Note Title 10.04.2019

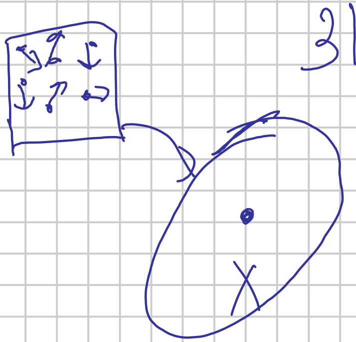
Ergodentheorie

0. Was ist Ergodentheorie?

Ursprung: ~ 1880, Boltzmann, statistische Mechanik.

Gegeben: Raum in $\mathbb{R}^3$, ideales Gas, k Teilchen

$3k$ (geom.) Koordinaten + $3k$ Geschwind. $= 6k$ (Freiheitsgrad)

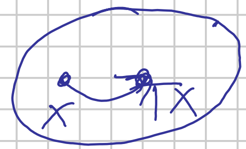


D.h., Zustand des Systems = Punkt in $\mathbb{R}^{6k}$

Nicht alle Zustände möglich (geom. + physikalisch)

Sei $X := \{$ alle möglichen Zustände des Systems $\}$ – der Zustandsraum

Das System verändert sich in einer Zeiteinheit (z.B. Sekunde) laut einem physikal. Gesetz $\rightsquigarrow$ $T: X \to X$ – Transformation

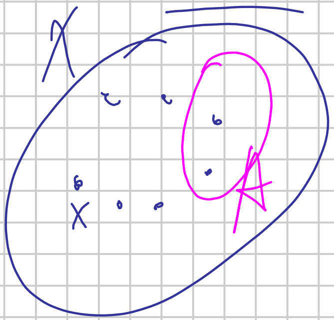


Der Orbit $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$ beschreibt die Entwicklung des Systems im Laufe der Zeit.

Frage: Wie verhält sich $T^n x$, n groß? $(n \to \infty)$
(asymptotisches Verhalten)

Schwierigkeiten:
- x nicht immer vollständig bekannt
- auch wenn doch, $T^n x$ schwierig zu berechnen.

Idee (Boltzmann): statistischer Zugang: $x \in A$ oder $x \notin A$ ist leichter zu prüfen als x zu bestimmen.



Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $T^n x \in A$ liegt?
(Wie oft besucht $T^n x$ die Menge A?)

Boltzmann-Ergodenhypothese: Die Zeit, die der Orbit in $A \subset X$ verbringt, ist im Mittel und asymptotisch gleich $\mathrm{Vol}(A)$: „Zeitmittel = Raummittel"

Mathematisch: $\dfrac{\#\{n \in \{1, \dots, N\} : T^n x \in A\}}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathrm{Vol}(A)$

Oder:

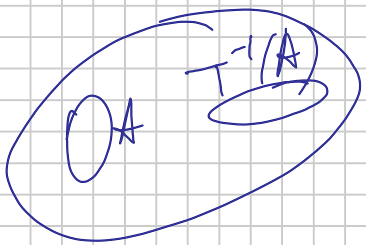
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mathbb{1}_A(T^n x)}_{= \begin{cases} 1, & T^n x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} = \int \mathbb{1}_A \, d\mu \qquad (\mu = \mathrm{Vol.})$$

Frage: Für welche T, f, x gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^n x) = \int f \, d\mu \, ?$$

($f \sim$ Observablen)

Bemerkung: Physik (Satz von Liouville) $\Rightarrow$ T erhält das Volumen:



$$\mathrm{Vol}(T^{-1}(A)) = \mathrm{Vol}(A) \quad \forall A \subset X \text{ meßbar.}$$

Wir haben also ein System (X, Vol, T), T Vol-treu.
(X: Zustandsraum)

Ergodentheorie: Theorie von maßtreuen Transformationen und Verhalten von Orbits von Punkten / Mengen.

Bem. Ursprung von „Ergoden" nicht klar:

- ergodos = schwierig
- ergon = Arbeit, odos = Weg

I Maßtheoretische dynamische Systeme

1. Definition und Beispiele

Sei (X, Σ, μ) ein W'Raum.

Wir nehmen an:

- μ ist vollständig, d.h., $\left.\begin{matrix}\mu(A)=0\\ B\subset A\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu(B)=0$
- Σ ist von einer abz. Familie (+ Nullmengen) erzeugt.
  (z. B. X sep. metr. Raum, Σ Borel)

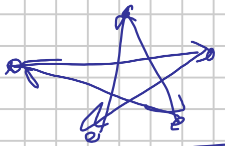
$\boxed{\text{Def. 1.1}}$ Sei (X, Σ, μ) ein W'Raum (schreibe oft (X, μ)) und sei $T: X \to X$ meßbar und μ-treu, d.h.,

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma .$$

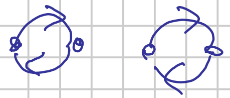
Dann heißt (X, μ, T) ein maßtheoretisches dynamisches System (MDS)

$\boxed{\text{Bsp 1.2}}$ (endliche Systeme)

X endliche Menge, μ das reskalierte Zählmaß, T bij.



Dann ist (X, μ, T) ein MDS.



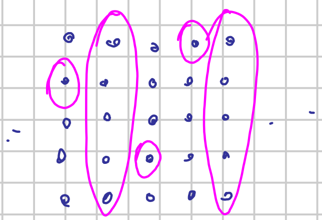
$\boxed{\text{Bsp 1.3}}$ (Bernoulli-Shifts)

1) Zweiseitige Shifts: sei $k \in \mathbb{N}$, $X := \{0, \dots, k-1\}^{\mathbb{Z}}$

$T \leftarrow$: $T((x_j)) := ((x_{j+1}))$

$\Sigma :=$ Produkt-σ-Algebra, erzeugt von Zylindern

$$U_{n, \underset{\in \mathbb{Z}}{j_1}, \dots, \underset{\in \mathbb{Z}}{j_n}, \underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\in \{0, \dots, k-1\}}} := \{x : x_{j_1} = a_1, \dots, x_{j_n} = a_n\}$$



Σ ist T-inv., da Zylinder $\longleftrightarrow$ Zylinder.

Sei p ein W'Maß auf $\{0, \dots, b-1\}$, $p(\{j\}) =: p_j$

Def.
$$\mu\left(U_{n, j_1, \dots, j_n, a_1, \dots, a_n}\right) := p_{a_1} \cdot \dots \cdot p_{a_n}.$$

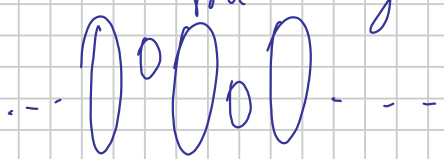
und erweitere μ auf Σ (Erweiterungssatz von Carathéodory
- Zyl. $\cap$ Zyl. = Zyl. oder $\emptyset$,
$X \setminus$ Zyl. = endl. $\cup$ von Zylindern)

μ heißt Produktmaß auf Σ, das zu p gehört.

Es gilt: $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) = \mu(TA)$, da wahr für Zylinder.

Das MDS (X, Σ, μ, T) heißt invertierb. (oder zweiseitiges) Bernoulli-System.

Bem. Das ist ein Spezialfall eines Produktsystems $\prod_{n=-\infty}^{\infty} Y$ für ein W'Raum (Y, Σ_Y, P) mit Zylindern
$$U_{n, j_1, \dots, j_n, B_1, \dots, B_n} := \left\{x : \begin{array}{l} x_{j_1} \in B_1 \\ \vdots \\ x_{j_n} \in B_n \end{array}\right\}$$



2) **Einseitiger Shift**

$X = \{0, \dots, b-1\}^{\mathbb{N}}$, $T \leftarrow$, Zylindermengen wie früher, μ auch

Es gilt $\mu(U_{n,\dots}) = \mu(\underbrace{T^{-1}(U_{n,\dots})}_{\text{nach rechts verschob. Zylinder}})$,

also ist (X, μ, T) ein MDS, ein einseitiges Bernoulli-System.

