Notiztitel

Ergodentheorie I

WS 16/17

11.10.2016

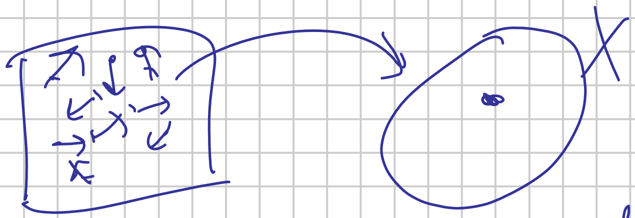
0. Was ist Ergodentheorie?

Geburt: ~1880, Boltzmann

Ursprung: Statistische Mechanik

Gegeben: Raum in $\mathbb{R}^3$, ideales Gas: k Teilchen

$3k$ Koordinaten + $3k$ Geschwind. = Punkt in $\mathbb{R}^{6k}$



D.h., der Zustand des Systems = Punkt in $\mathbb{R}^{6k}$

Nicht alle Zustände möglich

Sei $X := \{$alle möglichen Zustände des Systems$\}$

ist leichter zu überprüfen

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $T^n x \in A$? Wie oft besucht $T^n x$ A?

$\bigcirc A$

<u>Boltzmannsche Ergodenhypothese</u>: Die Zeit, die der Orbit von x in $A \subset X$ verbringt, ist im Mittel und asymptotisch gleich $\mathrm{Vol}(A)$ normiertes Volumen

„Zeitmittel = Raummittel"

Mathematisch:
$$\frac{\#\{n \in \{1,\dots,N\} : T^n x \in A\}}{N} \longrightarrow \mathrm{Vol}(A)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_A(T^n x) \longrightarrow \int \mathbb{1}_A \, d\mu \qquad (\mu = \mathrm{Vol})$$

Bem. Ursprung von „Ergoden" nicht klar:

- ergodos = schwierig
- ergon = Arbeit, odos = Weg

Einschub: Maßtheorie

Wir betrachten reguläre Maße, wenn X top. Raum ist, d.h.,

$$\forall A \subset \Sigma \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{\text{komp.}}{K} \subset A \subset \underset{\text{offen}}{O} \quad \text{mit}$$

$$\mu(O \setminus A) < \varepsilon, \quad \mu(A \setminus K) < \varepsilon$$

Bem. Borelmaße sind regulär

Konvergenzarten

Def. • $f_n \to f$ f.ü. $(f_n, f : X \to \mathbb{C})$, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für f.a. x

Def. $X := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ – Kartesisches Produkt

Sei Σ von meßbaren Rechtecken/Zylindern erzeugt:

$$R_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}} := \{ X = (X_\alpha)_{\alpha \in I} : X_{\alpha_1} \in A_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n} \in A_{\alpha_n} \}$$

$$\mu(R_{\alpha_1, \dots}) := \mu_{\alpha_1}(A_{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot \mu_{\alpha_n}(A_{\alpha_n})$$

(Bsp: $[0,1]^2$, $\mu(\boxed{}_{\alpha}{}^{\beta}) = \alpha \cdot \beta$)

Satz von Carathéodori: $\exists!$ Erweiterung von μ auf Σ.

(X, Σ, μ) heißt <u>Produktmaßraum</u> von $(X_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$.

<u>Arten von Maßen</u>:

- x heißt <u>Atom</u> von μ, wenn $\mu(\{x\}) > 0$
- μ heißt <u>atomar</u> (oder diskret), wenn $\exists \{x_1, x_2, \dots\}$ Atome : $\mu(X \setminus \{x_1, x_2, \dots\}) = 0$,

$U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\underbrace{O_{\alpha_1},\dots,O_{\alpha_n}}_{\text{offene Mengen}}} := \{ x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} : x_{\alpha_1} \in O_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n} \in O_{\alpha_n} \}$

$\boxed{\text{Satz von Tychonoff}}$ Seien $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ komp. top. Räume (insb. Hausdorff). Dann ist $X := \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ mit der Produkttop. auch kompakt.

(ohne Beweis)

I Maßtheoretische dynamische Systeme

1.1. Definitionen und Beispiele

$\boxed{\text{Def. 1.1}}$ Sei (X, Σ, μ) ein W'Raum (oft schreiben wir (X,μ))
und sei $T: X \to X$ meßbar und μ-treu:

$$\forall A \in \Sigma \quad \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$$

Dann heißt (X, μ, T) <u>maßtheoretisches dynamisches System</u> (MDS)

$\boxed{\text{Bsp. 1.2}}$ (<u>endliche Systeme</u>)

X endliche Menge, μ resk. Zählmaß,
$T: X \to X$ bij. Dann ist (X, μ, T) MDS

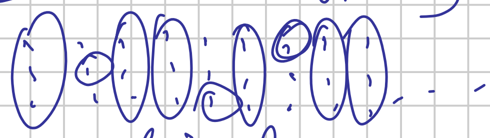
$\boxed{\text{Bsp. 1.3}}$ (<u>Bernoulli-Shifts</u>)

1) <u>Zweiseitiger Shift</u>
Sei $k \in \mathbb{N}$, $X := \{0, \ldots, k-1\}^{\mathbb{Z}}$
$T \leftarrow \quad T((x_j)) := (x_{j+1})$

$\Sigma :=$ Produkt σ-Algebra, erzeugt von Zylindern

$$\mathcal{U}_{n, j_1, \dots, j_n, a_1, \dots, a_n} := \{x : x_{j_1} = a_1, \dots, x_{j_n} = a_n\}$$

Σ ist T-inv., da Zylinder $\overset{T^{-1}}{\longleftrightarrow}$ Zylinder



Sei p ein W'Maß auf $\{0, \dots, k-1\}$, Bezeichne $p_j := p(\{j\})$

Def. $\quad \mu(\mathcal{U}_{n, \dots}) := p_{a_1} \cdot \ldots \cdot p_{a_n}$

und erweitere μ auf Σ. (Satz von Carathéodory)

μ ist das Produktmaß, das zu p gehört.

Es gilt: $\quad \mu(T^{-1}A) = \mu(A) = \mu(TA) \quad \forall A \in \Sigma$, da wahr für Zylinder.

Das MDS (X, Σ, μ, T) heißt

invertierbares (oder zweiseitiges) Bernoullisystem.

2) Einseitiger Shift

$X = \{0, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}$, $T \leftarrow T((x_j)) = (x_{j+1})$

Zylindermengen und μ wie oben

Es gilt: $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, aber i. A. $\neq \mu(TA)$.

Dieses (X, μ, T) heißt einseitiges Bernoullisystem

$\boxed{\text{Bsp 1.4}}$ (Gruppenrotationen)

Seien G eine komp. Gruppe, Σ ihre Borel σ-Alg.

