<u>Erinnerung</u>: $(X,\mu,T)$ heißt **ergodisch**, wenn $\forall A \in \Sigma_X$

$$\underbrace{A \text{ } T\text{-inv.}}_{T^{-1}(A)\subset A \text{ bis auf Nullmenge}} \Rightarrow \mu(A) \in \{0,1\}$$

Lemma 5.7: $A$ $T$-inv $\Leftrightarrow A = T^{-1}(A)$ bis auf Nullmenge $\Leftrightarrow X\setminus A$ inv.

Prop. 5.9: Äq.:

(i) $(X,\mu,T)$ erg.

(ii) $\forall A \subset X$ mit $\mu(A)$

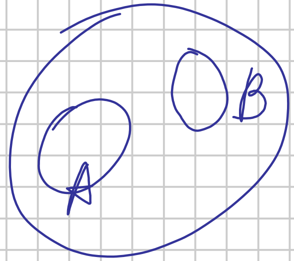
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} T^{-k}(A) = X \text{ bis auf Nullm.}$$

(iii) -"-

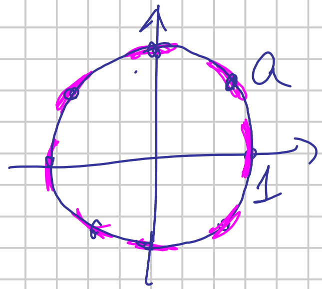
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) = X \text{ bis auf Nullm.}$$

(iv) $\forall A,B \subset X$ mit $\mu(A)>0, \mu(B)>0$ $\exists n\geq 1$:

$$\mu(T^{-n}(A)\cap B)>0$$



$\boxed{\text{Bsp 5.10}}$ 2) Rotation auf $\mathbb{T}$: $(\mathbb{T}, \text{Leb.}, a)$




**Fall 1** $a$ rational: $a^{n_0} = 1$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

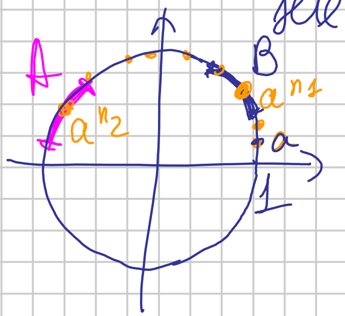
Dann ist die Menge

$$U_\varepsilon(1) \cup U_\varepsilon(a) \cup \ldots \cup U_\varepsilon(a^{n_0-1})$$

$a$-inv. und hat Maß $\in (0,1)$, wenn $\varepsilon > 0$ genügend klein.

$\Rightarrow$ nicht ergodisch.

**Fall 2:** $a$ irrat. Dann ist $\mathrm{Orb}(a) = \{a, Ta, T^2a, \ldots\}$ dicht in $\mathbb{T}$.




Seien $A, B$ offene Intervalle.

$\exists n_1 : a^{n_1} \in B$

$\exists n_2 > n_1 : a^{n_2} \in A$.

Dann gilt:

$$a^{n_2} = a^{n_2 - n_1} \underbrace{a^{n_1}}_{\in B} \in T^{n_2 - n_1}(B) \cap A$$

$\Rightarrow \underbrace{T^{n_2 - n_1}(B)}_{\text{off. Intervall}} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \mu(T^{n_2 - n_1} B \cap A) > 0$

$T$ ist $\mu$-inv.

$\Rightarrow \mu(B \cap T^{-(n_2 - n_1)} A) > 0$

Wir zeigen später: $(X, \mu, T)$ erg. (d.h., die Auss. gilt $\forall A, B \in \Sigma$).

Analog zeigen wir später

**Prop. 11** Sei $(G, a)$ eine Gruppenrotation. Dann gilt:

$$(G, \text{Haar}, a) \text{ erg.} \iff \text{Orb}\, a = \{a^n, n \geq 0\} \text{ ist dicht in } G.$$

**Bsp** (Bernoullishifts)

Wir zeigen, dass $(\{0, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}, \mu, \leftarrow)$ und ($\mu$: Produktmaß)

$(\{0, \dots, k-1\}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$ ergodisch sind, indem wir eine (viel) stärkere Eigenschaft zeigen:

**Prop. 12** Sei $(X, \mu, T) = (\{0, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}, \mu, \leftarrow)$ der einseitige Bernoullishift oder $(\{0, \dots, k-1\}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$ der zweiseitige B'shift. Dann gilt:

$$(*) \quad \mu(T^{-n} A \cap B) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(A) \cdot \mu(B) \qquad \forall A, B \in \Sigma_X$$

Insbesondere ist $(X, \mu, T)$ ergodisch.

**Beweis** „insbesondere" folgt aus Prop. 9 (i)$\Leftrightarrow$(iv).

Wir prüfen $(\circledast)$ zuerst für Zylindermengen:

**Schritt 1** Seien $A, B$ Zylindermengen:

$A:$ 000°00o00 . . . ;

$\underset{j_1\text{-Stelle}}{A_1}$ $\underset{j_2\text{-Stelle}}{A_2}$

$A = \ldots \times \underset{j_1\text{-Stelle}}{A_1} \times \ldots \times \underset{j_2\text{-Stelle}}{A_2} \times \ldots$ ... bis $j_k$-Stelle

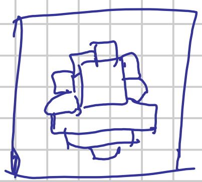
$B = \ldots \times \underset{m_1\text{-Stelle}}{B_1} \times \ldots \times \underset{m_2\text{-Stelle}}{B_2} \times \ldots$ ... bis $m_\ell$-Stelle

Für $n > m_\ell$ gilt: $T^{-n}A \cap B = \underbrace{\ldots B_1 \ldots B_\ell \ldots A_1 \ldots A_k}_{\text{wieder eine Zylindermenge} \neq \emptyset}$,

d.h., $\mu(T^{-n}A \cap B) = \underbrace{p(B_1) \cdots p(B_\ell)}_{\mu(B)} \cdot \underbrace{p(A_1) \cdots p(A_k)}_{\mu(A)} = \mu(A)\mu(B)$

**Schritt 2** Seien $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, $A_j$ disjunkte Zylinder

$B = \bigcup_{i=1}^{\ell} B_i$, $B_i$ —"—



Es gilt: $T^{-n}(A) \cap B = \bigcup_{i=1}^{\ell} (\underbrace{T^{-n}A}_{=\cup} \cap B_i) = \bigcup_{i=1}^{\ell}\bigcup_{j=1}^{m} \underbrace{(T^{-n}A_j \cap B_i)}_{\text{disj. Zylinder}}$

Nach Schritt 1: $\mu(T^{-n}A \cap B) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\ell} \mu(A_j)\cdot\mu(B_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j)}_{\mu(A)}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\ell}\mu(B_i)}_{\mu(B)}$

für genügend große $n$

$= \mu(A)\cdot\mu(B)$.

**Schritt 3** Seien $A, B$ beliebig (meßbar) und sei $\varepsilon > 0$.

Da Zylinder die Produkt-σ-Alg. erzeugen, $\exists\, \tilde{A}, \tilde{B}$ wie in Schritt 2 mit

$$\mu(A \triangle \tilde{A}) < \varepsilon, \quad \mu(B \triangle \tilde{B}) < \varepsilon$$

(Benutze: Zylinder ∩ Zylinder = Zylinder oder ∅.)