$\boxed{\text{Bsp 1.4}}$ (Gruppenrotationen)

Sei G eine kompakte Gruppe (komp. Raum + Gruppe + $\left.\begin{array}{l} \cdot : G \times G \to G \\ (\cdot)^{-1} : G \to G \end{array}\right\}$ stetig),

sei Σ ihre Borel-σ-Algebra. Dann $\exists!$ W' Maß μ auf Σ, das linksrotationsinvariant ist, d.h.,

$$\mu(a \cdot A) = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma \quad \forall a \in G$$ – ohne Beweis

Dieses μ heißt Haarmaß auf G.

Eigenschaften des Haarmaßes (ohne Beweis):

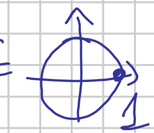
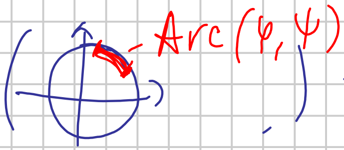
- μ ist automatisch rechtsinvariant,
  d.h., $\mu(A \cdot a) = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma \ \forall a \in G$

- μ ist invar. unter $g \mapsto g^{-1}$, d.h.,
  $$\mu(\underbrace{A^{-1}}_{=\{g^{-1} :\, g \in A\}}) = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma$$

- $\operatorname{supp} \mu = G$, d.h., $\forall U \subset G$ offen $\mu(U) > 0$.

Oft weiß man, was μ ist.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Auf $[0,1)$ (mit $+$ mod 1) ist $\mu = \text{Leb}$ das eindeutige inv. W'Maß.

Auf $\mathbb{T} =$  : $\mu\Big($  $\Big) = \dfrac{\psi - \varphi}{2\pi}$ – resk.al. Leb'Maß.

2) G endl. diskrete Gruppe, $\mu(A) = \dfrac{|A|}{|G|}$ – resk. Zählmaß, eind. $\Rightarrow$ Haar.

Das MPS (G, μ, a) heißt Rotationssystem (bzw. Links- oder Rechtsrot.)

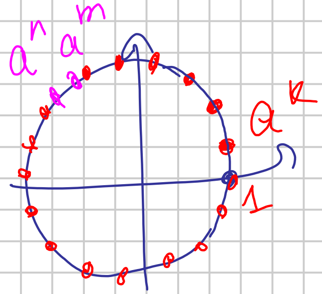
__Achtung__: Für ein festes a kann es andere a-inv. W'Maße geben:

$\boxed{\text{Bsp}}$ $(\mathbb{T}, a)$ __Fall 1__: a rational (d.h., $\exists d : a^d = 1$)

Ü: beschreibe alle a-inv. Maße.

__Fall 2__ a irrat. $\exists!$ a-inv. Maß (= resk. Lebesgue)

ZZ: μ ist a-inv. $\overset{ZZ}{\Longrightarrow}$ g-inv. $\forall g$ $\Rightarrow$ Haar



__Schritt 1__: Wir zeigen: $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{T}$

a irrat. $\Rightarrow$ $a^n \neq a^m$ für $n \neq m$

Sei $\varepsilon > 0$. Schubfachprinzip: $\exists n, m$ mit $n \neq m$: $|a^n - a^m| < \varepsilon$

$\exists k = |n-m|$ mit $|a^k - 1| < \varepsilon$

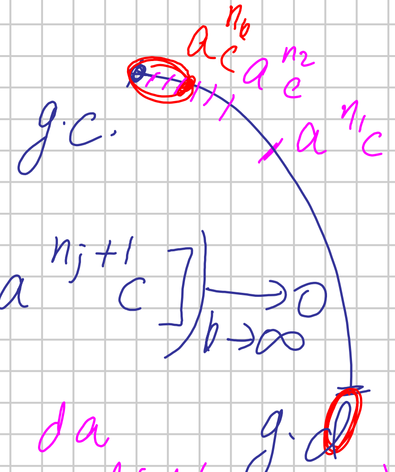
Also ~~hat~~ $\forall$ Zahl in $\mathbb{T}$ Abstand $< \varepsilon$ zu einer Zahl der Form $1, a^k, a^{2k}, \ldots$

$\Rightarrow$ a^n liegen dicht in $\mathbb{T}$.

__Schritt 2__ Sei $g \in \mathbb{T}$. ZZ: $\mu(gA) = \mu(A)$ $\forall A = [c,d]$ (OBdA)

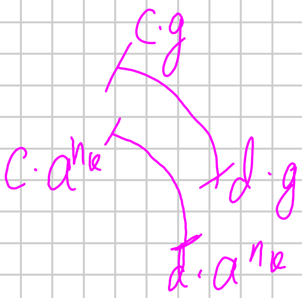
Nach Schritt 1 $\exists\, a^{n_j} \longrightarrow g$, OBdA $a^{n_j} \nearrow g$ (d.h., $\arg(a_{n_j}) \leq \arg(g)$)

ZZ: $\underbrace{\mu(a^{n_j} A)}_{=\mu(A) \text{ nach Vorauss.}} \longrightarrow \mu(gA)$



Es gilt: $\mu[a^{n_k}c, gc] \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{j=k}^{\infty} \mu([a^{n_j}c, a^{n_{j+1}}c]) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

(∄ keine Atome von μ, da μ a-inv. und $\{a^{n_j}\}$ dicht liegen)



$$\mu(a^{n_k} A) = \mu([a^{n_k}c, a^{n_k}d]) = \mu([gc, gd]) + \underbrace{\mu([a^{n_k}d, gd])}_{\to 0} - \underbrace{\mu([a^{n_k}c, gc])}_{\to 0}$$

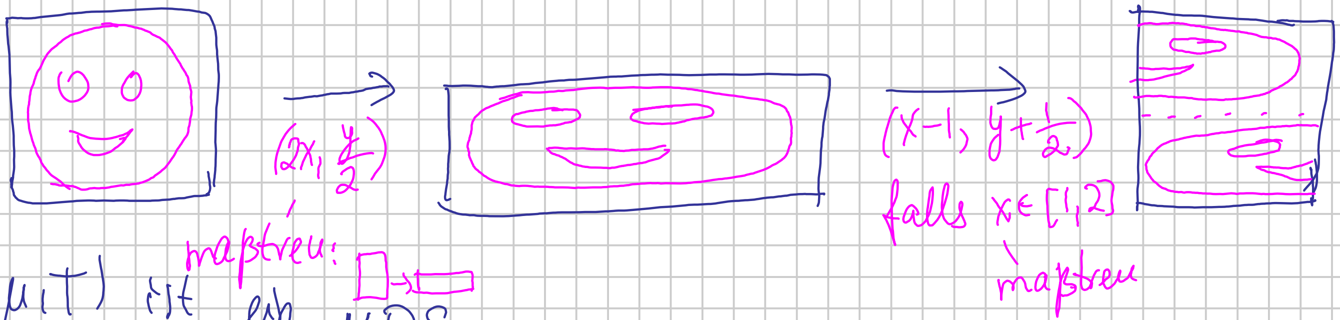
$$\longrightarrow \mu([gc, gd]) = \mu(gA).$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp 5}}$ (Bäcker-Transformation)

$X := [0,1]^2$ mit $\mu = \text{Leb}^2$, $T: X \to X$ def. durch

$$T(x,y) := \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (2x-1, \frac{y+1}{2}), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



(X, μ, T) ist ein MDS

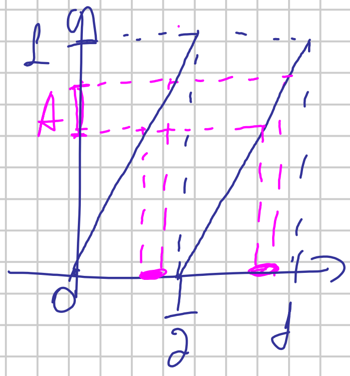
$\boxed{\text{Bsp 6}}$ (Verdoppelungsabb.) – doubling map

$X := [0,1]$ mit $\mu = \text{Leb}$, $T : X \to X$ mit

$$Tx = 2x \bmod 1 = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x-1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\mu(T^{-1}[a,b]) = 2 \cdot \frac{b-a}{2} = b-a \quad \forall [a,b] \subset [0,1]$,

d.h., (X, μ, T) ist ein MDS.