(komp. top. Raum, Gruppe und die Abb.

$\cdot : G \times G \to G$, $^{-1} : G \to G$ sind stetig)

Dann $\exists!$ W'Maß μ auf Σ, das links rotations-invariant ist, d.h.,

$$\mu(a \cdot A) = \mu(A) \quad \forall a \in G \quad \forall A \in \Sigma$$

(ohne Beweis)

Dieses μ heißt Haarmaß auf G.

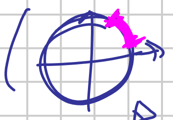
<u>Eigenschaften des Haarmaßes</u> (ohne Beweis)

- μ ist automatisch rechtsinv.; d.h.,
  $$\mu(A a) = \mu(A) \quad \forall \underset{\in G}{a}, A \in \Sigma.$$
- μ ist inv. bzgl. $g \mapsto g^{-1}$, d.h.,
  $$\mu(A^{-1}) = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma,$$
  $A^{-1} = \{g^{-1} : g \in A\}$
- $\operatorname{supp} \mu = G$, d.h., $\forall U \subset G$ offen $\mu(U) > 0$.

Bsp

1) • $[0,1)$ mit $ab := a+b \mod 1$
$\mu := Leb$ ist transl.-inv. $\Rightarrow$ Haar

• $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – der Einheitskreis mit •

$\mu($  $) := \frac{\psi - \varphi}{2\pi}$.

$\mathrm{Arg} \in (\varphi, \psi)$

2) G endliche diskrete Gruppe, $\mu(A) = \frac{|A|}{|G|}$
diskrete Top.
(überprüfen)

Das MDS (G, μ, a) heißt Rotationssystem ($\forall a \in G$)

Achtung: Für ein festes a kann es andere a-inv. W'Maße geben!

Bsp $(\mathbb{T}, a)$ Fall 1 a rational. (d.h., $a^k = 1$ für ein k)

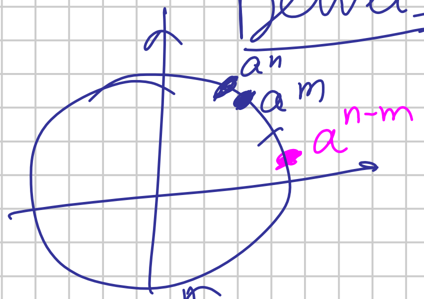
(vi) Beschreibe alle a-inv. Maße auf $\mathbb{T}$

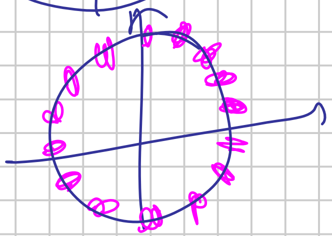
Fall 2 a irrat.

Behauptung: μ ist a-inv. $\Rightarrow$ $\mu = \text{Leb}$.

(a irrat)

Beweis





Beobachtung: a irrat. $\Rightarrow$ $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in $\mathbb{T}$

Beweis der Beobachtung:

a irrat. $\Rightarrow$ $a^n \neq a^m$ $\forall n \neq m$ $\Rightarrow$ $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ist ∞.

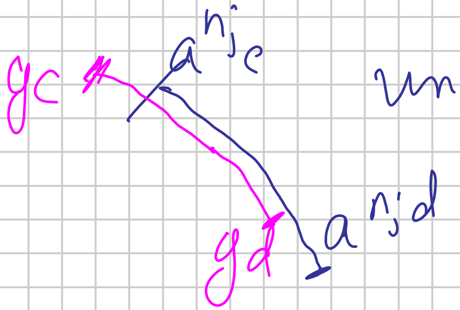
Sei $\varepsilon > 0$. Schubfachprinzip: $\exists n \neq m$ $(n > m)$: $\underbrace{|a^n - a^m| < \varepsilon}_{|a^{n-m} - 1| < \varepsilon}$.

$\{a^{n-m}, a^{2(n-m)}, a^{3(n-m)}, \dots\}$ ist ein ε-Netz von $\mathbb{T}$, d.h. $\forall \lambda \in \mathbb{T}$, $|\lambda - a^{j(n-m)}| < \varepsilon$ für ein ε

Das gilt $\forall \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht

$\blacksquare$ - Beobachtung

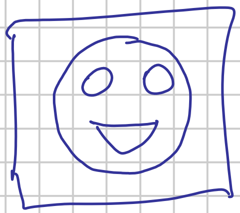
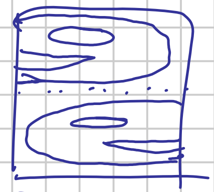
Analog haben wir
$$\mu([a^{n_j}d, gd]) \xrightarrow[n_j \to \infty]{} 0$$



und damit
$$|\mu([a^{n_j}c, a^{n_j}d]) - \mu([gc, gd])| =$$
$$= \mu([a^{n_j}c, gc]) + \mu([a^{n_j}d, gd]) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Bsp 1.5}}$ (Bäcker~~s~~-Transformation)

$X = [0,1]^2$ mit $\mu := \mathrm{Leb}^2$, $T: X \to X$ def. durch
$$T(x,y) := \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}), & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ (2x-1, \frac{y+1}{2}), & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

 $\xrightarrow{(2x, \frac{y}{2})}$  $\xrightarrow{(x-1,\, y+\frac{1}{2}),\ \text{wenn } x \in [1,2]}$ 

maßtreu: □ → ▭

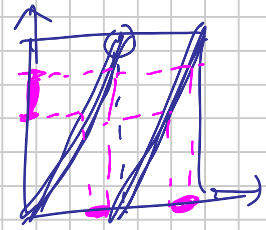
maßtreu

Also ist (X,μ,T) ein MDS.

$\boxed{\text{Bsp. 1.6}}$ (Verdoppelungsabb.)

$X=[0,1]$ mit Leb., $T: X \to X$:

$$Tx = 2x \mod 1 = \begin{cases} 2x, & x \in [0,\frac{1}{2}) \\ 2x-1, & x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$



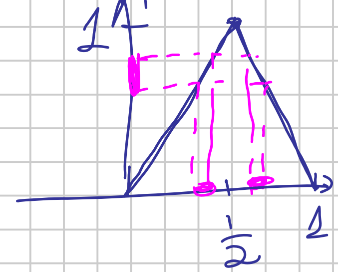
$$\mu(T^{-1}[a,b]) = 2 \cdot \frac{b-a}{2} = b-a$$

(X,μ,T) ist ein MDS.