Nach Schritt 2 $\exists\, N: \forall n \geq N_0$: $\mu(T^{-n}\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \mu(\tilde{A})\cdot\mu(\tilde{B})$.

$T^{-n}\tilde{A} \cap \tilde{B} = T^{-n}A \cap B$ bis auf eine Menge mit Maß $< 2\varepsilon$

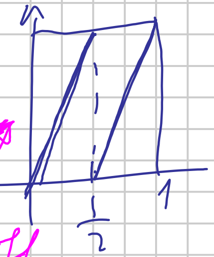
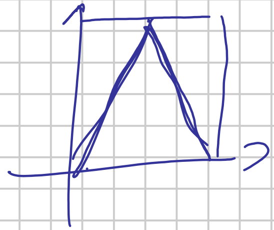
$(\mu(T^{-n}\tilde{A} \triangle T^{-n}A) = \mu(T^{-n}(\tilde{A} \triangle A)) = \mu(\tilde{A} \triangle A) < \varepsilon)$

D.h., $\left|\underbrace{\mu(T^{-n}A \cap B)}_{\substack{\mu(T^{-n}\tilde{A}\cap\tilde{B}) \\ \text{bis auf Maß} < 2\varepsilon}} - \overbrace{\mu(A)}^{\mu(\tilde{A}) \text{ bis auf Maß } \varepsilon}\underbrace{\mu(B)}_{\mu(\tilde{B}) \text{ bis auf Maß } \varepsilon}\right| < 4\varepsilon$

$|ab - cd| \leq |a-c|\,|b| + |c|\,|b-d| < 2\varepsilon$ ■

**Bem.** Die Eigenschaft (∗) heißt **Mischung** (oder: **starke Mischung**) und ist viel stärker als Ergodizität (kommt später).

(ii) Zeigen Sie, dass die Verdoppelungsabb. und die Zeltabb. auch mischend sind.

Isom. zum Bernoullishift $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mu, \leftarrow)$

**Thm. 13** (Kac)

Sei $(X, \mu, T)$ ein ergodisches MDS und sei $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$. Die erwartete Rückkehrzeit zu $A$ erfüllt:

$$\boxed{\int_A n_A \, d\mu_A = \frac{1}{\mu(A)}}$$

Beweis: Prop. 9: erg. $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n} A\right) = 1$
Rest: Thm. 5. ∎

**Bsp** (Rekurrenz in zufälliger Literatur)
Das Buch von Nietzsche „Also sprach Zarathustra" enthält $\sim 680.000$ Zeichen (Buchstaben, Punkte, leeres Zeichen usw.)

Ang.: Snoopy tippt zufällig auf einer Schreibmaschine

<u>Behauptung</u>: Mit Wahrscheinlichkeit 1 tippt er Nietzsches Buch $\infty$-oft.

<u>Beweis</u> $N := 680.000$ (Zeichen im Buch)

Schreibmaschine: 90 Zeichen, $p := \frac{1}{90}$

$(X, \mu, T) := B(\underbrace{p, \dots, p}_{90 \text{ Mal}})$, also $X = \{0, \dots, 89\}^{\mathbb{N}}$, $T \leftarrow$, $\mu$ Produktmaß

Sei Buch $= R_1 \dots R_N$ (Folge von Zeichen)

Betrachte $A := \{x_1 = R_1, \dots, x_N = R_N\}$ – Zylindermenge.

$$\mu[\underbrace{\exists k \in \mathbb{N} : X_{k+1} = R_1, \dots, X_{k+N} = R_N}_{\text{das Buch kommt irgendwann mal vor.}}]$$

$$= \mu[\exists k \in \mathbb{N} : T^k x \in A] = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}(A)\right) \overset{!}{=} 1$$

da Bernoulli ergodisch ist $\blacksquare$

Hier ist die erwartete Wartezeit

$$= \frac{1}{\mu(A)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{90}\right)^N} = 90^N = 90^{680.000}$$

# 3. Der Koopmanoperator und sein Spektrum

Sei $1 \le p < \infty$, $E := L^p(X,\mu)$, $T: E \to E$ def. durch

$$(Tf)(x) := f(Tx)$$ – der **Koopmanoperator**

**Eigenschaften von $T$ auf $L^p(X,\mu)$**

- $T$ lin. und kontraktiv ($\|T\| = 1$), sogar isometrisch: $\|Tf\| = \|f\| \ \forall f$

$$\|Tf\|_p^p = \int_X |Tf|^p \, d\mu = \int_X |f(\cancel{T}x)|^p \, d\mu(x) = \int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p.$$

$\int g \circ T = \int g$ für $g = |f|^p$

- $\underbrace{T\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}}_{T\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_A(Tx) = \begin{cases} 1, & Tx \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}}$, insbesondere: $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$

$x \in T^{-1}(A)$

- $T$ ist positiv: $f \geq 0 \Rightarrow Tf \geq 0$
- $T$ ist multiplikativ, d.h., $T(f\cdot g) = Tf \cdot Tg$ (wenn $f\cdot g \in L^p$) und konjugationsinvariant: $T\bar{f} = \overline{Tf}$
- $|Tf| = |f| \quad \forall f \in L^p$ – Verbandshomomorphismus

<u>Bem.</u> $\forall$ Operator auf $L^p$ mit diesen Eigenschaften ($\geq 0$, multipl., usw.) ist ein Koopmanoperator für eine $\mu$-treue Transformation – ohne Beweis

$\boxed{\text{Prop.}}$ Der Koopmanoperator ist invertierbar (und insb. unitär für $p=2$), wenn $(X, \mu, T)$ invertierbar ist

<u>Beweis</u> Sei $(X, \mu, T)$ invert., d.h., $\exists\, S: X \to X$ $\mu$-treu s.d.

$$T \circ S = S \circ T = id$$

bis auf Nullmengen

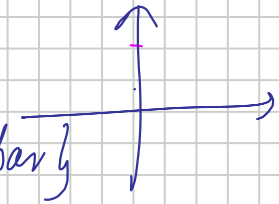
Behaupt.: der Koopmanoperator $S$ ist der inverse Oper. zu $T$:

$$(TSf)(x) = (Sf)(Tx) = f(\underbrace{STx}_{=x \text{ für f.a. } x}) = f,$$

analog: $STf = f \quad \forall f$

$\Rightarrow T$ ist invertierbar.

<u>Frage</u>: Wie sieht $\sigma(T)$ aus?



<u>Erinnerung</u>: $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \underbrace{\lambda - T}_{\lambda I - T}$ nicht invertierbar$\}$

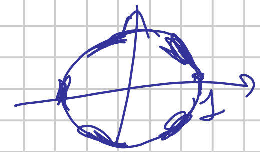
Spektrum

$= \{ \quad -\text{"}- \quad \lambda I - T$ nicht bij$\}$

$P\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \underbrace{\lambda - T \text{ nicht inj}}\}$ d.h., $\lambda$ Eigenwert von $T$

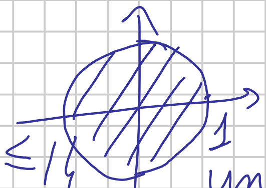
Punktspektrum

<u>Erinnere</u> (FA) • $T$ $\overbrace{\text{unitär}}^{\text{oder: invert. isometrie}}$ $\Rightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{T}$

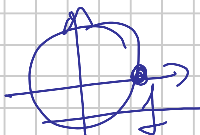


• $T$ isom., nicht invert. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(T) \subset \{z : |z| \le 1\}$



und $EW \subset \mathbb{T}$



Für Koopmanoper. gilt immer $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$, d.h., $1 \in P\sigma(T)$

$\boxed{\text{Prop. 14}}$ Sei $(X, \mu, T)$ ein MDS mit Koopmanop. $T$ auf $L^p(X, \mu)$, $p \geq 1$.

