lambda}_{\lambda\cdot f_\lambda} \cdot \underbrace{Tf_\mu}_{\mu\cdot f_\mu} = (\lambda\cdot\mu)(f_\lambda \cdot f_\mu)$$

Da f_λ, f_μ unimodular, ist $f_\lambda \cdot f_\mu \neq 0$.

(Hier: $f_\lambda \cdot f_\mu = c\, f_{\lambda\cdot\mu}$, $|c| = 1$) ■

Bsp (Rotation auf $\mathbb{T}$)

Prop 2.17 $(\mathbb{T}, a)$ ist erg. $\Longleftrightarrow$ a irrat., d.h., $a^n \neq 1 \ \forall n \neq 0$.

Beweis $\Longrightarrow$ schon gemacht: a rat. $\Longrightarrow$  – inv. Menge

$\boxed{\Leftarrow}$ Wir zeigen: $\operatorname{Fix} T = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ auf $L^2(\mathbb{T}, \text{Leb})$ – siehe Prop 2.14

Sei $f \in \operatorname{Fix} T$: $Tf = f$, $f \in L^2$

- Die Fkt'en $\chi_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, bilden eine ONB (Orthonormalbasis)
  (Weierstraß: $\{e^{2\pi i n \cdot}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ist eine ONB von $L^2[0,1]$)
- $$(T\chi_n)(z) = \chi_n(az) = (az)^n = a^n \cdot \chi_n(z)$$
  d.h., $\forall \chi_n$ ist EFkt von T zum EW a^n.

Sei $f = \sum_{n=+\infty}^{\infty} c_n \chi_n$ die Fourierdarstellung von f bzgl. (χ_n)

$\|$

$Tf = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n a^n \chi_n$

Eindeutigkeit der F' Koeff.: $c_n = c_n a^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

a irrat. $\forall n \neq 0 \quad a^n \neq 1$, also muss $c_n = 0$

$n = 0$: c_0 beliebig.

Also ist $f = c_0 \cdot \underbrace{\chi_0}_{= \mathbb{1}}$ ■

Bem. Genauso zeigt man:

$(\mathbb{T}^d, \underset{(a_1,\dots,a_d)}{\overset{\shortparallel}{a}})$ erg. $\iff$ $a_1, \dots, a_d$ $\mathbb{Z}$-lin. unabh., d.h.,

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_d^{n_d} = 1 \Rightarrow n_1 = \dots = n_d = 0$$

Für den Beweis braucht man:

$$\chi_{n_1,\dots,n_d}(\underset{(z_1,\dots,z_d)}{\overset{\shortparallel}{z}}) = z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d} \text{ -ONB von } L^2(\mathbb{T}^d)$$

/ ONB: intuition: $f(z_1,\dots,z_d) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} c_{n_1}(z_2,\dots,z_d) z_1^{n_1} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{n_1,n_2}(z_3,\dots,z_d) z_2^{n_2} z_1^{n_1}$

$z_2,\dots,z_d$ fest

$\dots = \sum_{n_1,\dots,n_d} c_{n_1,\dots,n_d} z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}$ /

Bem. Im Beweis von Prop. 2.17 haben wir bewiesen:

Es gilt „=" $\{a^n, n \in \mathbb{Z}\} \subset P_\sigma(T)$ (egal, ob a rat. oder irrat. ist).

<u>Beweis</u> Ang., $Tf = \lambda f$, $\overset{\lambda}{,}f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \lambda \chi_n$ Eindeutigkeit der F'Koe

$$\overset{\parallel}{\lambda f}\quad Tf = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n a^n \chi_n \qquad \lambda c_n = a^n c_n \quad \forall n$$

Wenn $f \neq 0$, $\exists n: c_n \neq 0 \Rightarrow \lambda = a^n$. ∎

<u>Bem.</u> $(\mathbb{T}, a)$ <u>nicht</u> erg., d.h., $a^n = 1$ für ein $n > 0$ (n min.)