$\boxed{\text{Bsp. 1.7}}$ (Zeltabbildung)

$X=[0,1]$, mit Leb., $T: X \to X$

$$Tx := \begin{cases} 2x, & x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 2-2x, & x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$



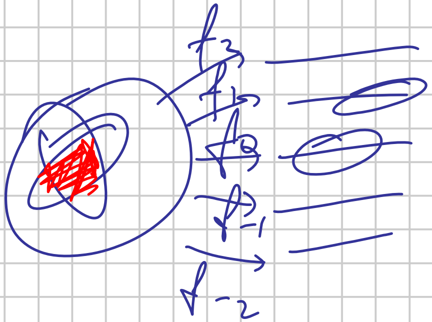
(X,μ,T) ist ein MDS.

$\boxed{\text{Bsp. 1.8}}$ (Stationäre stochastische Prozesse)

Sei (Ω, p) ein W'Raum, $\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar (d.h. Zufallsvariablen).

Ang., der Prozess ist stationär, d.h.

$\forall m \in \mathbb{N} \ \forall n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z} \ \forall B_1, \ldots, B_m \subset \mathbb{R}$ Borel $\forall k \in \mathbb{Z}$



$$p\left\{\omega \in \Omega : \begin{array}{l} f_{n_1}(\omega) \in B_1 \\ \ldots \\ f_{n_m}(\omega) \in B_m \end{array}\right\} = p\left\{\omega \in \Omega : \begin{array}{l} f_{n_1+k}(\omega) \in B_1 \\ \ldots \\ f_{n_m+k}(\omega) \in B_m \end{array}\right\},$$

d.h., $(*)$ $$p\left(\bigcap_{j=1}^{m} f_{n_j}^{-1}(B_j)\right) = p\left(\bigcap_{j=1}^{m} f_{n_j+k}^{-1}(B_j)\right)$$

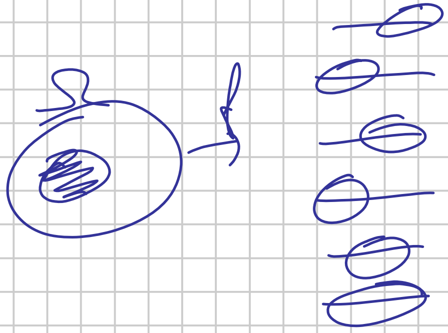
($p(\cap \ldots)$ hängt von Zeit 0 nicht ab)

Seien $X := \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots),\ x_j \in \mathbb{R}\}$ und

$f : \Omega \to X$ mit $f(\omega) := (\ldots, f_{-1}(\omega), f_0(\omega), f_1(\omega), \ldots)$

Für $A \subset X$ Borel def.

$$\mu(A) := P(f^{-1}(A))$$



Betrachte $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mu, T)$ Linksshift ($\downarrow$)

$T((x_j)) := (x_{j+1})$

Da $f^{-1}(\text{Zylinder})$ die Form

$$\bigcap_{j=1}^{m} f_{n_j}^{-1}(B_j)$$

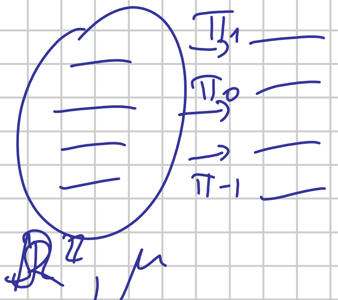
hat, gilt nach (*)

$$\mu(\text{Zylinder}) \underset{\text{Def. von } \mu}{=} P(f^{-1}(\text{Zyl.})) \underset{(*)}{=} P(f^{-1}(\underbrace{T^{-1}(\text{Zyl.})}_{\text{verschob. Zylinder}})) \underset{\text{Def. von } \mu}{=} \mu(T^{-1}(\text{Zyl.})),$$

also ist μ T-inv. und $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$ ist ein MDS.

Umgekehrt, sei $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$ ein MDS d. h., μ sei shift-inv. auf $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Z. z.: $\exists\, (\Omega, p, (f_j))$, die dazu gehören.



Def. $\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $f_j := \pi_j$ — j-te Projektion

$p := \mu$ $\qquad \pi_j : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$

- $\forall\, \pi_j$ ist meßbar, da $\pi_j^{-1}(B)$ ein Zylinder ist, also meßbar.
- Der Prozess ist stationär, da:

$$\mu\left(x : \begin{matrix} x_{n_1} \in B_1 \\ \vdots \\ x_{n_m} \in B_m \end{matrix}\right) \underset{\mu \text{ ist shift-inv.}}{=} \mu\left(x : \begin{matrix} x_{n_1+k} \in B_1 \\ \vdots \\ x_{n_m+k} \in B_m \end{matrix}\right)$$

$\pi_{n_m} x \in B_m$

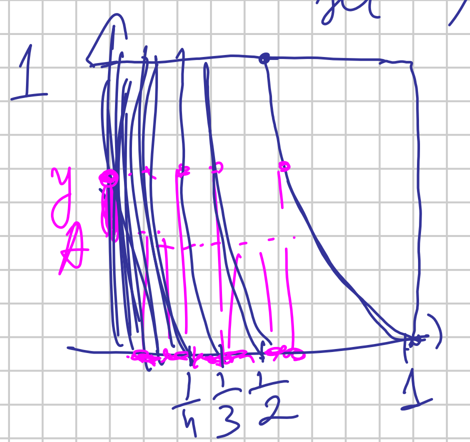
- $\mu(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$ klar, da $\pi = id$, d. h., dieses (Ω, p, π) entspricht $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$.

Wir haben: stat. stoch. Prozesse $\longleftrightarrow$ shiftinv. Maße auf $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

<u>Bem.</u>: Dieselbe Konstruktion kann man auch für $f_0, f_1, \ldots$ wiederholen (Zeit nichtinvert.), mit $X := \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$

$\boxed{\text{Bsp. 4.8}}$ (Gauss-Transformation)

Sei $X := [0,1]$, $\quad Tx := \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = \{ \frac{1}{x} \}$ für $x \neq 0$, $T(0) := 0$.



Für $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ gilt $Tx = \frac{1}{x} - n$

Daraus folgt:

$$T^{-1}(\{y\}) = \left\{ \frac{1}{y+n},\ n \in \mathbb{N} \right\} \quad \forall y \in [0,1)$$

Sei μ: $\mu(A) := \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dx}{x+1}$.

(d.h., $d\mu = \frac{1}{\log 2} \frac{dx}{x+1}$)

μ ist W' Maß: $\mu([0,1]) = \frac{1}{\log 2} \cdot (\log 2 - \cancel{\log 1}) = 1$

<u>Behauptung:</u> T ist μ-treu.