Def. $\operatorname{Fix} T = \{f \in L^p : Tf = f\}$ – Teilraum von $L^p$.

Es sind äquiv.:

(i) $(X, \mu, T)$ ergodisch

(ii) $\dim \operatorname{Fix} T = 1$, d.h., $\mathbb{1}$ ist ein einfacher EW mit ,Eigenwert

$$\operatorname{Fix} T = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}.$$

In diesem Fall hat $\forall$ Eigenfunktion von $T$ konst. Betrag, d.h.,

$$Tf = \lambda f \text{ für ein } \underbrace{\lambda \in \mathbb{C}}_{\mathbb{T}!} \Rightarrow |f| = \text{konst.}$$

Beweis „In diesem Fall" (ang., (i)$\Leftrightarrow$(ii)):

sei $f$ mit $Tf = \lambda f$, $\underbrace{|\lambda| = 1}_{\text{da } T \text{ isom.}} \Longrightarrow \underbrace{T|f|}\overset{\text{Eigensch. von } T}{=} |Tf| = \underbrace{|f|} \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} |f| = \text{konst.}$

(i)$\Rightarrow$(ii) sei $f \in \operatorname{Fix} T$, d.h.,

$$f(Tx) = f(x) \quad \text{f.ü.}$$

Dann sind $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f \in \operatorname{Fix} T$, d.h., sei $f$ OBdA reellwertig.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Behauptung:

$$A := \{x : f(x) \leq c\} \subset X$$

ist $T$-inv:

$$T^{-1}(A) = \{x : \underbrace{f(Tx)}_{= f(x) \text{ f.ü. nach Voraus.}} \le c\} = A \text{ bis auf Nullmenge}$$

Da $(X, \mu, T)$ erg. ist, muss $\mu(A) \in \{0,1\}$, d.h.,

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \mu(\{x : f(x) \le c\}) \in \{0,1\}$$

$\Rightarrow$ $f$ konst. f.ü. (warum?)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $A$ $T$-inv.: $T^{-1}(A) = A$ bis auf Nullm.

$$\Rightarrow \quad T\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} = \mathbb{1}_A,$$

d.h., $\mathbb{1}_A \in \mathrm{Fix}\,T$, d.h., nach (ii) ist $\mathbb{1}_A$ konst.

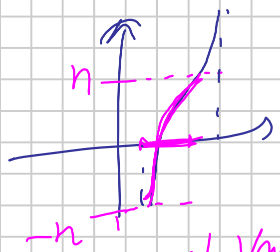
$$\Rightarrow \quad \underbrace{\mathbb{1}_A = 0}_{\mu(A)=0} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\mathbb{1}_A = 1}_{\mu(A)=1}.$$

$\blacksquare$

<u>Bem.</u> Der Zusatz („In diesem Fall ...") gilt nicht i. A. (wenn $(X, \mu, T)$ nicht erg. ist): Bsp.: $T = id$ – $\forall$ Fkt eine Eigenfkt.

**Lemma 15** $\forall \lambda \in P_\sigma(T)$ ist $\operatorname{Ker}(\lambda - T) \cap L^\infty(X,\mu)$ dicht in $\operatorname{Ker}(\lambda - T)$, d.h., beschr. EF liegen dicht in EF.

**Beweis**




**Schritt 1**: $f \in \operatorname{Fix} T \Rightarrow \mathbb{1}_{\{|f| \le n\}} \in \operatorname{Fix} T$

Sei $f \in \operatorname{Fix} T$, d.h., $f(Tx) = f(x)$ f.ü.

$$T\mathbb{1}_{\{|f|\le n\}}(x) = \mathbb{1}_{T^{-1}\{|f|\le n\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } |f(\cancel{T}x)| \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nach Voraussetzung (f.ü.)

$$= \mathbb{1}_{\{|f|\le n\}}$$

**Schritt 2** Sei $f$ eine Eigenfkt zu $\lambda$, d.h., $Tf = \lambda f$.

$$\Rightarrow |f| \in \operatorname{Fix} T \xRightarrow{\text{Schritt 1}} \mathbb{1}_{\{|f|\le n\}} \in \operatorname{Fix} T \quad \forall n.$$

$T|f| = |Tf| = |\lambda f| = |f|$

Def. $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\le n\}}$ – beschr. $(\forall n)$

- $f_n \xrightarrow{L^p} f$:

$$\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n(x) - f(x)|^p dx = \int_{\{|f|>n\}} |f|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

warum?

- $\forall f_n \in \ker(\lambda - T)$

$$Tf_n = T(f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\le n\}}) \underset{T \text{ multipl.}}{=} \overset{=\lambda f}{Tf} \cdot \underbrace{T\mathbb{1}_{\{|f|\le n\}}}_{\mathbb{1}_{\{|f|\le n\}},\ \text{da } \in \operatorname{Fix} T}$$

$$= \lambda \cdot f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\le n\}} = \lambda \cdot f_n .$$

[redacted]

$\boxed{\text{Thm 16}}$ Sei $(X, \mu, T)$ ein MDS mit Koopmanop. $T$ auf $L^p(X,\mu)$, $p \geq 1$.

(a) $P\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ ist eine Vereinigung von Untergruppen von $\mathbb{T}$ und ist unabh. von $p$.

(b) $(X, \mu, T)$ ist ergodisch $\iff$ $\forall \lambda \in P\sigma(T)$ ist einfach und $\ker(\lambda - T)$ ist erzeugt von einer $\underbrace{\text{unimodularen}}_{\text{Betrag}=1}$ Fkt $f_\lambda$:

$$\ker(\lambda - T) = \mathbb{C} \cdot f_\lambda ,$$

$|f_\lambda| = 1$. In diesem Fall ist $P_\sigma(T)$ eine Untergruppe von $\mathbb{T}$.

**Beweis** (a) Unabh. von $p$ folgt aus Lemma 15:

$$\exists \text{ EF in } L^p \iff \exists \text{ EF} \in L^\infty.$$

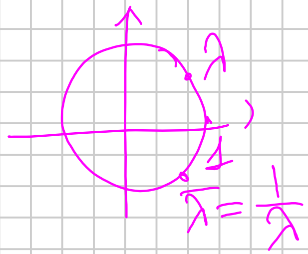
Noch zz: $\lambda \in P_\sigma(T) \Rightarrow \lambda^n \in P_\sigma(T) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Nach Lemma 15 $\exists f_\lambda \neq 0$ beschr. mit $T f_\lambda = \lambda f_\lambda$

Für $n \geq 1$ ist $f_\lambda^n \neq 0$ eine Eigenfkt zu $\lambda^n$:

$$T f_\lambda^n = (T f_\lambda)^n = (\lambda f_\lambda)^n = \lambda^n f_\lambda^n$$

T multipl.