Dann ist $\sigma(T) \underset{\text{Warum?}}{=} P_\sigma(T) = \{1, a, \dots, a^{n-1}\}$

und $T = I\big|_{\text{lin}\{\chi_{k\cdot n}, k \in \mathbb{Z}\}} \oplus a \cdot I\big|_{\text{lin}\{\chi_{kn+1}, k \in \mathbb{Z}\}} \oplus \dots \oplus a^{n-1} \cdot I\big|_{\text{lin}\{\chi_{kn+n-1}, k \in \mathbb{Z}\}}$

3. Die klassischen Ergodentheoreme

3.1 Einleitung:

der Cesàro-Limes.

Boltzmannsche Ergodenhypothese:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\underbrace{(T^n f)(x)}_{f(T^n x)} \longrightarrow \int f \, d\mu$$

Frag: Wie kann man nicht konv. Folgen konvergent machen?

z.B. $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

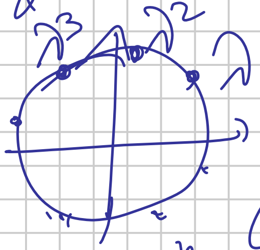
Def Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ beschr. (allgemeiner: $a_n = \overline{o}(n)$)
(a_n) konv. im Cesàro-Sinne gegen a (schreibe: $C\text{-}\lim a_n = a$
oder $a_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} a$), wenn

$$\frac{a_1+\dots+a_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \longrightarrow a .$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\underbrace{0,1,2,}\underbrace{0,1,2,}\dots \longrightarrow 1$

2) (a_n) periodisch mit Periode d $\Rightarrow$ C-lim $a_n = \dfrac{a_1+\dots+a_d}{d}$

3) Sei $\lambda \in \mathbb{T}$.



<u>Behauptung</u>: $\lambda^n \xrightarrow{\text{Ces.}} 0$, wenn $\lambda \neq 1$

<u>Bew.</u> $\displaystyle \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\lambda^n}_{\lambda\cdot\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda}} = \frac{1}{N}\cdot \underbrace{\lambda\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda}}_{\text{beschr.}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ ∎

D.h., $\displaystyle \boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda^n \longrightarrow \begin{cases} 0, & \lambda\neq 1 \\ 1, & \lambda = 1 \end{cases}}$

Eigenschaften des Cesàro-Limes

1) $a_n \to a \Rightarrow a_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} a$

Beweis OBdA $a = 0$ (Warum?)

sei $\varepsilon > 0$ und N_0: $\forall N \geq N_0$ $|a_n| < \varepsilon$

Es gilt $\forall N \geq N_0$

$$\left|\frac{a_1 + \dots + a_N}{N}\right| \leq \left|\frac{\overset{|\cdot| \leq M}{a_1} + \dots + \overset{|\cdot| \leq M}{a_{N_0}}}{N}\right| + \underbrace{\left|\frac{\overset{|\cdot| < \varepsilon}{a_{N_0+1}} + \dots + \overset{|\cdot| < \varepsilon}{a_N}}{N}\right|}_{< \varepsilon \cdot \frac{N - N_0}{N} < \varepsilon}$$

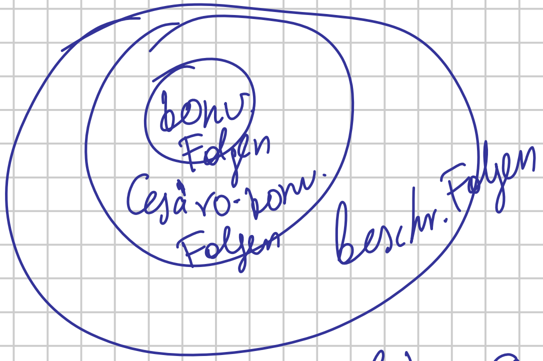
$$\leq \underbrace{\frac{M \cdot N_0}{N}}_{N \to \infty \to 0} + \varepsilon < 2 \cdot \varepsilon \text{ für } \forall N \geq N_1$$

für ein N_1. ∎

2) $\exists (a_n)$ beschr., nicht Cesàro konv.:

$0, 1, 1 \dots, 1, 0, 0, \dots \quad \dots, 0, 1 \dots \quad \dots 1 \dots$ (Ü)

D.h.,



3) $C\text{-}\lim a_{n+1} = C\text{-}\lim a_n$ (Shiftinvarianz)

$$\left|\frac{\cancel{a_2+\dots+} a_{n+1}}{n} - \frac{a_1+\cancel{\dots+a_n}}{n}\right| = \frac{|a_{n+1}-a_1|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

da (a_n) beschr.