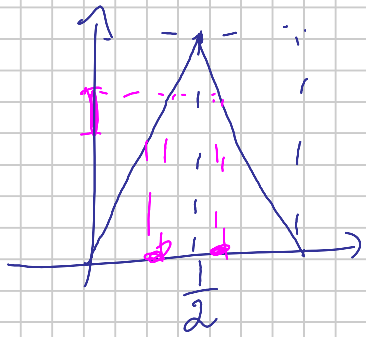


$\boxed{\text{Bsp 7}}$ (Zeltabb.)

$X = [0,1]$ mit $\mu = \text{Leb.}$, $T : X \to X$:

$$Tx = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2-2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

– auch ein MDS.

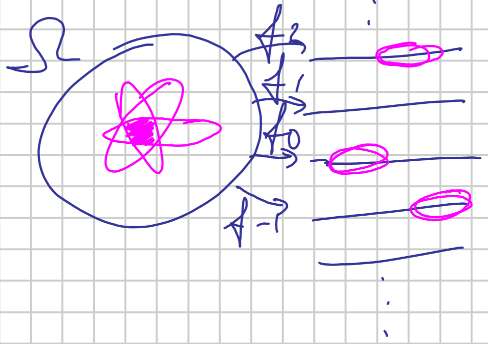


$\boxed{\text{Bsp 8}}$ (Stationäre stochastische Prozesse)

Sei (Ω, P) ein W'Raum, $\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbare Fkt, d.h., Zufallsvariablen.

Ang., der Prozess ist stationär, d.h.,

$\forall m \in \mathbb{N} \ \forall n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z} \ \forall B_1, \ldots, B_m \subset \mathbb{R}$ Borel $\forall k \in \mathbb{Z}$



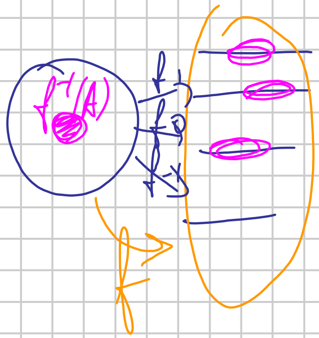
$$P\left\{\omega \in \Omega : \begin{array}{l} f_{n_1}(\omega) \in B_1 \\ \vdots \\ f_{n_m}(\omega) \in B_m \end{array}\right\} = P\left\{\omega \in \Omega : \begin{array}{l} f_{n_1+k}(\omega) \in B_1 \\ \vdots \\ f_{n_m+k}(\omega) \in B_m \end{array}\right\},$$

d.h.,

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} f_{n_j}^{-1}(B_j)\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{m} f_{n_j+k}^{-1}(B_j)\right) \quad (*)$$

Sei $X = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots), x_j \in \mathbb{R} \ \forall j\}$

Def. $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ mit $f(\omega) = (\ldots, f_{-1}(\omega), f_0(\omega), f_1(\omega), \ldots)$



Für $A \subset X$ Borel def.

$$\mu(A) := P(f^{-1}(A))$$

Betrachte $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mu, T)$ ← Shift: $\leftarrow$ bzw. $\downarrow$

Da $f^{-1}(\text{Zylinder})$ die Form

$$\bigcap_{j=1}^{m} f_{n_j}^{-1}(B_j)$$

hat, gilt nach $(*)$:

$$\underbrace{\mu(\text{Zylinder})}_{} \overset{\text{Def. v. }\mu}{=} P(f^{-1}(\text{Zylinder})) \overset{(*)}{=} P(f^{-1}(T^{-1}(\text{Zyl.}))) \overset{\text{Def. v. }\mu}{=}$$

$$= \underbrace{\mu(T^{-1}(\text{Zyl.}))}_{}$$

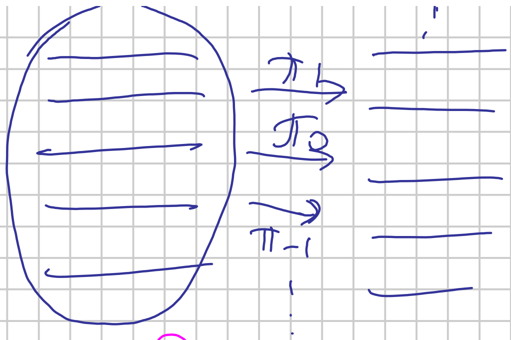
d.h., T ist μ-inv. und $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$ ist ein MDS.

Umgekehrt, sei $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$ ein MDS, d.h., μ sei $\leftarrow$-invariant auf $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Wir zeigen: $\exists (\Omega, P, (f_j))$, die dazu gehören.

Def. $\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $f_j := \pi_j$ – j-te Projektion,

$P := \mu$



$=: \Omega$

- $\forall \pi_j$ ist meßbar:

  $\pi_j^{-1}(B) =$ Zylinder, also meßbar

- Stationär:

$$\mu\left(x : \begin{array}{l} x_{n_1} \in B_1 \\ \vdots \\ x_{n_m} \in B_m \end{array}\right) \overset{\mu\ \leftarrow\text{-inv.}}{=} \mu\left(x : \begin{array}{l} x_{n_1+k} \in B_1 \\ \vdots \\ x_{n_m+k} \in B_m \end{array}\right)$$

$\pi_{n_m}(x) \in B_m$

- $\mu(A) \overset{?}{=} \underbrace{P}_{\mu}(\underbrace{f}_{\pi}^{-1}(A)) = \mu(\pi^{-1}(A))$

  – wahr, da $A = \pi^{-1}(A)$,

Also entspricht dieses (Ω, P, π) dem vorgegebenen $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mu, \leftarrow)$

D.h.,

stationäre stoch. Prozesse $\longleftrightarrow$ shiftinv. W'Maße auf $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$

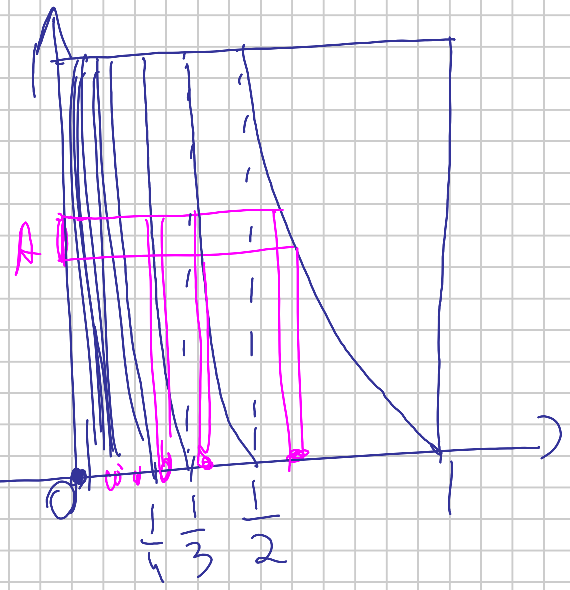
Bem. Dieselbe Konstruktion macht man auch für $\mathbb{N}_0$ statt $\mathbb{Z}$, d.h.,
"$\mathbb{N} \cup \{0\}$"

$f_0, f_1, f_2, \dots$

Bsp 4.8 (Gauß-Transformation)

Sei $X := [0,1]$, $Tx := \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = \{\frac{1}{x}\}$ Bruchteil

für $x \neq 0$, $T0 := 0$.