Für $n = -k$, $k \geq 1$ ist $\bar f_\lambda^k$ eine Eigenfkt zu $\bar\lambda^k = \lambda^{-k} = \lambda^n$

– analog (ii)

(b) ($\Leftarrow$) Prop. 14.

($\Rightarrow$) Sei $(X, \mu, T)$ erg., d.h., $\operatorname{Fix} T = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$

Sei $\lambda \in P_\sigma$ mit einer Eigenfkt $f$ : $Tf = \lambda f$, $f \neq 0$.

Wie oben gilt: $|f| \in \operatorname{Fix} T$, d. h., $|f| = c \cdot \mathbb{1}$, $c \neq 0$.

Def. $\quad f_\lambda := \frac{f}{c}$

<u>Behaupt. 1</u>: $\quad \ker(\lambda - T) = \mathbb{C} \cdot f_\lambda$

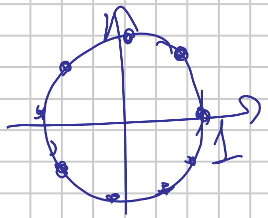
<u>Beweis</u>: Sei $g \in \ker(\lambda - T)$, d. h., $Tg = \lambda g$.

Es gilt $\quad T\overline{f_\lambda} \underset{\text{Eigensch. von } T}{=} \overline{Tf_\lambda} = \overline{\lambda} \cdot \overline{f_\lambda}$, also:

$$T(g \cdot \overline{f_\lambda}) = Tg \cdot T\overline{f_\lambda} = \cancel{\lambda} g \cdot \cancel{\overline{\lambda}} \overline{f_\lambda} = g \overline{f_\lambda}$$

Vorauss.: $\underbrace{g \cdot \overline{f_\lambda}}_{\frac{g}{f_\lambda}\text{, da } |f_\lambda| = \mathbb{1}} = c \cdot \mathbb{1} \quad$ (da $g \cdot \overline{f_\lambda} \in \operatorname{Fix} T$),

d. h., $\quad g = c \cdot f_\lambda \quad$ und $\quad \ker(\lambda - T) = \mathbb{C} \cdot f_\lambda$.



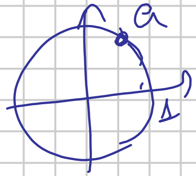

<u>Behaupt. 2</u> $\quad P_\sigma(T)$ ist eine Gruppe:

$\lambda, \mu \in P_\sigma(T) \Rightarrow \lambda \cdot \mu \in P_\sigma(T)$

$\left( T(f_\lambda \cdot f_\mu) = \lambda f_\lambda \cdot \mu \cdot f_\mu = \lambda \cdot \mu \cdot f_\lambda \cdot f_\mu \right.$

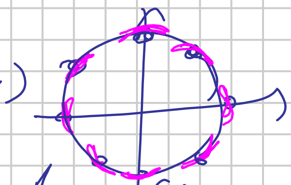
$1 \in P_\sigma(T)$, $\frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda} \in P_\sigma(T)$ – siehe oben. und $f_\lambda \cdot f_\mu \neq 0$, da unimodular ∎

**Bsp: Rotation auf $\mathbb{T}$:**



**Prop. 17** a) $(\mathbb{T}, a)$ ist ergodisch $\Leftrightarrow$ $a$ irrational, d.h. $a^n \neq 1$ $\forall n \neq 0$

b) $P_\sigma(T) = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$

__Beweis__ a) $\Rightarrow$ schon gemacht: $a$ rat. $\Rightarrow$  $\infty$-viele inv. Mengen

$\Leftarrow$ Wir zeigen: $\mathrm{Fix}\, T = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ (dann: Prop. 14)

Sei $f \in \mathrm{Fix}\, T$: $Tf = f$, $f \in L^2(\mathbb{T})$

- Die Fkt'en $\chi_n(z) := z^n$, $n \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}$ bilden eine ONB von $L^2(\mathbb{T})$ (Warum? Weierstraß: $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\cdot}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ist ONB von $L^2([0,2\pi])$)

- $(T\chi_n)(z) = \chi_n(az) = a^n \cdot z^n = a^n \chi_n(z)$,
  d.h., $\chi_n$ ist eine Eigenfkt zu $a^n$

Sei $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \chi_n$ – Fourierdarstellung aus FA1

$$Tf = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{T\chi_n}_{a^n\chi_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n a^n \chi_n$$

Da $Tf = f$, muss $c_n = c_n a^n \;\forall n$ gelten.

<u>Fall 1</u> $n \neq 0 \Rightarrow c_n = 0$, da $1 \neq a^n$

<u>Fall 2</u> $n = 0 \Rightarrow c_0$ beliebig und $f = \text{konst}$.

b) $\{a^n, n \in \mathbb{Z}\} \subset P_\sigma(T)$ – siehe oben ($\chi_n$ zugeh. EF)

$\supset$: Ang., $Tf = \lambda f$, $f \neq 0$

Fourierdarst. oben: $Tf = \lambda f \Rightarrow c_n a^n = \lambda c_n \;\forall n$.

Da $f \neq 0$, $\exists n$: $c_n \neq 0$, also $a^n = \lambda$. ∎

<u>Bem.</u> Genauso beweist man:

$(\mathbb{T}^d, a)$ erg. $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_d$ $\mathbb{Z}$-unabh. sind, d.h.,

$a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot a_d^{n_d} = 1 \Rightarrow n_1 = \ldots = n_d = 0$

$\forall n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}$

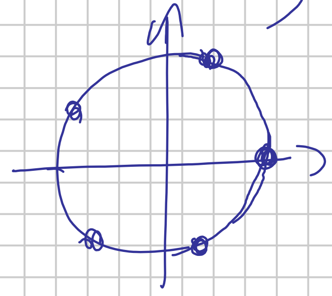
Für den Beweis braucht man eine ONB von $L^2(\mathbb{T}^d)$ aus EF:

$$\chi_{n_1,\dots,n_d}(z) = z_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot z_d^{n_d}$$

EF: $\chi_{n_1,\dots,n_d}(a_1 z_1, \dots, a_d z_d) = (a_1 z_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (a_d z_d)^{n_d} = a_1^{n_1} \cdots a_d^{n_d} \cdot \chi(z)$

ONB: ohne Beweis / Ü ?