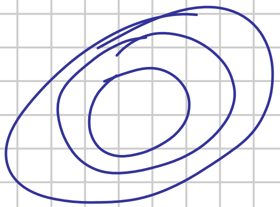
4) **Achtung**: $C\text{-}\lim a_n \cdot C\text{-}\lim b_n \neq C\text{-}\lim(a_n \cdot b_n)$ im Allg.!

Grund: Shiftinv.: $a_n: 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \dots \xrightarrow{Ces.} 1/2$

$b_n: 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \dots \xrightarrow{Ces.} 1/2$

$a_n \cdot b_n = 0 \not\to 1/4$

Bem. 1) $a_n \xrightarrow{Ces.} a \Leftrightarrow S_n = \frac{a_1+\dots a_n}{n} \longrightarrow a$. Man kann C-C-lim (oder C_2-Lim) def.: $s_n \xrightarrow{\text{Ces}} a$ usw.:



$\{C_n\text{-konv. Folgen}\} \supsetneq \{C_{n-1}\text{-konv. Folgen}\}$, aber

$\bigcup \{C_n\text{-konv. Folgen}\} \subsetneq \ell^\infty$, d.h., ∃ beschr. Folgen, die in keinem der Cesàro-Sinne konv.

2) Genauso def. man Cesàro-Konv. in einem Banachraum für die starke/schwache Topologie:

$$f_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} f \iff s_n = \frac{f_1+\dots+f_n}{n} \longrightarrow f$$

stark oder schwach. Genauso für Operatoren:

$T_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} T$ in der Norm-, starken und schwachen Operatortop. $\iff \frac{T_1+\dots+T_n}{n} \longrightarrow T$ in der Top.

3.2 Von Neumanns Mittelergodensatz

Sei (X,μ,T) ein MDS. Def. $S_N f := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f$ für $f \in L^1(X,\mu)$. Betrachte $H := L^2(X,\mu)$ – Hilbertraum.

$\boxed{\text{Th. 3.1}}$ (Von Neumann) Sei (X,μ,T) ein MDS und $f \in L^2(X,\mu)$. Dann

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f \longrightarrow Pf$$

in L^2, wobei P die Orthog. Projektion auf $\mathrm{Fix}\,T \subset L^2(X,\mu)$ ist.

Bem. Thm. 3.1 heißt der Mittelergodensatz, „Mittel" wegen L^2-konv. (nicht wegen Cesàro konv.)

Beweis Schritt 1: Orthogonale zerlegung:

Wir zeigen: $H = \mathrm{Fix}\,T \overset{!}{\oplus} \overline{\mathrm{Bild}(I-T)}$

1) $\mathrm{Fix}\,T \perp \overline{\mathrm{Bild}(I-T)}$:

Sei $f \in \mathrm{Fix}\,T$, d.h., $Tf = f$.

Zz: $f \perp g - Tg \quad \forall g$.

$$\langle f, g - Tg\rangle = \langle f, g\rangle - \underbrace{\langle \underset{Tf}{\underset{\|}{f}}, Tg\rangle}_{= \langle Tf, Tg\rangle} \overset{T \text{ isom.}}{=} \langle f, g\rangle - \langle f, g\rangle = 0.$$

2) Sei $f \perp \mathrm{Bild}(I-T)$.

z.z.: $f \in \mathrm{Fix}\,T$

insbes. gilt: $f \perp (f - Tf)$:

$$0 = \langle f, f - Tf\rangle = \|f\|^2 - \langle f, Tf\rangle, \text{ d.h.,}$$

$$\langle f, Tf\rangle = \|f\|^2$$

„=" in Cauchy-Schwarz: $Tf = c \cdot f$

$$\|f\|^2 = \langle f, \underbrace{Tf}_{c\cdot f} \rangle = \bar{c} \cdot \|f\|^2$$