<u>Beweis</u> Es reicht zz: $\mu(T^{-1}[0,b]) = \mu([0,b]) \quad \forall b \in (0,1)$.

$$\log 2 \cdot \mu(T^{-1}[0,b]) = \int_{T^{-1}[0,b]} \frac{dx}{x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{b+n}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\underbrace{\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) - \log\left(1+\tfrac{1}{b+n}\right)}_{\log \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{b+n}} = \log \frac{1+\frac{b}{n}}{1+\frac{b}{n+1}}} \Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1+\frac{b}{n}\right) - \log\left(1+\frac{b}{n+1}\right) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{b}{n+1}}^{\frac{b}{n}} \frac{dx}{1+x} = \int_0^b \frac{dx}{1+x} = \log 2 \cdot \mu([0,b]) \quad \blacksquare$$

Also ist (X, μ, T) ein MDS.

$\boxed{\text{Def}}$ (**Kettenbruchentwicklung**)

Sei $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Schreibe $x = \frac{1}{a_1 + r_1}$, $a_1 \in \mathbb{N}$, $r_1 \in (0,1)$ irrat.

Wiederhole: $r_1 = \frac{1}{a_2 + r_2}$, ..., $x \underset{\text{formal}}{=} \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}$

Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ heißt Folge der **Kettenbruchkoeffizienten**

Man schreibt: $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$

Bombelli (1579)

Euler, Lagrange, ...

Eigenschaften von (a_n)

Def.: $\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}} \in \mathbb{Q}$.

Es gelten:

- $\frac{p_2}{q_2} < \ldots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \ldots \leq x < \ldots < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} < \ldots < \frac{p_1}{q_1}$

und $\frac{p_n}{q_n} \to x$ (d.h. $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \nearrow x$, $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \searrow x$)

- $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$
- $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ ist die beste rat. Appr. mit Nenner $\leq q_n$, d.h., $\forall \frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ mit $q \leq q_n$ gilt:

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|$$

- $\forall (a_n) \subset \mathbb{N} \ \exists \lim \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, d.h.,

$$x \in [0,1) \setminus \mathbb{Q} \xleftrightarrow[\text{bij}]{} (0; a_1, a_2, \dots].$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\pi - 3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \dots}}}$

2) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}} =: \varphi$. Es gilt: $\varphi = \dfrac{1}{1+\varphi} \iff \varphi^2+\varphi-1=0$

$\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ – goldener Schnitt

$\boxed{\text{Prop}}$ Sei $x \in (0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Dann gilt $\forall n$:

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor$$

<u>Beweis</u> Induktion nach n: ZZ: $a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor$, $r_n = T^n x$.

$n=1$: $x = \dfrac{1}{a_1+r_1}$ $\quad r_1 \in (0,1)$

$a_1 + r_1 = \dfrac{1}{x}$ $\quad a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, $r_1 = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$

$n \rightsquigarrow n+1$. $r_n = \dfrac{1}{a_{n+1}+r_{n+1}}$

$\dfrac{1}{r_n} = a_{n+1} + r_{n+1}$ $\quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{r_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^n x} \right\rfloor$, $r_{n+1} = \left\{ \frac{1}{r_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{T^n x} \right\}$

$\boxed{\text{Lemma 1.8}}$ Sei (X,μ) W'Raum, $T: X \to X$ meßbar. $= T^{n+1}x$

Dann ist T μ-treu $\iff$

$$(*) \qquad \int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\mu \qquad \forall f \in L^\infty(X,\mu)$$

In diesem Fall gilt $(*)$ sogar $\forall f \in L^1(X,\mu)$.

Beweis $\Leftarrow$ Sei A meßbar, $f := \mathbb{1}_A$. Dann gilt.

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A \, d\mu \underset{\text{Voraussetz.}}{=} \int \mathbb{1}_A \circ T \, d\mu = \int \underbrace{\mathbb{1}_A(Tx)}_{\begin{cases} 1, & x \in T^{-1}(A) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} d\mu(x)$$

$$= \int \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} \, d\mu = \mu(T^{-1}(A))$$

$\Rightarrow$ + letzte Behauptung („in diesem Fall…")

Wie in $\Leftarrow$ gilt $(*)$ für alle charakt. Fkt'en

$\Rightarrow$ auch für $\forall$ einfachen Fkt'en

Sei $f \in L^1$, OBdA $f \geq 0$. Dann $\exists\, (f_n)$ von einfachen Fkt'en: $f_n \nearrow f$ f.ü. und damit:

$$\int f_n(Tx)\,d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \forall f_n \text{ einfach}}}{=} \int f_n(x)\,d\mu \longrightarrow \int f\,d\mu$$

$$\int f_n(Tx)\,d\mu \longrightarrow \int f(Tx)\,d\mu \qquad \blacksquare$$

Bem. Wir haben insb. $\mathbb{1}_A(Tx) = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(x)$ bewiesen.

1.2 Grundkonstruktionen

$\boxed{\text{Def } 1.9}$ (Faktoren, Erweiterungen und Isomorphismen)

Seien (X,μ,T), (Y,ν,S) zwei MDS.

1) (Y, ν, S) heißt **Faktor** von (X, μ, T) (und (X, μ, T) heißt **Erweiterung** von (Y, ν, S)), wenn:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "S"] & Y \end{tikzcd}$$

$\exists \varphi : X \to Y$ maßtreu ($\mu(\varphi^{-1}(A)) = \nu(A)$ $\forall$ meßb. A),

$\nu(\varphi(X)) = 1$ („fast surj.") und

$\varphi(Tx) = S(\varphi(x))$ für f.a. x

2) (X, μ, T) und (Y, ν, S) heißen **isomorph**, wenn φ oben **invertierbar** gewählt werden kann, d.h., $\exists \psi : Y \to X$ meßbar: $\varphi \circ \psi = id_Y$, $\psi \circ \varphi = id_X$ f.ü.

Bem.: Man kann „fast überall" weglassen, indem man 1) und 2) so formuliert:

$1^*)$ $\exists X' \subset X : \mu(X') = 1$, $TX' \subset X'$

$\exists\, Y' \subset Y:\ \nu(Y')=1,\ SY' \subset Y'$

$\exists\, \varphi: X' \to Y'$ maßtreu, surj mit

$$\varphi(Tx) = S(\varphi x) \quad \forall x \in X'.$$

2*) $\exists\, X' \subset X,\ Y' \subset Y,\ \mu(X') = \nu(Y') = 1,\ TX' \subset X',\ SY' \subset Y'$

$\exists\, \varphi: X' \to Y'$ maßtreu, bij mit

$$\varphi(Tx) = S(\varphi x) \quad \forall x \in X' \qquad (\text{hier } \psi := \varphi^{-1})$$

<u>Beweis</u> klar: $1^*) \Rightarrow 1)$, $2^*) \Rightarrow 2)$

$1) \Rightarrow 1^*)$ Sei φ wie in 1) und def. X_1: $\forall x \in X_1\ \ \varphi(Tx) = S(\varphi x)$ $(\mu(X_1)=1)$

Def.

$$X' := \left(X_1 \cap TX_1 \cap T^2 X_1 \cap \ldots\right) \cap T^{-1}(X_1) \cap T^{-2}(X_1) \ldots$$

- $TX' \subset X'$
- $\mu(X') = 1$, da $\mu(T^j X_1) \underset{T\ \mu\text{-treu}}{=} \mu(\underbrace{T^{-j}(T^j X_1)}_{\supset X_1}) \geq \mu(X_1) = 1$

Def. weiterhin $Y' := \varphi(X')$ $\forall j$.