Es gilt $\forall x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ $Tx = \frac{1}{x} - n$

Daraus folgt $T^{-1}(\{y\}) = \{\frac{1}{y+n}, n \in \mathbb{N}\}$ (*)

Sei μ: $\mu(A) := \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dx}{x+1}$

W'Maß: $\mu([0,1]) = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \frac{\log 2 - \cancel{\log 1}}{\log 2} = 1$

<u>Behauptung</u>: T ist μ-treu. Es reicht zz: $\mu(T^{-1}[0,b]) = \mu([0,b])$

solche int. erzeugen die Σ-Alg.

$$\log 2 \cdot \mu(T^{-1}([0,b])) \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{b+n}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{1}{b+n}\right)\right]$$

$$\log \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{b+n}}$$

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{b+n}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{1+b+n}{b+n}} = \frac{1+\frac{b}{n}}{1+\frac{b}{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1+\frac{b}{n}\right) - \log\left(1+\frac{b}{n+1}\right)\right] = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{b}{n+1}}^{\frac{b}{n}} \frac{dx}{1+x}}_{= \int_0^b \frac{dx}{1+x}}$$

$$= \log 2 \cdot \mu([0,b])$$

Also ist (X, μ, T) ein MDS.

$\boxed{\text{Def}}$ (Kettenbruchentwicklung)

Sei $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Schreibe $x = \frac{1}{a_1 + r_1}$ $\quad a_1 \in \mathbb{N}$, $r_1 \in (0,1)$ irrat.

Wiederhole: $r_1 = \frac{1}{a_2 + r_2}$, ..., d.h.,

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

— Kettenbruchentwicklung

Bombelli (1579), Lagrange und Euler

Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt Kettenbruchkoeffizienten

Schreibweise: $x = [0; a_1, a_2, \dots]$

Eigenschaften von (a_n)

Def.: $\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_n}}} \in \mathbb{Q}$, $(p_n, q_n) = 1$.

Es gelten (ohne Details)

- $$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \dots < x < \dots < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$
  und $\frac{p_n}{q_n} \to x$ (d.h., $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \nearrow x \nwarrow \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$)

- $$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

- $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ ist die beste rationale Approximation mit Nenner $\leq q_n$,
  d.h. $\forall \frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ mit $q \leq q_n$
  $$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

- $\forall (a_n) \subset \mathbb{N} \ \exists \lim \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$,
  d.h.,
  $$x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \longleftrightarrow [0; a_1, a_2, \dots]$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\pi - 3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \dots}}}$

Bsp $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \phi$:

$\frac{1}{1+\phi} = \phi \Rightarrow \phi^2 + \phi - 1 = 0$ ...

$\to$ gold. Schnitt

$\boxed{\text{Prop}}$ Sei $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Dann gilt: $\forall n$

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor \in \mathbb{N}.$$

Beweis Induktion nach n: Wir zeigen: $a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor$, $r_n = T^n x$

$n=1$: $\quad x = \frac{1}{a_1 + r_1}$, $r_1 \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{x} = a_1 + r_1$, d.h., $a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

$r_1 = \left\{ \frac{1}{x} \right\} = Tx$

$n \rightsquigarrow n+1$: $\quad r_n = \frac{1}{a_{n+1} + r_{n+1}}$

$\frac{1}{r_n} = a_{n+1} + r_{n+1}$, d.h., $a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{r_n} \right\rfloor \overset{IV}{=} \left\lfloor \frac{1}{T^n x} \right\rfloor$

$r_{n+1} = \left\{ \frac{1}{r_n} \right\} \overset{IV}{=} \left\{ \frac{1}{T^n x} \right\} = T^{n+1} x$. ∎

$\boxed{\text{Lemma 8}}$ Sei (X,μ) ein W'Raum und $T: X \to X$ meßbar.

Dann ist T μ-treu $\Longleftrightarrow$

$$(*) \quad \boxed{\int_X f \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu} \quad \forall f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$$

meßbar, beschr.

Wenn das der Fall ist, gilt diese Formel $\forall f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$

Bem. (*) für $f = \mathbb{1}_A$ bedeutet: $\mu(A) = \int \underbrace{\mathbb{1}_A(Tx)}_{= \begin{cases} 1, & Tx \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} d\mu = \int \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} = \mu(T^{-1}A)$,

also: $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

Dabei haben wir bewiesen, dass:

$$\boxed{\mathbb{1}_A(Tx) = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}} \quad \forall A \text{ meßbar}$$

Beweis "$\Leftarrow$" folgt aus der Bemerkung.

"$\Rightarrow$" + Zusatz: Aus Bem. folgt: (*) gilt $\forall f = \mathbb{1}_A$.

Linearität: (*) gilt $\forall$ einfache Fkt f.

Sei $f \in L^1(X, \mu)$, oBdA: $f \geq 0$. Dann $\exists f_n \nearrow f$ f.ü.; $\forall f_n$ einfach und damit:

$$\int f_n(x)\,dx = \int f_n(T(x))\,dx$$

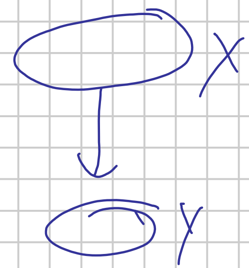
siehe oben

Satz von monot. Konv.

$$\int f \qquad\qquad \int f \circ T$$

∎

2. Grundkonstruktionen



Def. 9 (Faktoren, Erweiterungen, Isomorphismen)
Seien (X,μ,T) und (Y,ν,S) zwei MDS.

(1) (Y,ν,S) heißt Faktor von (X,μ,T) (und (X,μ,T) heißt Erweiterung von (Y,ν,S)), wenn:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "S"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\exists X' \subset X$ mit $\mu(X')=1$ und $TX' \subset X'$

$\exists Y' \subset Y$ mit $\nu(Y')=1$ und $SY' \subset Y'$

$\exists \varphi : X' \to Y'$ maßtreu $(\mu(\varphi^{-1}(A)) = \nu(A)\ \forall$ meßb. $A \subset Y')$

$$\varphi(Tx) = S(\varphi x) \quad \forall x \in X'.$$

(2) (X,μ,T) und (Y,ν,S) heißen isomorph, wenn φ in (1) bij gewählt werden kann (mit φ^{-1} maßtreu).

Bem. T maßtreu, TA meßbar $\Rightarrow \mu(TA) \geq \mu(A)$

Bew. $\mu(TA) \overset{\text{maßtreu}}{=} \mu(\underbrace{T^{-1}(TA)}_{\supseteq A}) \geq \mu(A)$ ∎

insbesondere gilt: $\varphi : (X,\mu,T) \to (Y,\nu,S)$ ein Faktor mit $\varphi(X')$ meßbar

$\Rightarrow \nu(\varphi(X')) = 1 \quad (\text{da} \geq \mu(X') = 1)$,

d.h., φ ist fast surjektiv.

$\boxed{\text{Bsp 10}}$ Sei $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, $\mu = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ d.h., $p(0) = \frac{1}{2} = p(1)$.

$T: X \to X \;\leftarrow\; T(x_0, x_1, \dots) := (x_1, x_2, \dots)$ – Bernoulli shift.

Sei $Y := [0,1]$ mit $\nu := \text{Leb}$

Betr. $\Phi: \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \to [0,1]$ mit $\varphi(x_0, x_1, \dots) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$

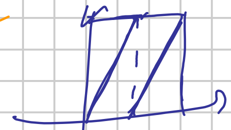
Finde S: φ ein Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \arrow[d, "\varphi"] \\ {[0,1]} \arrow[r] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{S\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}\right)} = S(\varphi(x)) \underset{\text{notwendig}}{=} \varphi(Tx) =$$

$$= \varphi(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$$

D.h., $Sy = 2y \mod 1$ (Verdoppelungsabb.)