$\Rightarrow f = 0$ oder $c = 1$, also $f \in \mathrm{Fix}\,T$

Schritt 2: Konvergenz:

sei $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \mathrm{Fix}\,T$, $f_2 \in \overline{\mathrm{Bild}\,(I-T)}$

Zz: $S_n f \to f_1$, d.h., $S_n \to I$ auf $\mathrm{Fix}\,T$

$S_n \to 0$ auf $\overline{\mathrm{Bild}\,(I-T)}$

1) $f \in \mathrm{Fix}\,T \Rightarrow S_n f = f \to f$, d.h.,

$$S_n\big|_{\mathrm{Fix}\,T} = I$$

2) $f = g - Tg \in \mathrm{Bild}\,(I-T)$. Dann gilt:

$$S_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(T^n g - T^{n+1} g\right) = \frac{\boxed{T^{N+1} g - Tg}}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Teleskopsumme

$\|\cdot\|_2 \leq 2 \cdot \|g\|_2$

Also gilt: $\begin{cases} S_N \to 0 \text{ auf } \mathrm{Bild}\,(I-T) \\ \|S_N\| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|T^n\| \leq 1 \end{cases}$ (sogar $=1$, da $S_N \mathbb{1} = \mathbb{1}$)

$\Rightarrow S_N \to 0$ auf $\overline{\text{Bild}\,(I-T)}$

(FA: konv. auf Y ⇔ kom. auf einer dichten Teilmenge aus Y, wenn Operatoren gleichm. beschr. sind)

Bem. Von Neumanns Ergodensatz gilt ∀ Kontraktion T auf einem Hilbertraum H (und sogar auf einem reflex. Raum, wenn man P entsprechend definiert)

$\boxed{\text{Def.}}$ Die Projektion P heißt die mittelergodische Projektion von T

Bem. P erfüllt:

1) $\int Pf \, d\mu = \int f \, d\mu$:

$$\int S_N f \, d\mu = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int T^n f \, d\mu}_{} = \int f \, d\mu$$

$N \to \infty$: $\int Pf \, d\mu = \int f \, d\mu$. $= \int f \, d\mu$, da T isom.

2) $P(f\cdot Pg) = Pf\cdot Pg$:

$$S_N(f\cdot Pg) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{T^n(f\cdot Pg)}_{\substack{T^nf\cdot \cancel{T^n}Pg \\ (Pg\in \mathrm{Fix}\,T)}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^nf\cdot Pg = S_Nf\cdot Pg$$

$$S_N(f\cdot Pg) \xrightarrow{N\to\infty} P(f\cdot Pg) \qquad S_Nf\cdot Pg \longrightarrow Pf\cdot Pg.$$

3) $Pf = \mathbb{E}(f\,|\,\Sigma')$ – Erwartungswert von f bzgl.:

$\Sigma' := \{A\in\Sigma : A \text{ ist } T\text{-inv.}\}\subset\Sigma$.

die Unter-σ-Alg. von inv. Mengen.

ü Erinnere: $\forall f\in L^1(\Sigma)\ \exists!\, g\in L^1(\Sigma')$ mit

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu \quad \forall A\in\Sigma',$$

dieses g ist der Erwartungswert.

Prüfe: $g = Pf$ passt.

Lösung: $\int_A T^nf = \int_X \underset{=T^n\mathbb{1}_A,\ \text{da } A\ T\text{-inv.}}{\mathbb{1}_A}\cdot T^nf = \int_X T^n(\mathbb{1}_A\cdot f) = \int_A f$ ……

Charakterisierung der Ergodizität:

$\boxed{\text{Thm. 3.2}}$ Sei (X,μ,T) ein MDS mit Koopmanop. T auf L^2 und m-erg. Projektion P. Es sind äq.:

(i) (X,μ,T) ist ergodisch.