- $\nu(Y') = 1$ (da $\nu(Y') \geq \mu(X')$ wie oben da φ maßerhaltend)
- $S(Y') = S(\varphi(X')) = \varphi(\underbrace{T(X')}_{\subset X'}) \subset \varphi(X') = Y'$

Also gilt $1^*)$

Analog: $2) \Rightarrow 2^*$ ✓ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp } 1.10}$ Sei $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, $\mu := \prod_{n=0}^{\infty} \underbrace{(1/2, 1/2)}_{\text{d.h.: } \mu(\{0\}) = \frac{1}{2},\ \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}}$.

$T: X \to X \Leftarrow T(x_0, x_1, \ldots) := (x_1, x_2, \ldots)$

Dann ist (X, μ, T) ein MDS (T^{-1}(Zylinder) = Zylinder mit gleichem Maß)

Sei weiterhin $Y := [0,1]$ mit $\nu = \text{Leb}$.

$\varphi: \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \to [0,1]$ mit

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} & \xrightarrow{T} & \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ [0,1) & \xrightarrow{?} & [0,1] \end{array}$$

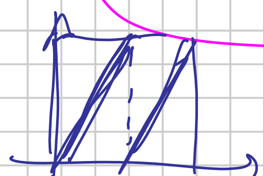
$$\Phi(x_0, x_1, \dots) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$$

Finde S s.d. $(X, \mu, T) \overset{\text{isom. mittels } \Phi}{\cong} (Y, \nu, S)$

$$S\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}\right) = S(\Phi(x)) \underset{\Phi \text{ isom.}}{=} \Phi(Tx) = \Phi(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$$

D.h., $Sy = 2y \mod 1$



Φ entspricht der Binärdarstellung von $x \in [0,1]$, ist also eine Bijektion zwischen $X \setminus \{\text{ab irgendwann konstante Folgen}\} =: X'$ und $Y' := [0,1] \setminus \{\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{N}_0\}$

Dazu ist φ μ-ν-treu:

φ^{-1}(dyad. Intervall) = Zylinder mit gleichem Maß:

$\mu(\varphi^{-1}([0,\tfrac{1}{2})))=\tfrac{1}{2}=\mu(\varphi^{-1}([\tfrac{1}{2},1))$ usw. ... $\mathfrak{U}$.

Also sind (X,μ,T) und (Y,ν,S) isom.

$\boxed{\text{Def 1.11}}$ (Produkte) Seien (X,μ,T), (Y,ν,S) MDS.

Das Produktsystem ist $(X\times Y,\ \mu\times\nu,\ T\times S)$, wobei

- $(T\times S)(x,y)=(Tx,Sy)$
- Σ-Algebra auf $X\times Y$ ist erzeugt von $\underset{\Sigma_X}{A}\times\underset{\Sigma_Y}{B}$
- $(\mu\times\nu)(A\times B):=\mu(A)\nu(B)$, dann erweitert auf Σ

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathbb{T}^d$, $T(x_1,\dots,x_d)=(a_1x_1,\dots,a_dx_d)$

$\boxed{\text{Def. 1.12}}$ (Schiefprodukte)

Sei (X, μ, T) ein MDS, (Y, ν) W'Raum, sei $\varphi : X \times Y \to Y$ meßbar, und für f.a. x ist $\varphi(x, \cdot) : Y \to Y$ ν-treu

(d.h. $\nu(A) = \nu(\{ y \in Y : \varphi(x,y) \in A \})$),

Def. $S : X \times Y \to X \times Y$

$$S(x,y) := (Tx, \varphi(x,y))$$

Behauptung: S ist $\mu \times \nu$-inv.

Beweis

$$(\mu \times \nu)(S^{-1}(A \times B)) = \int_{X \times Y} \underbrace{\mathbb{1}_{S^{-1}(A \times B)}(x,y)}_{\mathbb{1}_{A \times B}(S(x,y))} \, d(\mu \times \nu)$$

$$= \int_{X \times Y} \mathbb{1}_{A \times B}(\underbrace{S(x,y)}_{(Tx, \varphi(x,y))}) \, d(\mu \times \nu)$$

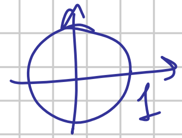
$$= \int_{X\times Y} \mathbb{1}_A(Tx)\cdot \mathbb{1}_B(\varphi(x,y))\, d(\mu\times\nu) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_X \underbrace{\left[\int_Y \mathbb{1}_B(\varphi(x,y))\,d\nu(y)\right]}_{\nu(\{y:\ \varphi(x,y)\in B\}) \underset{\text{Voraussetzung}}{=} \nu(B)} \mathbb{1}_A(Tx)\, d\mu(x)$$

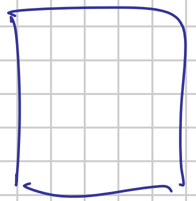
$$= \nu(B) \int_X \mathbb{1}_A(\cancel{T}x)\, d\mu(x) = \mu(A)\cdot\nu(B) = (\mu\times\nu)(A\times B)$$

Lemma

Also ist $(X\times Y, \mu\times\nu, S)$ ein MDS.

Wenn $Y = G$ eine kompakte Gruppe mit ν = Haarmaß ist, $\Phi(x,g) := \varphi(x)\cdot g$ für $\varphi: X \to G$ messbar, dann heißt $(X\times G, S)$ eine Gruppenerweiterung von (X,μ,T).