**Bem.** Wenn $(\mathbb{T}, a)$ nicht ergodisch ist, d.h., $a^n = 1$ für ein $n > 0$, dann gilt:



$$\sigma(T) = P\sigma(T) = \{1, a, \dots, a^{n-1}\}$$

mit

$$T = \underbrace{I}_{\mathrm{lin}\{\chi_{kn},\, k \in \mathbb{Z}\}} \oplus \underbrace{a \cdot I}_{\mathrm{lin}\{\chi_{kn+1},\, k \in \mathbb{Z}\}} \oplus \dots \oplus \underbrace{a^{n-1} \cdot I}_{\mathrm{lin}\{\chi_{kn-1},\, k \in \mathbb{Z}\}}$$

$T\chi_{kn} = \underbrace{a^{kn}}_{=1} \chi_{kn}$, $T\chi_{kn+1} = a\chi_{kn+1}$, $T\chi_{kn+n-1} = a^{n-1}\chi_{\dots}$

# II Die klassischen Ergodensätze

## 1. Einleitung: Der Cesàro-Limes

Boltzmannsche Ergodenhypothese:

$$\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}}_{\text{Cesàromittel}} f(T^n x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_X f\,d\mu$$

„Zeitmittel = Raummittel"

$\frac{a_n}{n} = \overline{o}(1)$ Nullfolg

**Def** Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ beschr. (oder allg.: $a_n = \overline{o}(n)$, $(a_n) \subset$ top. $\underline{\text{VR}}$) Vektorraum

Man sagt: $(a_n)$ konv. im Cesàro-Sinne gegen $a$, schreibe $C\text{-}\lim a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} a$, wenn

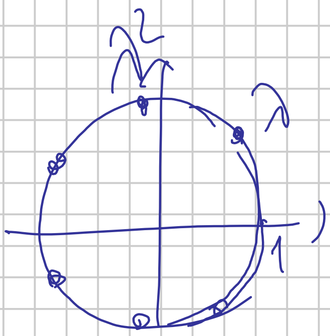
$$\frac{a_1 + \dots + a_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \longrightarrow a$$

**Bsp**

1) $0,1,0,1,\dots \longrightarrow 1/2$

$0,1,1,0,1,1,\dots \longrightarrow 2/3$

Allg.: $(a_n)$ periodisch mit Periode $d \Longrightarrow C\text{-}\lim a_n = \frac{a_1+\dots+a_d}{d}$ Ü



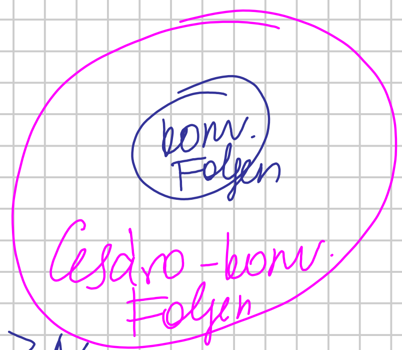

2) Sei $\lambda \in \mathbb{T}$ und $a_n = \lambda^n$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \lambda^n = \frac{1}{N}\lambda \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \lambda^n}_{\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda},\ \text{wenn } \lambda \neq 1} = \begin{cases} \frac{1}{N}\cdot\lambda\cdot\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, & \text{wenn } \lambda \neq 1 \\ 1, & \text{wenn } \lambda = 1 \end{cases}$$

d.h., $C\text{-}\lim \lambda^n = \begin{cases} 0, & \lambda \neq 1 \\ 1, & \lambda = 1 \end{cases}$.

## Eigenschaften des Cesàro-Limes

1) $a_n \to a \Longrightarrow a_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} a$




Beweis OBdA $a = 0$ (warum?)

Sei $\varepsilon > 0$, $N_0$ mit $|a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq N_0$.

Dann gilt $\forall N \geq N_0$:

$$\left|\frac{a_1+\dots+a_{N_0}+\dots+a_N}{N}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{a_1+\dots+a_{N_0}}{N}\right|}_{\xrightarrow{N\to\infty} 0} + \underbrace{\frac{\varepsilon\cdot(N-N_0)}{N}}_{\xrightarrow{N\to\infty} \varepsilon} < 2\varepsilon$$

für $N \geq N_1$ für ein $N_1$. $\blacksquare$

2) $\exists\, (a_n)$ beschr., nicht Cesàro konv.:

$$\underbrace{\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{\text{arithm. Mittel fast } 0}, 1, 1, \dots\dots, 1}_{\text{arithm. Mittel fast } 1}) \dots$$

3) $C\text{-}\lim a_{n+1} = C\text{-}\lim a_n$ (Shiftinvarianz)

$$\left|\frac{\cancel{a_2}+\cancel{\dots}+a_{n+1}}{n} - \frac{a_1+\cancel{\dots}+\cancel{a_n}}{n}\right| \leq \frac{|a_{n+1}-a_1|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(a_n)\text{ beschr.}} 0$$

Gilt auch, sobald $a_n = o(n)$

4) <u>Achtung</u> $C\text{-}\lim a_n \cdot C\text{-}\lim b_n \neq C\text{-}\lim a_n \cdot b_n$ i. A.

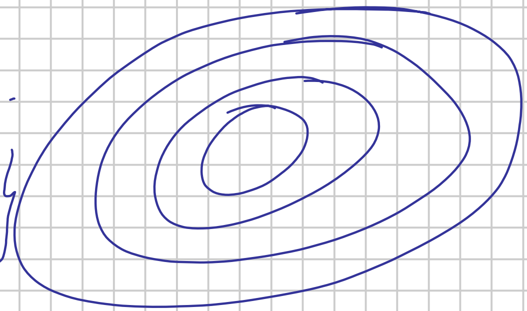
(C-lim ist <u>nicht</u> multiplikativ)

$a_n: \; 0, 1, 0, 1, \ldots \xrightarrow{\text{Ces.}} 1/2$

$b_n: \; 1, 0, 1, 0, \ldots \xrightarrow{\text{Ces}} 1/2$

$a_n b_n = 0 \;\not\xrightarrow{\text{Ces.}}\; 1/2 \cdot 1/2.$

<u>Bem.</u> 1) $a_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} a \iff s_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \to a$. Man kann C-C-lim (oder $C_2$-lim) so def.: $s_n \xrightarrow{\text{Ces.}} a$ usw.



Es gilt: $\{C_n\text{-konv. Folgen}\} \supsetneq \{C_{n-1}\text{ konv. Folgen}\}$

und $\bigcup_n \{C_n\text{-konv. Folgen}\} \not\supset \ell^\infty$

2) Genauso def. man Cesàro-Konvergenz in einem Banachraum für die starke/schwache Topologie:

$$x_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} x \iff \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \xrightarrow[\text{stark / schwach}]{} x$$

und für Operatoren bzgl. der Normtop., starker/schwacher Oper.Top.:

$T_n \xrightarrow{\text{Cesàro}} T \iff \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n \longrightarrow T$ bzgl. entspr. Top.

## 2. Von Neumannscher Mittelergodensatz

Sei $(X,\mu,T)$ ein MDS. Def. $S_N f := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f$,

$S_N : L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ $\forall p \geq 1$.

**Theorem 1** (Von Neumann) – 1933/1934

Sei $(X,\mu,T)$ ein MDS und $f \in L^2(X,\mu)$. Dann gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f \longrightarrow Pf \quad \text{in } L^2,$$

wobei $P: L^2 \to L^2$ die Orthogonalprojektion auf $\operatorname{Fix} T \subset L^2(X,\mu)$.

**Bem.** „Mittelergodensatz" wegen $L^2$-Konv. (nicht Cesàro-Konv.!)

**Beweis**    **Schritt 1: Orthogonalzerlegung:**

Wir zeigen: $\boxed{\underset{L^2(X,\mu)}{H} = \operatorname{Fix} T \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{Bild}(I-T)}}$ — von Neumann'sche Zerlegung

1) $\operatorname{Fix} T \perp \operatorname{Bild}(I-T)$

Sei $f \in \operatorname{Fix} T$, d.h., $Tf = f$. Zz: $f \perp (g - Tg)$ $\forall g$.

$$\langle f, g - Tg \rangle = \langle f, g \rangle - \langle \underbrace{\cancel{T}f}_{f \in \operatorname{Fix} T}, \cancel{T}g \rangle = 0$$

T isom.