(ii) $\dim \operatorname{Fix} T = 1$, d.h., $\operatorname{Fix} T = \mathbb{C}\cdot \mathbb{1}$

(iii) $\dim(\operatorname{Fix} T \cap L^\infty) = 1$

(iv) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f \xrightarrow{\text{in } L^2} \int f\,d\mu \cdot \mathbb{1}$, d.h.,

$$Pf = \int f\,d\mu \cdot \mathbb{1} \qquad \forall f,g \in L^2$$

(v) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle T^n f, g\rangle \longrightarrow \int f\,d\mu \cdot \int \overline{g}\,d\mu$

(vi) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(A\cap T^{-n}B) \longrightarrow \mu(A)\mu(B) \qquad \forall A,B\in\Sigma$.

(vii) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(A\cap T^{-n}A) \longrightarrow \mu(A)^2 \qquad \forall A\in\Sigma$.

Bem. (vi) besagt, dass $T^{-n}(B)$ im Mittel überall mit der Zeit mit gleicher W'keit erscheint.

Beweis (i) ⇔ (ii) ⇔ (iii) – siehe oben.

Wir zeigen: (ii) ⇒ (iv) ⇒ (v) ⇒ (vi) ⇒ (vii) ⇒ (i)

(ii) ⇒ (iv) Wir wissen: $Pf \in \mathrm{Fix}\, T$, d.h., $Pf = c \cdot 1\!\!1$

Da $\int Pf = \int f$, muss $c = \int f$ gelten.

Konvergenz: Von Neumann.

(iv) ⇒ (v) klar: $\langle \cdot , g \rangle$

(v) ⇒ (vi) Seien $A, B \in \Sigma$, def. $f := 1\!\!1_B$, $g := 1\!\!1_A$

$$\langle \underset{1\!\!1_{T^{-n}(B)}}{\boxed{T^n f}}, g \rangle = \int_X \underbrace{1\!\!1_{T^{-n}(B)} \cdot 1\!\!1_A}_{= 1\!\!1_{A \cap T^{-n} B}} d\mu = \mu(A \cap T^{-n} B)$$

Cesàro (v) ↙

$$\int f \, d\mu \cdot \int \bar{g} \, d\mu = \mu(B) \cdot \mu(A)$$

$\boxed{(vi) \Rightarrow (vii)}$ trivial

$\boxed{(vii) \Rightarrow (i)}$ Sei $A \in \Sigma$ T-inv. zz.: $\mu(A) \in \{0,1\}$

Nach (vii)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mu(A \cap \underbrace{T^{-n}A}_{A \text{ bis auf Nullm}})} = \mu(A) \longrightarrow \mu(A)^2,$$

also gilt $\mu(A) = \overset{\mu(A)}{\mu(A)^2}$, d.h., $\mu(A) \in \{0,1\} \Rightarrow T$ ist erg. ∎

Bem. (iv) ist eine Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen: Sei $f \in L^2$. Def. $X_n := T^n f$ – Zufallsvariablen auf (X,μ) mit $\int X_n = \int T^n f = \int f$ $\forall n$. Dann gilt für ergodische Systeme:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{L^2} \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1}$$

3.3. Birkhoffscher Ergodensatz: die Formulierung

Th. 3.3 (Birkhoff) Sei (X,μ,T) ein MDS, $f \in L^1(X,\mu)$. Dann konv.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(T^n f)(x)$$

für f. a. x (gegen $(Pf)(x)$)

Bem.: Th. 3.3 heißt individueller (oder Punktweiser) Ergodensatz (hier: stärkere Konvergenz!)

Kor. 3.4 Ein MDS (X,μ,T) ist ergodisch $\Longleftrightarrow$ $\forall f \in L^1$ gilt „Zeitmittel = Raummittel",
d. h.:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (T^n f)(x) = \int f \, d\mu$$

für fast alle $x \in X$

Beweis $\Rightarrow$ Birkhoff + $\operatorname{Fix} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$:

$$Pf = c \cdot \mathbb{1}, \quad c = \int Pf = \int f$$

$\Leftarrow$ Ang., (X, μ, T) nicht erg. Dann $\exists f \in \operatorname{Fix} T$, $f \neq$ konst.