Φ entspricht der Binärdarstellung von $x \in [0,1]$, also eine Bijektion bis auf endliche Darstellungen bzw. dyadische Zahlen $\{\frac{m}{2^n}, m \leq 2^n\}$

ZZ: φ ist μ-ν-treu: φ^{-1}(dyadisches Intervall) = Zylinder

$$\mu(\varphi^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))) \underset{\uparrow}{=} \tfrac{1}{2} = \mu(\varphi^{-1}((\tfrac{1}{2},1])) \text{ usw.}$$

Def. des Produktmaßes

Also gilt: $(X,\mu,T) \underset{\text{isomorph}}{\sim} (Y,\nu,S)$

$\boxed{\text{Def. 11}}$ Seien (X,μ,T), (Y,ν,S) zwei MDS. Das **Produktsystem** ist $(X\times Y, \underbrace{\mu\times\nu}_{\text{Produktmaß}}, T\times S)$, wobei

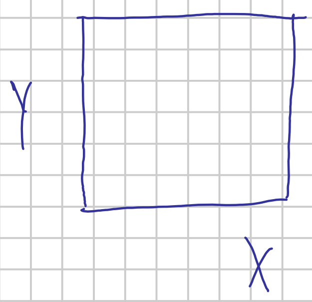
- $(T\times S)(x,y) = (Tx, Sy)$
- Σ-Algebra auf $X\times Y$ von $\underset{\in\Sigma_x}{A}\times \underset{\in\Sigma_y}{B}$ erzeugt

$$(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B)$$

Analog: Produkte von mehr Systemen.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathbb{T}^d$, $T(x_1,\dots,x_d) := (a_1x_1,\dots,a_dx_d)$, μ = Lebesgue (d-dim.)

$\boxed{\text{Def. 12}}$ (**Schiefprodukte**) Sei (X,μ,T) ein MDS, (Y,ν) W'Raum,



$\Phi : X \times Y \to Y$ meßbar s.d. für f.a. $x \in X$

$\Phi(x, \cdot) : Y \to Y$ ν-treu

(d.h.: $\nu(A) = \nu(\{y \in Y : \Phi(x,y) \in A\})$)

Def.: $S : X \times Y \to X \times Y$

$S(x,y) := (Tx, \Phi(x,y))$

Behauptung S ist $\mu \times \nu$-treu.

Beweis

$$(\mu \times \nu)(S^{-1}(A \times B)) = \int_{X \times Y} \underbrace{\mathbb{1}_{S^{-1}(A \times B)}}_{\mathbb{1}_{A \times B}(S(x,y))} \, d(\mu \times \nu)$$

$$= \int_{X \times Y} \underbrace{\mathbb{1}_{A \times B}(Tx, \Phi(x,y))}_{\mathbb{1}_A(Tx)\, \mathbb{1}_B(\Phi(x,y))} \, d(\mu \times \nu)(x,y)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_X \underbrace{\left[\int_Y \mathbb{1}_B(\Phi(x,y)) \, dy \right]}_{\nu(\{y : \Phi(x,y) \in B\}) = \nu(B)} \mathbb{1}_A(Tx) \, dx$$

$$= \nu(B) \cdot \int \mathbb{1}_A (\cancel{T}x)\,dx = \nu(B)\cdot\mu(A) = (\mu\times\nu)(A\times B) \qquad \blacksquare$$

Also ist $(X\times Y, \mu \overset{\times}{\times} \nu, S)$ ein MDS – Schiefprodukt zu Φ.

Wenn $Y = G$ eine komp. Gruppe mit $\nu =$ Haar und

$$\Phi(x,g) = \varphi(x)\cdot g \quad \text{für } \varphi : X \to G \text{ meßbar},$$

dann heißt $(X\times G, S)$ eine Gruppenerweiterung von (X,μ,T). (warum Spezialfall?)

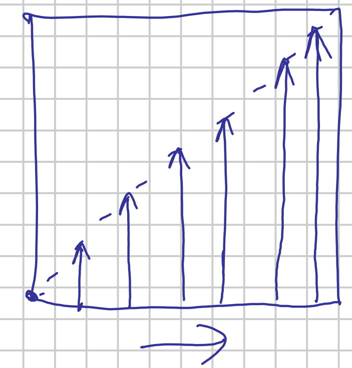
Ü: Eine Gruppenerweiterung ist eine Erweiterung von (X,μ,T)

Bsp $\mathbb{T}^2$, $S(x,y) = (\alpha + x, x+y)$

(oder multiplikativ $S(z,w) := (\lambda z, zw)$)

(d.h., $Tx = x+\alpha$, $\varphi(x) = x$).

Ü Berechnen Sie $S^n(x,y)$ für $n\in\mathbb{N}$.



$(\mathbb{T}^2, S)$ ist eine Erweiterung von $(\mathbb{T}, \mathrm{Leb}, +\alpha)$

Bem.: Schiefprodukte sind Erweiterungen von (X,μ,T)

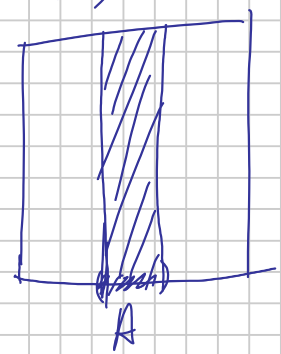
bzgl. $\varphi = \pi : X \times Y \to X$, $\quad \pi(x,y) := x$.

$$\begin{array}{ccc} X\times Y & \xrightarrow{S} & X\times Y \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

Ref.: $\tilde{\mu}$

π ist maßtreu:

$(\mu\times\nu)(\pi^{-1}(A)) = \mu(A)$



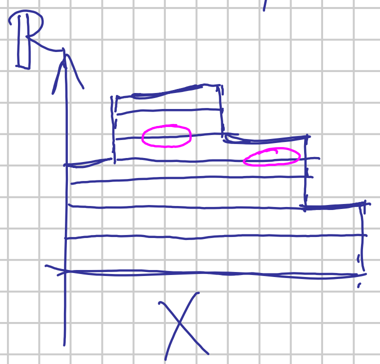
$\boxed{\text{Bsp + Def. 13}}$ (Transformationen unter einer Fkt)

Sei (X,μ,T) ein MDS, $f : X \to \mathbb{N}$ einfach, d.h.,

$$f = \sum_{j=1}^{m} n_j \mathbb{1}_{A_j}$$

mit A_j meßbar disjunkt (bis auf Nullmenge) und eine Zerlegung von X

$n_j \in \mathbb{N}$.

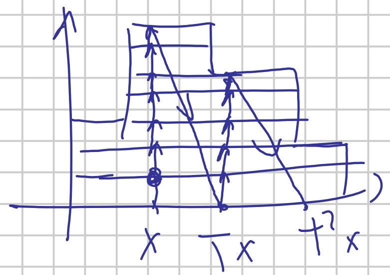


Sei $D := \{(x,n) : x \in X,\ n \in \{0,\dots,f(x)\}\} \subset X \times \mathbb{N}_0$

mit Produktmaß $\nu(A \times \{n\}) := \mu(A)$ $\quad \forall A \subset A_j$, $\forall n \in \{0,\dots,n_j\}$

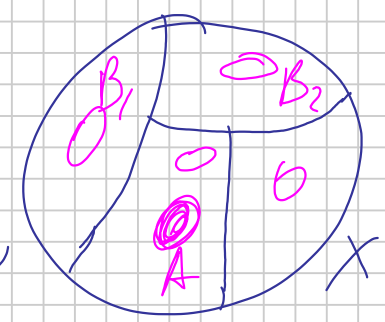
dividiert durch $\nu(D)$

Def. $S: D \to D$ so:



$$S(x,n) := \begin{cases} (x, n+1), & \text{falls } (x,n+1) \in D \\ (Tx, 0) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen: S ist maßtreu.