2) Sei $f \perp \operatorname{Bild}(I-T)$. Zz: $f \in \operatorname{Fix} T$.

Insb. gilt: $f \perp (f - Tf)$:

$$0 = \langle f, f - Tf \rangle = \|f\|^2 - \langle f, Tf \rangle, \text{ d.h.,}$$

$$\langle f, Tf \rangle = \|f\|^2 = \|f\| \cdot \|Tf\|$$

Gleichheit in Cauchy-Schwarz: $Tf = c \cdot f$.

Damit gilt: $\|f\|^2 = \langle f, Tf \rangle = \bar{c}\, \|f\|^2$, d.h., $c = 1$

**Schritt 2: Konvergenz**

Sei $S_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n$. ZZ: $S_N f \to Pf \quad \forall f \in H$,

d.h., zz: $S_N \to I$ auf $\operatorname{Fix} T$

$S_N \to 0$ auf $\overline{\operatorname{Bild}(I-T)}$

1) Sei $f \in \operatorname{Fix} T \Rightarrow S_N f = f \to f$ ✓

2) Sei $f \in \operatorname{Bild}(I-T)$, d.h., $f = g - Tg$ für ein $g \in L^2(X,\mu)$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{T^n f}_{T^n g - T^{n+1} g} = [\text{Teleskopsumme}] = \frac{Tg - T^{N+1}g}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \qquad \|\cdot\|_2 \leq 2\|g\|_2$$

D.h., $S_N \to 0$ auf $\operatorname{Bild}(I-T)$

Da $\|S_N\| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|T\|^n = 1 \quad \forall N$, gilt $S_N \to 0$ auf $\overline{\operatorname{Bild}(I-T)}$

(FA 1: $(T_n)$ gl. beschränkt, konv. auf einer dichten Teilmenge $\Rightarrow$ konv. überall) $\blacksquare$

**Bem.** Von Neumannscher Ergodensatz gilt $\forall$ Kontraktion auf einem Hilbertraum und sogar für eine viel größere Klasse von Operatoren (Kontr. auf reflex. Räumen, wenn $P$ entsprechend def. ist).

$\boxed{\text{Def}}$ Die Projektion $P$ heißt die <u>mittelergodische Projektion</u> von $T$.

<u>Bem.</u> $P$ erfüllt:

1) $\int Pf \, d\mu = \int f \, d\mu$

$$\int S_N f \, d\mu = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int T^n f \, d\mu}_{\int f \, d\mu} = \int f \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$$

2) $P(f \cdot Pg) = Pf \cdot Pg$

$$S_N(f \cdot Pg) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{T^n(f \cdot Pg)}_{T^n f \cdot \cancel{T^n} \underbrace{Pg}_{\in \mathrm{Fix}\, T}} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f\right) Pg \longrightarrow Pf \cdot Pg$$

$S_N(f \cdot Pg) \longrightarrow P(f \cdot Pg)$

3) $Pf = \mathbb{E}(f \mid \Sigma')$ – Erwartungswert von $f$ bzgl.

$\Sigma' := \{A \in \Sigma \ T\text{-inv.}\} \subset \Sigma$ Ü: $\Sigma'$ ist eine Unter-$\sigma$-Algebra

Erinnere: $\forall f \in L^1(X, \Sigma, \mu) \ \exists! \, g \in L^1(X, \Sigma', \mu)$ mit

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma'$$

- ü: $f \in \operatorname{Fix} T \Rightarrow f$ ist $\Sigma'$-meßbar
- $\Sigma' \ni A$: $\displaystyle\int_A S_N f \, d\mu = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int_A T^n f \, d\mu}_{\int_X T^n f \cdot 1\!\!1_A = \int_X T^n f \cdot T^n 1\!\!1_A} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int f \cdot 1\!\!1_A \, d\mu = \int_A f$

da $A$ $T$-inv.: $1\!\!1_A = 1\!\!1_{T^{-n}A}$

$\displaystyle \to \int_A f,$

d.h., $\displaystyle\int_A Pf = \int_A f$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Thm. 6.2}}$ (Charakterisierung der Ergodizität)

Sei $(X, \mu, T)$ ein MDS mit Koopmanoperator $T$ auf $L^2$ und mittelerg. Projektion $P$. Es sind äquiv.:

(i) $(X, \mu, T)$ ist ergodisch

(ii) $\dim \operatorname{Fix} T = 1$

(iii) $\dim (\operatorname{Fix} T \cap L^\infty) = 1$

(iv) $\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f \longrightarrow \int f d\mu \cdot 1\!\!1$ in $L^2$ $\forall f \in L^2$, d.h.,

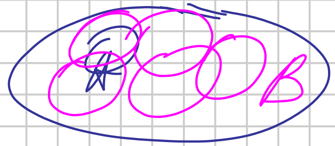
$$Pf = \int f d\mu \cdot 1\!\!1 .$$

(v) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle T^n f, g\rangle \longrightarrow \int_X f\,d\mu \cdot \int_X \bar{g}\,d\mu \quad \forall f, g \in L^2$

(vi) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}B) \longrightarrow \mu(A)\cdot\mu(B) \quad \forall A, B$ meßbar

(vii) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}A) \longrightarrow \mu(A)^2 \quad \forall A$ meßbar.

<u>Bem.</u> (vi) besagt, dass $T^{-n}B$ im <u>Mittel</u> überall mit gleicher Wahrscheinlichkeit erscheint




<u>Beweis</u> (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) schon bewiesen

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Satz von von Neumann: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f \to Pf$,

$Pf \in \operatorname{Fix} T \underset{\text{nach (ii)}}{\Rightarrow} Pf = c\cdot\mathbb{1}$.

Außerdem wissen wir: $\underbrace{\int f} = \int Pf = \int c\cdot\mathbb{1} = \underbrace{c}$

(iv) $\Rightarrow$ (v) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle T^n f, g\rangle = \langle \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n f}_{\xrightarrow{L^2} \int f\cdot\mathbb{1}}, g\rangle \longrightarrow \int f \cdot \underbrace{\langle \mathbb{1}, g\rangle}_{\int \bar{g}}$

(v) $\Rightarrow$ (vi) Nimm $g = \mathbb{1}_A$, $f = \mathbb{1}_B \Rightarrow$

$$\langle T^n f, g\rangle = \int \underbrace{T^n \mathbb{1}_B}_{\mathbb{1}_{T^{-n}(B)}} \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu = \int \mathbb{1}_{T^{-n}(B)\cap A} \, d\mu$$

$$= \mu(T^{-n}B \cap A) \xrightarrow{\text{Cesàro}} \int f \cdot \int \bar{g} = \mu(A)\cdot\mu(B)$$

nach (v)

(vi) ⇒ (vii) $B := A$

(vii) ⇒ (i) Sei $A$ $T$-inv. (und meßbar). Zz: $\mu(A) \in \{0,1\}$

Nach (vii):

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mu(A \cap T^{-n}A)}_{=\mu(A),\ \text{da } T\text{-inv.}} \longrightarrow \mu(A)^2$$

$$\mu(A) = \mu(A)^2 \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ oder } = 1. \qquad \blacksquare$$

<u>Bem.</u> (iv) ist eine Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen:
Für $f \in L^2$, $X_n := T^n f$ – Zufallsvariablen auf dem W'Raum $(X,\mu)$ mit $\int X_n = \int f \, d\mu$ $\forall n$ und für <u>ergodische</u> Systeme gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{L^2} \int f \cdot d\mu \, \mathbb{1}.$$

# 3 Birkhoffscher Ergodensatz:

## die Formulierung

**Thm 6.3** (Birkhoff '33)
Sei $(X, \mu, T)$ ein MDS, $f \in L^1(X,\mu)$. Dann konv.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{(T^n f)(x)}_{f(T^n x)}$$

für f.a. $x \in X$.