Wir haben:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{(T^n f)}_{= f \text{ f.ü.}}(x) \underset{\text{f.ü.}}{=} f(x) \neq \int f \, d\mu \, \mathbb{1} \quad \lightning \quad ■$$

Bem. D.h., Boltzmannsche Ergodenhypothese gilt nur für ergodische Systeme und nur f.ü.

Beobachtung Auf dem dichten TR

$$D := \operatorname{Fix} T \oplus (I - T)(L^\infty(X, \mu)) \subset L^1$$

konv. die Cesàro-Mittel $S_N f := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f$ f.ü. (sogar in $\|\cdot\|_\infty$)

- $f \in \mathrm{Fix}\,T \Rightarrow T^n f = f = S_N f \longrightarrow f$
- $f = g - Tg$ für $g \in L^\infty$, dann gilt:

$$S_N f = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(T^n g - T^{n+1} g\right) = \frac{T^{N+1} g - Tg}{N}$$

$$\|S_N f\|_\infty \leq \frac{2 \cdot \|g\|_\infty}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

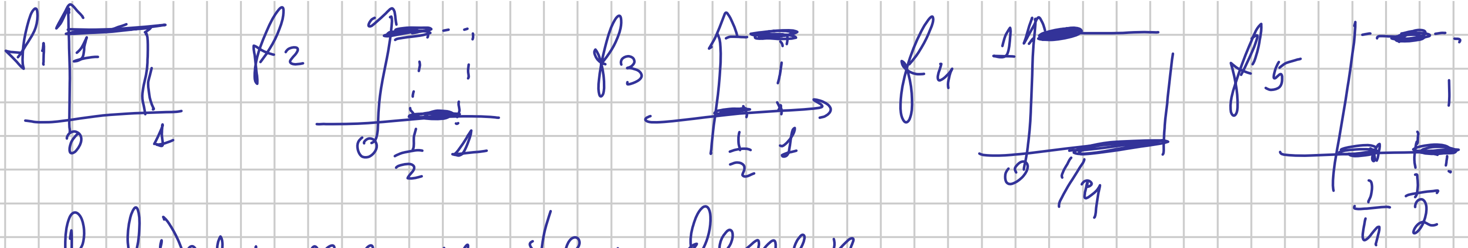
Problem: Wie kommt man von D auf $\overline{D}^{\|\cdot\|_1} = L^1(X,\mu)$?

F.ü. Konvergenz wird von keiner Topologie erzeugt (also kein leichtes Dichtheitsargument).

(Ü) Sei X top. Raum. Dann gilt:

$a_n \longrightarrow a \iff \forall (a_{n_k})$-Teilfolge $\exists$ Teilfolge davon mit $a_{n_k'} \longrightarrow a$.

Gegenbsp: ü



Idee: Finde Bedingungen, unter denen die Menge $F := \{f \in L^1 : (S_n f) \text{ konv. f. ü}\}$ abgeschlossen in L^1 ist. Da $D \subset F$ dicht, gilt dann $F = L^1$.

3.4 Maximale Ungleichung und Banachsches Prinzip

Sei (X, μ, T) ein MDS mit Koopmanop. T auf L^1

Def.
$$S_n := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n$$
und
$$S^* f := \sup_n |S_n f|$$

$$S^*: L^1 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{meßbare Fkt'en} \\ \text{mit Werten in } \mathbb{R}\cup\{\infty\} \end{array} \right\}$$

Maximaloperator ~~von~~ von (X, μ, T).

Man kann den Maximaloperator für eine beliebige Folge von Operatoren (T_n) auf L^1 def.:

$$T^* f := \sup_n |T_n f|$$

Eigenschaften von T^*

- $T^* f \geq 0 \quad \forall f$
- $T^*(\alpha f) = |\alpha| \cdot T^* f \quad \forall f \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
- $T^*(f+g) \leq T^* f + T^* g$ – Subadditivität.