Sei $A \subset A_k$. Def. $B_j := T^{-1}(A) \cap A_j$,

d.h., $T^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, B_j disjunkt.

Sei $n \in \{1, \dots, n_k\}$

$S^{-1}(A \times \{n\}) = A \times \{n-1\}$ – dasselbe Maß

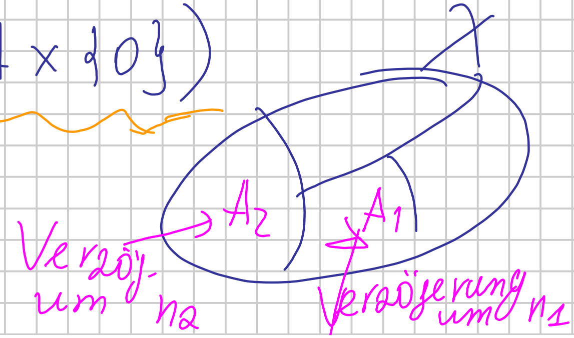
Für $n=0$: $\nu(S^{-1}(A \times \{0\})) = \sum_{j=1}^{m} \nu(B_j \times \{n_j\})$

$= \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \mu(\cancel{T}^{-1}(A))$

$\overset{\uparrow}{=} \mu(A) = \nu(A \times \{0\})$

T ist μ-treu

Also ist (D, ν, S) ein MDS

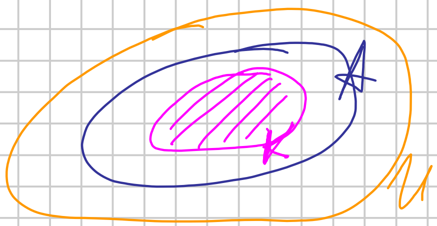


3. Invariante Maße für topologische dynamische Systeme

Sei X komp. metrischer Raum, $T: X \to X$. Dann heißt (X,T) ein <u>topologisches dynamisches System</u>. (TDS)

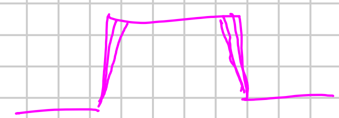
<u>Frage:</u> $\exists \mu$ Borelmaß (W'Maß) s.d. (X,μ,T) ein MDS ist, d.h., dass T μ-inv. ist?

<u>Bem.</u> 1) $\forall$ Borelmaß μ auf X ist <u>regulär</u>, d.h., $\forall A$ meßbar

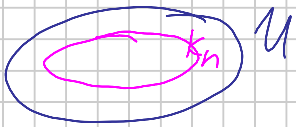


$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ komp.}\}$$
$$= \inf\{\mu(U),\ U \supset A \text{ offen}\}$$

2) $\forall U \subset X$ offen $\exists (f_n) \subset C(X)$: $0 \le f_n \nearrow 1\!\!1_U$



<u>Beweis</u> Betrachte (K_n) komp. Mengen, $K_n \subset U$, $K_n \nearrow$, $\bigcup K_n = U$,

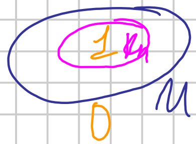


z.B. $K_n := \{ x \in \mathcal{U} : d(x, \partial\mathcal{U}) \geq \frac{1}{n} \}$ – abg., also komp. (da X komp.)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \{ x \in \mathcal{U} : d(x, \partial\mathcal{U}) > 0 \} = \mathcal{U}$.

Behauptung: $\forall n \; \exists f_n \in C(X)$ mit $f = \begin{cases} 1 & \text{auf } K_n \\ 0 & \text{auf } X \setminus \mathcal{U} \end{cases}$.

Grund: Lemma von Urysohn oder explizit:



$$f_n(x) := \begin{cases} n \cdot d(x, \partial\mathcal{U}) & \text{auf } \mathcal{U} \setminus K_n \\ 1 & \text{auf } K_n \\ 0 & \text{auf } X \setminus \mathcal{U} \end{cases}$$

- stetig auf X $\quad (f_n(x) = \min\{1, n\, d(x, \partial\mathcal{U})\}$ auf $\mathcal{U})$
- $0 \leq f_n \leq \mathbb{1}_{\mathcal{U}}$
- $f_n \nearrow \mathbb{1}_{\mathcal{U}}$

Lemma 14 Sei (X, T) ein $\boxed{\text{TDS}}$ und μ ~~Borelmaß~~ W'Maß auf X.

Dann gilt:

$$\boxed{T \text{ ist } \mu\text{-treu} \iff \underbrace{\int_X f \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu}_{(*)} \quad \forall f \in C(X)}$$

__Beweis__

"$\Rightarrow$" siehe Lemma 8 : $f \in C(X) \Rightarrow f \in L^\infty(X,\mu)$

"$\Leftarrow$" ZZ: $(*)$ gilt $\forall f = \mathbb{1}_A$, A meßbar.

Es reicht anzunehmen: A offen. Nach Bem. 2):

$$\exists (f_n) \subset C(X) : 0 \le f_n \le \mathbb{1}_A, \ f_n \uparrow \mathbb{1}_A$$

Nach Vorauss. gilt:

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_X f_n \circ T \, d\mu$$

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A \, d\mu \longleftarrow \int_X f_n \, d\mu = \int_X f_n \circ T \, d\mu \longrightarrow \int \mathbb{1}_A \circ T \, d\mu = \mu(T^{-1}A) \qquad \blacksquare$$

Satz von monot. Konv.

Erinnerung (FA):

Satz von Riesz: $(C(X))' \simeq \{\text{endliche } \mathbb{C}\text{-wertige Borelmaße auf } X\}$

komp.

mit $\langle f, \mu \rangle = \int f \, d\mu$

ein. Funktional

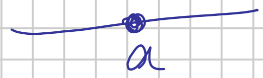
Maß

Die Topologie auf dem Raum von Maßen ist schwach*-Topologie;

entspricht

$$\mu_{\underset{\alpha}{n}} \to \mu \iff \int f \, d\mu_{\underset{\alpha}{n}} \to \int f \, d\mu \quad \forall f \in C(X).$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ Die Punktauswertung $f \mapsto f(a)$, $a \in X$ fest entspricht dem Diracmaß $\delta_a(A) := \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$$\langle f, \delta_a \rangle = \int f \, d\delta_a = f(a)$$

<u>Satz von Banach-Alaoglu</u>: Die Einheitskugel $C(X)'$ ist schwach*-kompakt. Insbesondere hat $\forall$ Folge von W'Maßen (Borel) auf X einen Häufungspunkt.

$\Big(\mu$ W'Maß $\Rightarrow \left|\int f \, d\mu\right| \underset{\substack{\uparrow \\ = \text{ für } f \equiv 1}}{\leq} \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\mu(X)}_{=1} = \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \|\mu\|_{C(X)'} = 1 \Big)$

$\boxed{\text{Satz 15}}$ (Krylov-Bogolyubov)

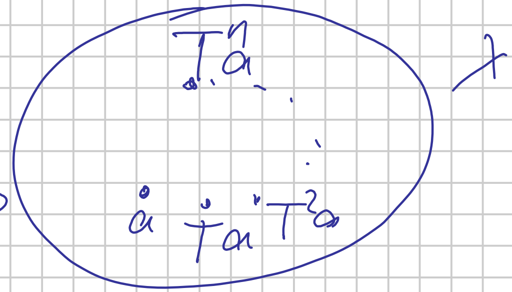
Sei (X,T) ein TDS. Dann $\exists$ T-inv. W'Borelmaß μ auf X.