Bem. Dieser Satz heißt Punktweiser (oder individueller) Ergodensatz
Für $f \in L^2$ ist der Limes $= Pf$ (f.ü. Konv. ist stärker)

**Korollar 6.4** Ein MDS $(X, \mu, T)$ ist ergodisch

$$\Longleftrightarrow \quad \forall f \in L^1$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (T^n f)(x) = \int f \, d\mu \quad - \quad \boxed{\text{Zeitmittel} = \text{Raummittel}}$$

für f.a. $x \in X$

!

**Beweis** $\Leftarrow$ Ang., $\exists f \in Fix$, $f \neq$ konst. (d.h., $(X,\mu,T)$ nicht erg.)

Wir haben:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{T^n f}_{f} = f \neq \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1} \quad ⚡$$

$\Rightarrow$ Sei $f \in L^1$ und def.

$$g(x) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (T^n f)(x) \quad \text{(für f.a. } x \text{ definiert)}.$$

ZZ: $g = \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1}$

Von Neumann besagt: $S_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n$ konv. in $L^2$ für $\forall f \in L^2$ $\Rightarrow$ konv. in $L^1$ für $\forall f \in L^2$

da $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$

- $S_N f \xrightarrow{L^1} \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1}$ $\forall f \in L^2$ dicht in $L^1$
- $(S_N)$ sind Kontraktionen bzgl. $L^1$-Norm

$\Rightarrow S_N f \xrightarrow{L^1} \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1}$ $\forall f \in L^1$

Nach Birkhoff: $S_N f \longrightarrow g$ f.ü.

Also gilt $g = \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1}$. ∎

**Bem.** D.h., Boltzmannsche Ergodenhypothese gilt, aber nur für ergodische Systeme und nur f.ü.

**Beobachtung** Auf dem dichten warum? Teilraum

$$D := \mathrm{Fix}\,T \overset{\perp}{\oplus} (I-T)(L^\infty(X,\mu)) \subset L^1$$

konv. die Cesàromittel

$$S_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n$$

fast überall (sogar in $\|\cdot\|_\infty$):

- $Tf = f \Rightarrow S_N f = f \to f$
- $f = g - Tg,\ g \in L^\infty \Rightarrow$

$$S_N f = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(T^n g - T^{n+1} g\right) = \frac{Tg - T^{N+1}g}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} 0.$$

$\|\cdot\|_\infty \leq 2\cdot\|g\|_\infty$

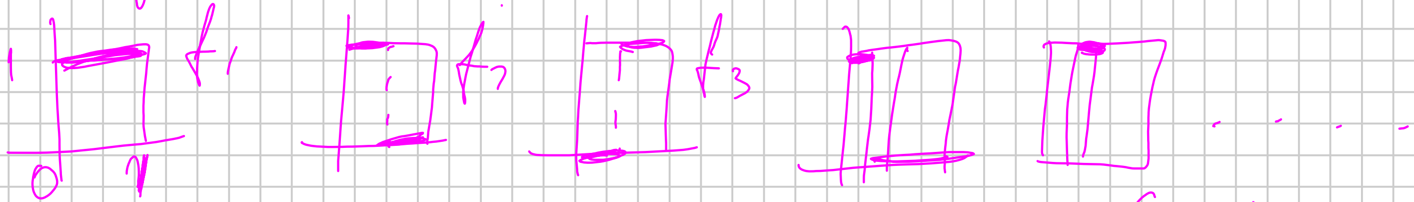
**Problem:** Wie kommt man von $D$ zu $\overline{D}^{\|\cdot\|_{L^1}} = L^1(X,\mu)$?

F.ü. Konvergenz wird von keiner Topologie erzeugt

$\Rightarrow \nexists$ kein leichtes Approximationsargument

Ü Für einen top. Raum gilt: $a_n \to a \iff \forall$ Teilfolge von $(a_n)$ hat eine gegen $a$ konv. Teilfolge

Für f.ü. konv. falsch:




$(f_n)$ divergiert $\forall x$, aber $\forall$ Teilfolge $(f_{n_k})$ hat eine f.ü. gegen $0$ konv. Teilfolge. ü

## 4. Maximale Ungleichung und Banachsches Prinzip.

Sei $(X,\mu,T)$ ein MDS mit Koopmanop. $T$ auf $L^1$.

Def.
$$S_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^n \quad , N \in \mathbb{N}$$
$$S^* f := \sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N f| \quad \text{(punktweise)}$$

$$S^*: L^1(X,\mu) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{meßbare Fkt'en} \\ \text{mit Werten in } \overline{\mathbb{R}} \end{array} \right\}$$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$S^*$ heißt <u>Maximaloperator</u> zu $(X,\mu,T)$.

Man kann den Maximaloperator für $\forall$ Folge $(T_n)$ von Operatoren auf $L^1(X,\mu)$ def.:

$$T^* f := \sup_n |T_n f|$$

<u>Eigenschaften von $T^*$</u>

- $T^* f \geq 0 \quad \forall f$ – insb. ist $T^*$ nicht lin.
- $T^*(\alpha f) = |\alpha| \cdot T^* f \quad \forall f \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$
- $T^*(f+g) \leq T^* f + T^* g \quad \forall f,g$ – <u>Subadditivität</u>

$\boxed{\text{Def}}$ Eine Folge von Operatoren $(T_n)$ auf $L^1(X,\mu)$ <u>erfüllt eine maximale Ungleichung</u>, wenn

$$\boxed{\mu(\{x : (T^* f)(x) > \lambda\}) \leq c(\lambda)} \quad \begin{array}{l} \forall \lambda > 0 \\ \forall f \in L^1 \text{ mit} \\ \|f\|_1 \leq 1. \end{array}$$


für eine Fkt $c : (0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $\boxed{\lim_{\lambda \to \infty} c(\lambda) = 0}$

$\boxed{\text{Thm 5}}$ (Banachsches Prinzip)

Sei $(T_n)$ eine Folge von lin. beschränkten Operatoren auf $L^1(X,\mu)$ für einen W'Raum $(X,\mu)$. Wenn der zugeh. Max'Operator $T^*$ eine max. Ungleichung erfüllt, ist die Menge

$$F := \{ f \in L^1 : (T_n f) \text{ konv. f.ü.} \}$$

ein abgeschlossener lin. Teilraum von $L^1(X,\mu)$.

Beweis: lin. Teilraum: klar.

ZZ: abg.