Bsp $X = Y = \mathbb{T}$, also $X \times Y = \mathbb{T}^2$ 

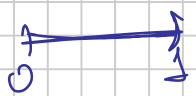
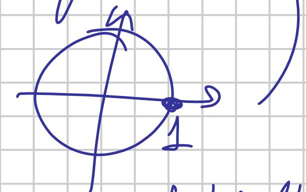


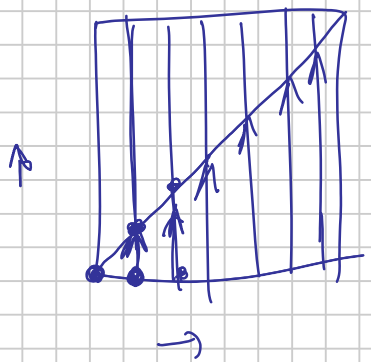
$$S(z,w) = (\lambda \cdot z,\ z \cdot w) \quad \text{- hier ist } \varphi(z) = z$$

Additiv: $[0,1)$ mit Lebesgue und $Tx = x + \alpha \bmod 1$

$$S(x,y) = (x+\alpha,\ x+y)$$

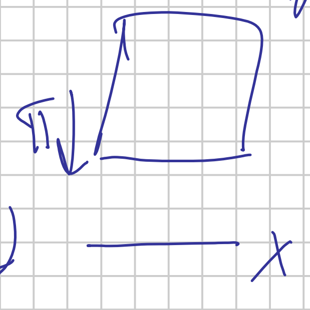
(Ü: $(\mathbb{T}, \cdot\lambda)$ und $([0,1), \text{Lebes.}, +\alpha \bmod 1)$ sind isomorph

(probiere $\varphi : [0,1) \to \mathbb{T}$
$\varphi(x) := e^{2\pi i x}$  )



Bem. (X, μ, T) ist immer ein Faktor des Schiefproduktes,

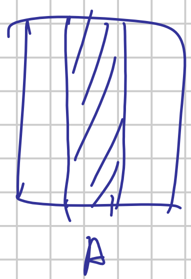
unter: $\pi : X \times Y \to X$, $\pi(x,y) := x$



$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{S} & X \times Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

- π ist maßtreu:

$$(\mu \times \nu)(\pi^{-1}(A)) = \mu(A) \cdot \underbrace{\nu(Y)}_{1} = \mu(A)$$



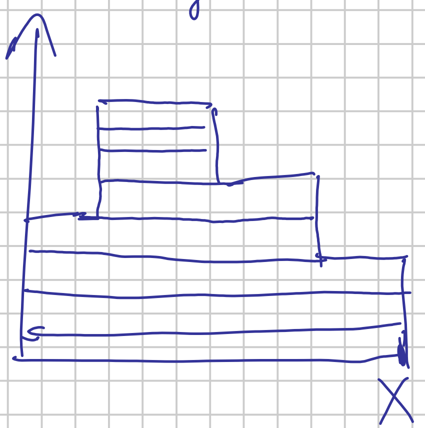
- π surj
- $\pi(S(x,y)) = \pi(Tx, \overset{\text{etwas}}{*}) = Tx = T\pi(x,y)$.

Also ist $(X\times Y, \mu\times\nu, S)$ eine Erweiterung von (X,μ,T).

$\boxed{\text{Bsp + Def. 1.13}}$ (Transformation unter einer Fkt)

Sei (X,μ,T) ein MDS, $f: X \to \mathbb{N}$ einfach, d. h.,

$$f = \sum_{j=1}^{m} n_j \mathbb{1}_{A_j}, \quad A_j \text{ meßbar, disjunkt}$$

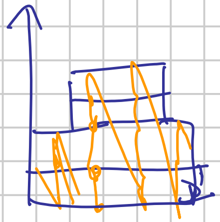


Sei $D := \{(x,n) : x\in X, n \in \{0,\dots,f(x)\}\} \subset X \times \mathbb{N}_0$

mit dem Produktmaß ν mit $\nu(A\times\{n\}) = \mu(A)$ $\forall A \subset A_j, j\in\{0,\dots,n\}$

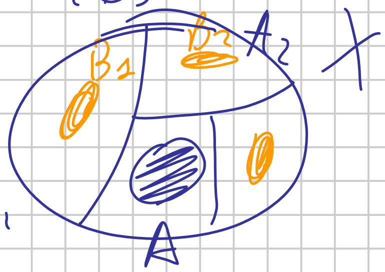
und dann $\nu \to \nu/\nu(D)$ (unnormiert)

Def. $S: D \to D$ so:



$$S(x,n) := \begin{cases} (x, n+1), & \text{falls } (x,n+1) \in D \\ (Tx, 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: S ist meßbar und $\frac{\nu}{\nu(D)}$-treu



Sei $A \subset A_k$. Def.

$$B_j := T^{-1}(A) \cap A_j,$$

d.h., $T^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, B_j disjunkt, $B_j \subset A_j$

Sei $n \in \{1, \dots, n_k\}$. $S^{-1}(A \times \{n\}) = A \times \{n-1\}$ – das gleiche Maß wie $A \times \{n\}$.

Für $n=0$

$$\nu(\underbrace{S^{-1}(A \times \{0\})}_{\bigcup B_j \times \{n_j\}}) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\nu(B_j \times \{n_j\})}_{\mu(B_j) \cdot \nu(D)} = \nu(D) \cdot \mu(T^{-1}(A))$$

$$= \nu(D) \cdot \mu(A) = \nu(A \times \{0\})$$

Also ist $(D, \frac{\nu}{\nu(D)}, S)$ ein MDS.

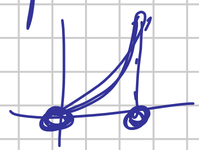
1.3. Topologische dynamische Systeme und invariante Maße.

Sei X komp. metr. Raum, $T: X \to X$ stetig.
Dann heißt (X, T) ein top. dynam. System (TDS).

$\boxed{\text{Bsp}}$ $[0,1]$, $Tx = x^2$

$\underline{\text{Frage:}}$ $\exists\, \mu$ Borel W'Maß auf X s.d. (X, μ, T) ein MDS ist, d.h., T μ-inv. ?

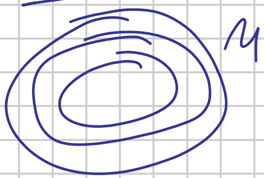
$\boxed{\text{Bsp}}$ $[0,1]$, $Tx = x^2$



δ_0, δ_1 sind T-inv. : $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in T^{-1}(A)$
$1 \in A \Leftrightarrow 1 \in T^{-1}(A)$

Bem. Behauptung: $\forall U \subset X$ offen $\exists (f_n) \subset C(X): 0 \le f_n \nearrow \mathbb{1}_U$

— — — <u>Beweis</u> Seien $K_1, K_2, \dots$ kompakte Mengen (d.h., abg.) s.d.



U

$K_n \subset U$, $K_n \nearrow$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$

Nimm z.B.:

$$K_n := \{x \in U : d(x, \partial U) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

U

(abg., $\subset U$, $\nearrow$, $\bigcup K_n = U$)

Def.