Def Eine Folge von Operatoren (T_n) auf L^1 erfüllt eine maximale Ungleichung, wenn

$$\mu(\{x : (T^* f)(x) > \lambda\}) \le c(\lambda) \quad \forall \lambda > 0,\ \forall f \in L^1 \text{ mit } \|f\| \le 1$$

für eine Fkt $c : (0,\infty) \to [0,\infty)$ mit

$$\lim_{\lambda \to \infty} c(\lambda) = 0$$

$\boxed{\text{Th 3.5}}$ (Banachsches Prinzip)

Sei (T_n) eine Folge von lin. beschr. Operatoren auf $L^1(X,\mu)$ für einen W'Raum (X,μ). Wenn der zugeh. Max'Operator T^* eine max. Ungl. erfüllt, ist die Menge

$$F := \{ f \in L^1 : (T_n f) \text{ konv. f.ü.} \}$$

ein abgeschlossener Teilraum von L^1.

Beweis: Teilraum - klar. z.z.: abg.

Sei $f \in \overline{F}$. Wir zeigen: $(T_n f)$ ist eine f.ü. Cauchyfolge, d.h.

$$h := \overline{\lim_{k,l\to\infty}} |T_k f - T_l f| = 0 \quad \text{f.ü.}$$

Sei $g \in F$. Es gilt:

$$|T_k f - T_l f| \le |T_k(f-g)| + |T_k g - T_l g| + |T_l(g-f)|$$
$$\le 2T^*(f-g) + |T_k g - T_l g| .$$

Daraus folgt:
$$h = \overline{\lim_{k,l\to\infty}} |T_k f - T_l f| \le 2T^*(f-g) + \underbrace{\overline{\lim_{k,l\to\infty}} |T_k g - T_l g|}_{=0,\ \text{da } g \in F} \le 2T^*(f-g)$$

Sei $\lambda > 0$ fest. Wir haben:

$$\mu[h > 2\lambda] \le \mu[T^*(f-g) > \lambda] \overset{\text{Max. Ungl.}}{\le} c\left(\frac{\lambda}{\|f-g\|}\right) \xrightarrow[g\to f,\ g\in F]{} 0 .$$

D.h., $\mu\{h>2\lambda\}=0 \quad \forall \lambda>0$, d.h., $h=0$ f.ü. ■

3.5. Maximaler Ergodensatz und Ende des Beweises des Birkhoff-E Theorems

Für Birkhoff reicht es zz.: die Operatoren

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^n$$

erfüllen eine max ungleichun.

Bemerkung: $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} a_n$ konv. $\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n$ konv

Grund: $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} a_n \sim \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_n \sim \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1} a_n$.

$\boxed{\text{Th. 3.6}}$ (Maximaler Ergodensatz)

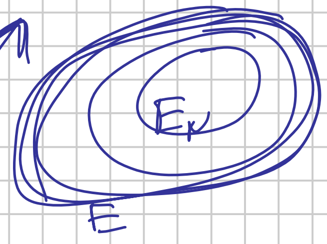
Sei (X,μ,T) ein MDS, $f \in L^1(X,\mu)$ reellwertig. Dann gilt $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\left\{ x:\, f(x)+\ldots+(T^n f)(x) > 0 \text{ für ein } n \leq N \right\}} f(x)\, d\mu \geq 0 .$$

Insbesondere gilt:

$$\int_{\left\{ x:\, f(x)+\ldots+(T^n f)(x) > 0 \text{ für ein } n \right\}} f(x)\, d\mu \geq 0 .$$

<u>Beweis</u> „Insbesondere" folgt aus der Tatsache, dass die Mengen $E_N := \left\{ x:\, f(x)+\ldots+(T^n f)(x) > 0 \text{ für ein } n \leq N \right\} \nearrow$



(ii) Sei $N \in \mathbb{N}$ und def.

$f_0 := 0$

$f_1 := f$

$\vdots$

$f_n := f + Tf + \dots + T^{n-1} f,$

$F_N := \max\{f_0, f_1, \dots, f_N\}$

Wir haben:

- $F_N \geqslant 0$
- $F_N \geqslant f_n \quad \forall n = 0, \dots, N.$