Damit kann man $\forall$ TDS zu einem (oder vielen) MDS machen.

<u>Bem.</u> μ i. A. nicht eindeutig: $T = id \Rightarrow \forall \mu$ ist T-inv.

Beweis Nimm $a \in X$ und betrachte

$$\mu_n := \frac{\delta_a + \delta_{Ta} + \ldots + \delta_{T^n a}}{n+1} \text{ — W'Maß}$$



Da $\int f \, \delta_{T^j a} = f(T^j a)$, haben wir:

$$\int_X \left[f(Tx) - f(x) \right] d\mu_n \overset{\text{Def. von } \mu_n}{=} \frac{\cancel{f(Ta)} + \cancel{f(T^2 a)} + \ldots \cancel{+} f(T^{n+1} a)}{n+1} - \frac{f(a) + \cancel{f(Ta)} + \cancel{\ldots} + \cancel{f(T^n a)}}{n+1} = \frac{f(T^{n+1} a) - f(a)}{n+1},$$

und damit:

$$\left| \int_X f(Tx) \, d\mu_n - \int_X f \, d\mu_n \right| \leq \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{n+1} \xrightarrow[n+1]{} 0$$

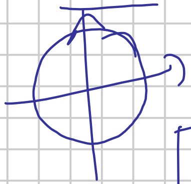
Sei μ ein Häufungspunkt von (μ_n) (bzgl. schwach*-Top.)

- μ W'Maß $\left(\mu \geq 0, \text{ da } \int f \, d\mu \geq 0 \ \forall f \geq 0, \ \mu(X) = \int 1 \, d\mu = 1 \right)$

- $\int_X f(Tx)\,d\mu - \int f\,d\mu = 0$,

also ist μ das gesuchte Maß.

Bem. $\exists$ TDS mit eindeutigem T-inv. W'Maß μ, z.B. $[0,1]$ (bzw. $\mathbb{T}$) mit translation (bzw. rotation) mit einer irrat. Zahl



Bsp $X=[0,1]$, $Tx=x^2$

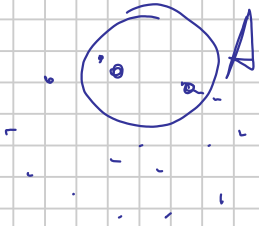
δ_0, δ_1 T-inv. (und $\forall$ Konvexkomb. davon).

II Rekurrenz und Ergodizität

1. Rekurrenz

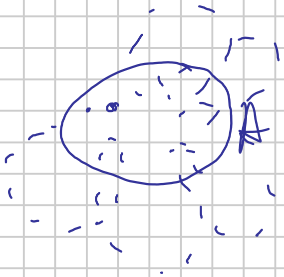
Def. 1 Sei (X,μ,T) ein MDS und $A\subset X$ meßbar. Dann heißt A

- <u>rekurrent</u>, wenn für f.a. $x\in A$ $\exists n: T^n x\in A$,



oder: $\mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 0$

- unendlich rekurrent, wenn für f.a. $x \in X$ $\exists (n_j)$ Teilfolge von $\mathbb{N}$ mit $T^{n_j} x \in A$ $\forall j$



$$\mu\left(A \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 0$$

Bem. 1) unendl. rekurr. $\Rightarrow$ rekurr.

2) Die Def. ist nichttriv., sobald $\mu(A) > 0$

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ Sei (X, μ, T) ein MDS. Dann sind äq.:

(i) $\forall A \in \Sigma_X$ ist A rekurrent

(ii) $\forall A \in \Sigma_X$ ist ∞-rekurrent

(iii) $\forall A \in \Sigma_X$ mit $\mu(A) > 0$ $\exists n: \mu(A \cap T^{-n} A) > 0$.

einfacher zu prüfen als (i) oder (ii)

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i) ✓.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei A rekurrent, d. h.,

(*) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \cup N$, N Nullmenge

$$\Rightarrow \quad T^{-1}(A) \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{T^{-1}(N)}_{\text{Nullmenge}}$$

$$\Rightarrow \quad T^{-2}(A) \subset \bigcup_{n=3}^{\infty} T^{-n}(A) \cup T^{-2}(N)$$

$$\dots$$

$$T^{-(k-1)}(A) \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{T^{-(k-1)}(N)}_{\text{Nullm.}}$$

Wieder aus $(*)$ folgt:

$$A \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{N_k}_{\text{Nullmenge } (\subset N \cup T^{-1}(N) \cup \dots \cup T^{-(k-1)}(N))} \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \quad A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}(A) \cup \underbrace{\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\right]}_{\text{Nullmenge}}$$

$\Rightarrow$ A ∞-rekurrent.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Ang.: $\mu(A \cap T^{-n}A) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nach (i):

$$A = \Bigg(\underbrace{A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right]}_{\text{Punkte aus } A, \text{ die irgendwann zurückkommen.}}\Bigg) \cup \underbrace{N}_{\text{Nullmenge}}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(A \cap T^{-n}(A)\right)}_{\text{Nullmenge nach Annahme}} \cup N$$

$\Rightarrow \mu(A) = 0.$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $A \subset X$ meßbar und betrachte:

$$B := A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}(A) = A \cap \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X \setminus A)\right]$$

Z.z.: $\mu(B) = 0$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$B \cap T^{-n}(B) \subset \underbrace{A \cap T^{-n}(A) \cap \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X \setminus A)\right]}_{=\emptyset},$$

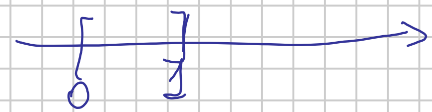
d.h., $B \cap T^{-n}(B) = \emptyset \quad \forall n.$

Nach (iii) $\mu(B) = 0$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Theorem 3}}$ (<u>Poincaré</u>)

Sei (X, μ, T) ein MDS. Dann ist $\forall$ meßbare Menge $A \subset X$ unendlich rekurrent.

Bem. Falsch, falls $\mu(X)=\infty$: Bsp: $\mathbb{R}$, $Tx = x+1$, $A=[0,1]$



Beweis $\mu(A)=0 \Rightarrow A$ unendl. rekurrent

Sei $A \subset X$ mit OBdA $\mu(A)>0$.

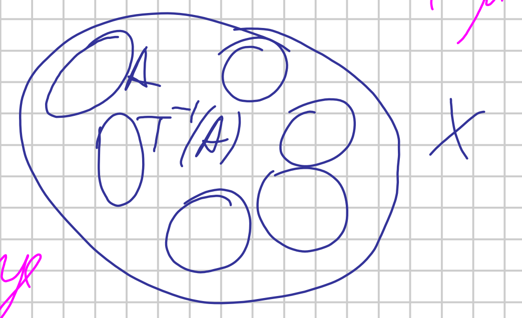
Nach Lemma 2 reicht es zz: $\exists n\in\mathbb{N}$: $\mu(A\cap T^{-n}(A))>0$.

Ang.: $\mu(A\cap T^{-n}(A))=0 \quad \forall n$.

Daraus folgt: $\mu(T^{-(n+k)}(A)\cap T^{-k}(A)) = \mu(T^{-k}(T^{-n}A\cap A)) \underset{\substack{\uparrow \\ T\ \mu\text{-treu}}}{=} 0$

$\forall k\in\mathbb{N}_0$, d.h., die Mengen

$$A,\ T^{-1}(A),\ T^{-2}(A), \ldots$$



sind paarweise wesentlich disjunkt → disjunkt bis auf eine Nullmenge

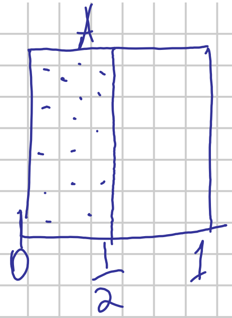
und haben alle Maß $\mu(A)>0$.

$$1=\mu(X)\geq \sum_{n=0}^{\infty}\mu(A)=\infty \quad ↯$$

$\blacksquare$

Bem. Poincarés Rekurrenzsatz hat kontraintuitive Folgerungen.