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in K_n \\ n \cdot d(x, \partial U), & x \in U \setminus K_n, \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

d.h., $f_n(x) = \min\{1, n d(x, \partial U)\}$ auf U.

Wir haben: $0 \le f_n \le \mathbb{1}_U$, $f_n \nearrow \mathbb{1}_U$, f_n stetig. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Lemma 1.14}}$ T ist μ-treu $\Leftrightarrow$

$$(*) \quad \int_X f \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu \qquad \forall f \in C(X)$$

Beweis "$\Rightarrow$" $f \in C(X) \Rightarrow f \in L^\infty(X, \mu)$, da f Borel-meßbar + Lemma 1.8 und X komp.

"$\Leftarrow$" Z.z.: $(*)$ gilt für $\forall f = \mathbb{1}_A$, A meßbar (dann wie in Lemma 1.8)

Es reicht: A offen. Nach Bem. oben

$\exists \{f_n\} \subset C(X)$ mit $0 \le f_n \le \mathbb{1}_A$ und $f_n \nearrow \mathbb{1}_A$

Nach Voraussetzung:

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A \, d\mu \xleftarrow{\text{monot. Konv.}} \int_X f_n(x) \, d\mu = \int f_n(Tx) \, d\mu(x) \xrightarrow{\text{monot. Konv.}} \int \mathbb{1}_A(Tx) \, d\mu = \mu(T^{-1}A)$$

Erinnere (FA)

$\boxed{\text{Satz (Riesz)}}$ $(C(X))' \underset{\text{isom.}}{\cong} \{\text{endliche } \mathbb{C}\text{-wertige Borelmaße auf } X\}$

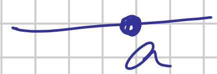
mit $\mu(f) = \int f \, d\mu$

Funktional   Maß

Die Topologie auf Maßen ist schwach*-Topologie auf $(C(X))'$, d.h.,

$$\mu_n \longrightarrow \mu \iff \int f \, d\mu_n \longrightarrow \int f \, d\mu \quad \forall f \in C(X)$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ Die Punktauswertung $f \mapsto f(a)$, $a \in X$ fest, entspricht dem Maß $\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$:



$$\delta_a(f) = f(a) = \int f \, d\delta_a$$

$\boxed{\text{Satz von Banach-Alaoglu}}$ Die Einheitskugel von $(C(X))'$

ist schwach*-komp. Insbesondere hat $\forall$ Folge von W'Maßen (Borel) auf X einen (schwach*)-Häufungspunkt.

(„Insbesondere": μ W'Maß $\Rightarrow$ $|\int f\,d\mu| \leq \|f\|_\infty \cdot \mu(X) = \|f\|_\infty$, d.h., $\|\mu\| \leq 1$, und $=$ da $|\int \mathbb{1}\,d\mu| = 1 = \|\mathbb{1}\|_\infty$

d.h., $\mu \in$ Einheitskugel)

$\boxed{\text{Satz 1.15}}$ (Krylov–Bogolyubov) Sei X komp. metr. Raum, $T: X \to X$ stetig. Dann

$\exists$ T-inv. W'Borelmaß μ auf X.

Bem. 1) Damit kann man $\forall$ TDS zu einem MDS machen.

2) μ ist i.A. nicht eindeutig: $T = id \Rightarrow \forall \mu$ ist T-inv.

Wenn μ eindeutig ist, heißt (X, T) eindeutig ergodisch.

Beweis

Nimm $a \in X$ und betrachte

$$\mu_n := \frac{\delta_a + \delta_{Ta} + \ldots + \delta_{T^n a}}{n+1}$$

Dann ist $\forall \mu_n$ ein W'Maß und, da $\int f \, d\delta_x = f(x)$,

$$\int_X [f(Tx) - f(x)] \, d\mu_n = \frac{1}{n+1} \left[f(Ta) + \ldots + f(T^{n+1}a) - f(a) - \ldots - f(T^n a) \right] = \frac{f(T^{n+1}a) - f(a)}{n+1}$$

D.h., $\left| \int_X [f(Tx) - f(x)] \, d\mu_n \right| \leq \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Sei μ ein Häufungspunkt von (μ_n) in der schwach*-Topologie (Banach-Alaoglu).

- μ ist ein W'Maß: $\mu(X) = \int_X \mathbb{1} \, d\mu = 1$, $\mu \geq 0$

- $\int_X f(Tx)\,d\mu - \int_X f(x)\,d\mu = 0 \quad \forall f \in C(X)$, d.h., μ ist T-inv. ∎

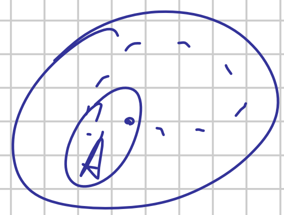
2. Rekurrenz und Ergodizität

2.1. Rekurrenz

Def 2.1 Seien (X, μ, T) ein MDS und $A \subset X$ meßbar.

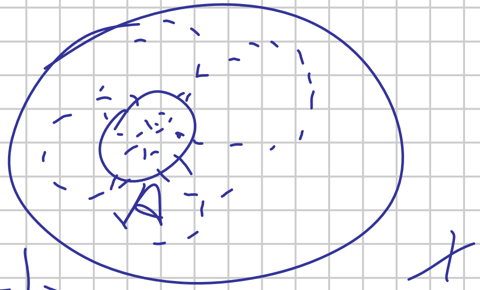
i) A heißt <u>rekurrent</u>, wenn für f.a. $x \in A$ $\exists n$ mit $T^n x \in A$, oder:

(1) $$\mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 0$$



2) A heißt unendlich rekurrent, wenn f.a. $x \in A$ $\exists (n_j) \subset \mathbb{N}$ Teilfolge: $T^{n_j} x \in A \ \forall j$, oder:

$$\mu\Big(A \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}(A)\Big) = 0$$



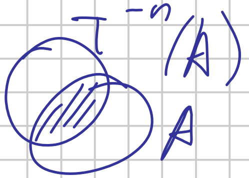
Bem. Die Def. ist nicht trivial für A mit $\mu(A) > 0$.

$\boxed{\text{Lemma 2.2}}$ Sei (X, μ, T) ein MDS. Es sind äquiv.:

(i) $\forall A \in \Sigma_X$ ist rekurrent

(ii) $\forall A \in \Sigma_X$ ist ∞-rekurrent

(iii) $\forall A \in \Sigma_X$ mit $\mu(A) > 0$ $\exists n$: $\mu(A \cap T^{-n} A) > 0$



Beweis (ii) ⇒ (i) klar

(i) ⇒ (ii) (i) heißt, dass $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n} A) \cup N_1$, $\mu(N_1) = 0$.