Sei $f \in \overline{F}$. Wir zeigen: $(T_n f)$ ist f.ü. Cauchy, d.h.,

$$h := \overline{\lim_{k,\ell\to\infty}} |T_k f - T_\ell f| \underbrace{=}_{\text{ZZ.}} 0$$

Sei $g \in F$. Es gilt:

$$|T_k f - T_\ell f| \le \underbrace{|T_k(f-g)|}_{\le T^*(f-g)} + |T_k g - T_\ell g| + \underbrace{|T_\ell(g-f)|}_{\le T^*(f-g)}$$

$$\le 2T^*(f-g) + |T_k g - T_\ell g|.$$

Daraus folgt:

$$h = \overline{\lim_{k,\ell\to\infty}} |T_k f - T_\ell f| \leq 2T^*(f-g) + \underbrace{\overline{\lim_{k,\ell\to\infty}} |T_k g - T_\ell g|}_{=0,\text{ da } g\in F}$$

$$= 2T^*(f-g).$$

Sei $\lambda > 0$ fest. Es gilt also:

$$\mu[h > 2\lambda] \leq \mu[T^*(f-g) > \lambda] \underset{\text{max. Ungl.}}{\leq} C\left(\frac{\lambda}{\|f-g\|_1}\right) \xrightarrow[g\in F]{g\to f} 0$$

D.h.: $\mu[h > 2\lambda] = 0 \quad \forall \lambda > 0 \Rightarrow h = 0$ f.ü. (da $h \geq 0$).

Also gilt $f \in F$. ∎

## 5. Maximaler Ergodensatz und Ende des Beweises des Birkhoff-Ergodensatzes.

Beobachtung: $\forall (a_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \text{ konv.} \Longleftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} a_n \text{ konv.}$$

(mit demselben Limes)!

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} a_n = \underbrace{\frac{a_0}{N}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{N-1}{N}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1} a_n$$

Für Birkhoff reicht es also zz:

$$S_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n$$

erfüllen eine max. Ungl.

$\boxed{\text{Thm. 6}}$ (Maximaler Ergodensatz)

Sei $(X, \mu, T)$ ein MDS, $f \in L^1(X, \mu)$ sei reellwertig. Dann gilt $\forall N \in \mathbb{N}$

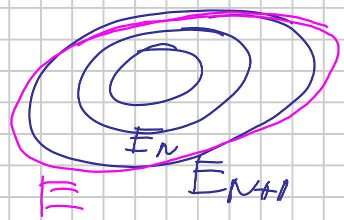
$$\int_{\{x:\, f(x) + \ldots + (T^n f)(x) > 0 \text{ für ein } n \leq N\}} f \, d\mu \geq 0$$

Insbesondere gilt:

$$\int_{\{x:\, f(x) + \ldots + (T^n f)(x) > 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}} f \, d\mu \geq 0.$$

__Beweis__ „Insb." folgt aus der Tatsache, dass die Mengen

$$E_N := \{ x : f(x) + \dots + (T^n f)(x) > 0 \text{ für ein } n \leq N \} \nearrow$$




und $\bigcup_N E_N = \{ \text{—"—} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \} =: E$

Zz: $\int_{E_N} f \, d\mu \geq 0$.

Sei $N \in \mathbb{N}$ und def.

$$f_0 = 0$$
$$f_1 := f$$
$$\vdots$$
$$f_n = f + Tf + \dots + T^{n-1} f$$
$$F_N := \max\{ f_0, \dots, f_N \} \geq 0$$

Es gilt: $F_N \geq f_n \quad \forall n = 0, \dots, N$. Daraus folgt:

$$T F_N + f \underset{T \geq 0}{\geq} T f_n + f = f + Tf + \dots + T^n f = f_{n+1}$$

$\forall n \in \{0, \dots, N\}$

Insbesondere:

$$T F_N + f \geq \max\{ f_1, \dots, f_N \}$$

Sei $x \in E_N$, d.h., $F_N(x) > 0$. Dann ist

$$TF_N + f \geq F_N \quad (\text{auf } E_N)$$

Da $F_N \geq 0$ (und damit $TF_N \geq 0$), haben wir:

$$\int_{E_N} f\,d\mu \geq \int_{E_N} F_N - \int_{E_N} TF_N \underset{F=0 \text{ auf } X \setminus E_N}{=} \int_X F_N - \int_{E_N} TF_N$$

$$\underset{TF_N \geq 0}{\geq} \int_X F_N\,d\mu - \int_X \cancel{T}F_N = 0$$

■

Als Korollar bekommen wir:

$\boxed{\text{Thm. 7}}$ (Maximale Ungleichung)

Sei $(X,\mu,T)$ ein MDS, $f \in L^1(X,\mu)$. Dann gilt

$$\boxed{\mu\{x : (S^*f)(x) > \lambda\} \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}}$$

insbesondere gilt die max. Ungleichung für den Max'operator

$$S^*f = \sup_N \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^n f\right|$$

und die Fkt $c$ mit $\boxed{c(\lambda) = \frac{1}{\lambda}}$.

<u>Beweis</u> Betrachte $|f|-\lambda$ - reellwertig $(\lambda > 0)$.

Der max. Ergodensatz liefert:

$$\int_{\{x:\ \exists n\in\mathbb{N}:\ \underbrace{|f|(x)+\ldots+T^{n-1}|f|(x)-n\lambda>0}_{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T^j|f|(x)>\lambda}\}} (|f|-\lambda)\, d\mu \geq 0 ,$$

d.h.:

$$\|f\|_1 \geq \int_{\{x:\ \overset{\exists n:}{\wedge}\ \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j|f|(x)>\lambda\}} |f|\, d\mu \geq \int_{-\,\|\,-} \lambda\, d\mu = \lambda\cdot\mu\left\{x: \exists n: \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j|f|(x)>\lambda\right\}$$

Da $\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j f\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j|f|$, impliziert das

$$\frac{\|f\|_1}{\lambda} \geq \mu\{x: \underbrace{\exists n: \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j f\right|(x)>\lambda}_{S^* f(x)>\lambda}\} = \mu\{x: (S^* f)(x)>\lambda\}.$$

$\blacksquare$

<u>Beweis des Birkhoffschen Ergodensatzes (Zusammenfassung)</u>

Wie im Beweis von von Neumann bzw.

$$S_N f := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} T^j f$$

f.ü. auf

$$D := \underbrace{\mathrm{Fix}\,T}_{\text{gegen } P_{\mathrm{Fix}\,T} f} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{(I-T)(L^\infty(X,\mu))}_{\text{gegen } 0}$$

$D$ ist dicht in $L^1(X,\mu)$ (von Neumannsche Zerlegung) und

$$D \subset F := \{ f \in L^1 : S_N f \text{ konv. f.ü.} \}$$

Nach Thm. 7 (max. Ungl.), gilt

$$\mu(\{x : (S^* f)(x) > \lambda\}) \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall f \in L^1$$

für den Maximaloperator

$$S^* f := \sup_N |S_N f|$$

Nach Thm. 5 (Banachsches Prinzip) ist $F$ abgeschlossen in $L^1$.

Also ist $F$ dicht und abg. in $L^1 \Rightarrow F = L^1(X,\mu)$.

Also konv. $\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} T^j f$ f.ü. $\Leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N} T^j f$.

■