Daraus folgt: $T^{-1}(A) \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{T^{-1}(N_1)}_{\text{Nullmenge}}$

$T^{-2}(A) \subset \bigcup_{n=3}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{T^{-2}(N_1)}_{\text{Nullmenge}}$

$\vdots$

$T^{-(k-1)}(A) \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{T^{-(k-1)}(N_1)}_{\text{Nullmenge}}$

Wieder aus (1):

$$A \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{\left(N_1 \cup T^{-1}(N_1) \cup \dots \cup T^{-(k-1)}(N_1)\right)}_{=: N_* \text{ - Nullmenge.}}$$

gilt $\forall k$, d.h.,

$$A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}(N_1)\right]}_{\text{Nullmenge.}}$$

$\Rightarrow$ (ii)

(i) $\Rightarrow$ (iii) Ang., $\mu(A \cap T^{-n}(A)) = 0 \ \forall n.$

Nach (i) gilt:

$$A = \underbrace{A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right)}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap T^{-n}(A))} \cup N \quad \text{mit } \mu(N) = 0$$

„Nullmengen!"

$\Rightarrow \mu(A) = 0.$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $A \in \Sigma_X$ und betrachte

$$B := A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}(A)$$

$$= A \cap \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X \setminus A)\right]$$

Z.z.: $\mu(B) = 0$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$B \cap T^{-n}(B) \subset A \cap \underbrace{T^{-n}(A) \cap \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X \setminus A)\right]}_{\emptyset} = \emptyset$$

$\forall n$. (iii) angewandt auf B liefert $\mu(B)=0$. $\blacksquare$

Thm 2.3 (Poincaré)
Sei (X,μ,T) ein MDS. Dann ist $\forall A \in \Sigma_X$ unendlich rekurrent.

<u>Beweis</u> Sei $A \in \Sigma_X$ mit $\mu(A)>0$. ($\mu(A)=0 \Rightarrow$ wahr)

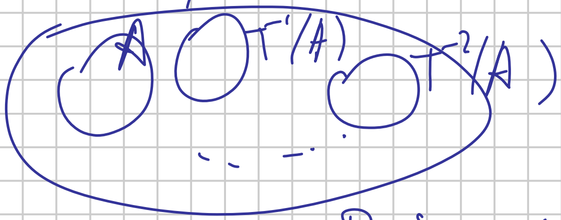
Nach Lemma 2.2 reicht es z.z., dass $\mu(A\cap T^{-n}(A))>0$ für ein n.

Ang., es ist nicht so, d.h., $\forall n$ gilt $\mu(A\cap T^{-n}A)=0$

Daraus folgt:
$$\mu(\underbrace{T^{-(n+k)}(A)\cap T^{-k}(A)}_{T^{-k}(T^{-n}(A)\cap A)}) \underset{\mu \text{ ist } T\text{-inv.}}{=} \mu(T^{-n}(A)\cap A) = 0 \quad \forall n,k,$$

d.h., $A, T^{-1}(A), T^{-2}(A), \dots$ sind paarweise disjunkt (bis auf eine Nullmenge)

Aber sie haben das gleiche Maß $= \mu(A) > 0$, also:

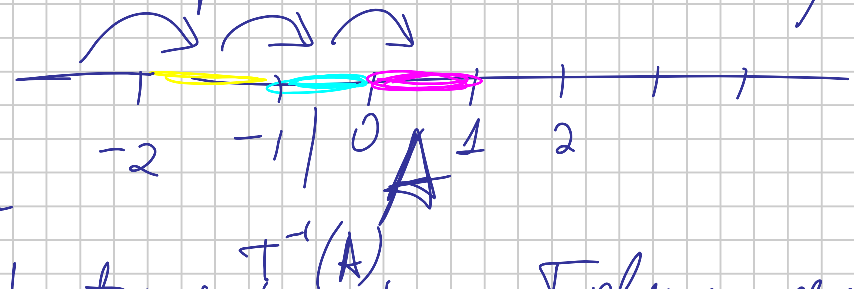


$$1 = \mu(X) \geq \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)}_{\text{disjunkt}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(T^{-n}(A))}_{\mu(A)} = \infty$$

Bem.: Poincaré's Rekurrenztheorem ist falsch für X mit $\mu(X) = \infty$

Bsp.: $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$,
mit $\mu = \text{Leb}$

$Tx = x+1$



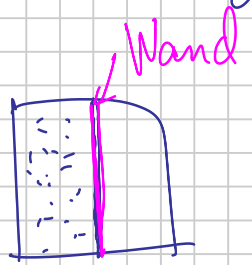
Bem.: Poincaré's Thm hat kontraintuitive Folgerungen

Modell von Boltzmann:

Zustandsraum $X \subset [0,1]^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$

$[0,1]^{3n}$: Raumkoord.

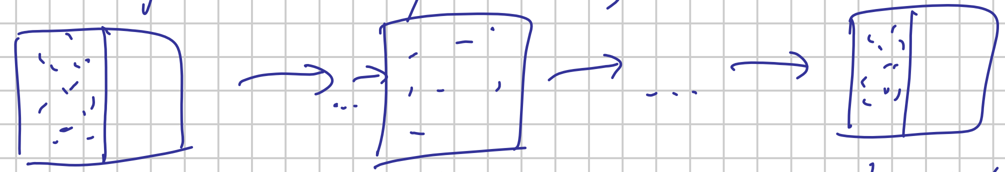
$\mathbb{R}^{3n}$: Geschwind.



Betrachte $A = \{x \in X : x_1 < \frac{1}{2}\}$, d.h., am Anfang stelle eine Wand in den Raum, dann entferne die Wand.

Poincaré: fast jeder Anfangszustand aus A kommt irgendwann ∞-oft nach A zurück.

<u>Frage</u>: Wie lange muss man warten?
(intuitiv: je kleiner $\mu(A)$, desto länger die Wartezeit).



Seien (X, μ, T) ein MDS, $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$.

Definiere:

$B_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(X \setminus A)$ – Punkte, die nie nach A kommen

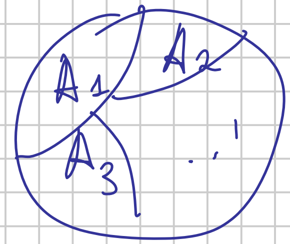
$B_1 := T^{-1}(A)$ – Punkte, die in einem Schritt nach A kommen

$\vdots$

$B_n := T^{-n}(A) \cap \left[\bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A)\right]$ – " – in n Schritten – " –

aber nicht früher.

Es gilt:
- $X = B_0 \cup B_1 \cup \dots$
- alle B_j sind paarweise disjunkt



Def.: $A_n := B_n \cap A \quad \forall n.$

Poincaré: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bis auf eine Nullmenge.