Modell von Boltzmann:

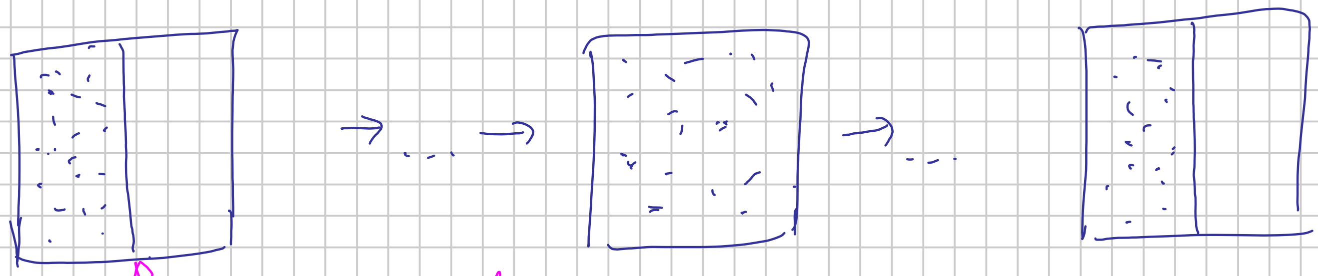


$$X \subset \underbrace{[0,1]^{3n}}_{\text{Raumkoord.}} \times \underbrace{\mathbb{R}^{3n}}_{\text{Geschwindigkeiten}}$$

Zustandsraum

$A = \{x \in X : x_1 \in [0, \tfrac{1}{2})\}$ – Am Anfang – eine Wand in der Mitte

Man erwartet eine Art Gleichverteilung, aber Poincaré besagt:



entferne die Wand

fast $\forall$ Anfangszustand aus A kommt (∞-oft) nach A zurück.

Frage: Wie lange muss man warten? (Intuitiv: je kleiner $\mu(A)$, desto länger)

Seien (X, μ, T) ein MDS, $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$.

Def.

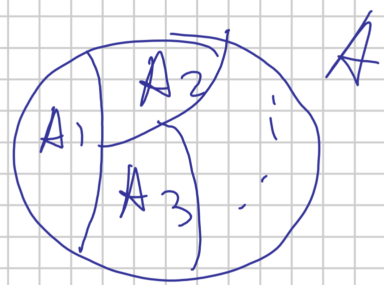
$B_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(X \setminus A)$ – Punkte aus $\underline{X}$, die nie nach A kommen

$B_1 := T^{-1}(A)$ – – " – in einem Schritt – " –

$\vdots$

$$B_n := T^{-n}(A) \cap \left[\bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A)\right]$$ —"— in n Schritten nach A kommen, aber nicht früher.

$\vdots$



Es gilt:

- $X = B_0 \cup B_1 \cup \ldots$
- alle B_j sind disjunkt.

Def. $A_n := B_n \cap A$, $n \in \mathbb{N}$ – meßbar

Poincaré: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bis auf eine Nullmenge

Def. die Rückkehrzeitfkt

$$\begin{cases} n_A : A \to \mathbb{N} \\ n_A(x) = n \text{ für } x \in A_n. \end{cases}$$

Frage: Was kann man über n_A sagen?

$\boxed{\text{Lemma 4}}$ Sei (X, μ, T) ein MDS, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \subset X$ meßbar.

Dann gilt:

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A \cap \left[\bigcap_{j=1}^{k-1} T^{-j}(X \setminus A)\right] \cap T^{-k}(B)\right]$$

$$+\ \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X\setminus A)\cap T^{-n}(B)\Big).$$

Beweis: $n=1$: $\mu(B) = \mu(A\cap T^{-1}(B)) + \mu((X\setminus A)\cap T^{-1}(B))$

$\mu(B)=\mu(T^{-1}(B))$

$n=2$: $\mu(B) = \mu(A\cap T^{-1}(B)) + \mu\big(T^{-1}((X\setminus A)\cap T^{-1}(B))\big)$

T ist μ-treu

$$= \mu(A\cap T^{-1}(B)) + \mu(A\cap T^{-1}(X\setminus A)\cap T^{-2}(B)) + \mu((X\setminus A)\cap T^{-1}(X\setminus A)\cap T^{-2}(B))$$

usw. induktiv. ∎

Def. die <u>induzierte σ-Algebra</u> und das <u>induzierte W'Maß</u> auf A:

$$\Sigma_A := \{B\subset A,\ B\in\Sigma_X\} = A\cap\Sigma_X \subset \Sigma_X$$

$$\mu_A(B) := \frac{\mu(B)}{\mu(A)},\quad B\in\Sigma_A$$

Die Rückkehrzeitfkt $n_A: A\to\mathbb{N}$ ist meßbar bzgl. μ_A, weil $n_A^{-1}(\{k\}) = A_k \in \Sigma_X\cap A = \Sigma_A$.

$\boxed{\text{Theorem 5}}$ Sei (X, μ, T) ein MDS, $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$.

Dann gilt:

$$\boxed{\int_A n_A \, d\mu_A = \frac{\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)\right)}{\mu(A)}}$$

Erwartungswert (wie lange man im Durchschnitt wartet)

Insbesondere, wenn $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) = X$ bis auf eine Nullmenge, dann gilt

$$\int_A n_A \, d\mu_A = \frac{1}{\mu(A)}.$$

Beweis Lemma 4 für $B := X$ impliziert:

$$1 = \mu(X) = \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\underbrace{A \cap \Big[\bigcap_{j=1}^{k-1} T^{-j}(X \setminus A)\Big]}_{= \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \text{ bis auf eine Nullmenge nach Poincaré.}}\Big) + \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j}_{\text{disjunkt}}\Big) + \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) + \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X \setminus A)\Big),$$

d.h.)

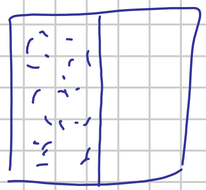
$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(X) - \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X\setminus A)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^{-k}(A)\Big)$$

Mit $n \to \infty$:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(A)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \mu(A_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \mu(A_j) = \mu(A) \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{\mu(A_j)}{\mu(A)} = \cancel{\mu(A)} \int_A n_A \, d\mu_A \quad \blacksquare$$

Bem. Boltzmann:

$A =$  . Wenn $\mu(A) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Der Erwartungswert von n_A ist dann $\sim 2^n$, wenn $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) = X$ bis auf Nullmenge.

Wann gilt das, d.h.) wann erreicht f. jeder Punkt irgendwann A?

2. Ergodizität

Def 6 Sei (X,μ,T) ein MDS. Eine Menge $A \in \Sigma_X$ heißt <u>invariant</u> (oder : <u>T-invariant</u>), wenn $T^{-1}(A) \subset A$ bis auf eine Nullmenge, d.h.,

$$\mu(T^{-1}(A) \setminus A) = 0.$$

Lemma 7 Für ein MDS (X,μ,T) und $A \in \Sigma_X$ sind äquiv.:

(i) A ist invariant

(ii) $T^{-1}(A) = A$ bis auf eine Nullmenge.

(iii) $X \setminus A$ ist invariant

<u>Beweis</u>

(ii) ⇒ (i) klar

(i) ⇒ (ii) folgt aus $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$

(ii) ⇒ (iii) : $X \setminus A = X \setminus (T^{-1}(A)) = T^{-1}(X \setminus A)$

nach (ii) bis auf eine Nullmenge

"(iii) ⇒ (ii)" – Symmetrie $A \leftrightarrow X \setminus A$. ∎

Bem. A inv., $\mu(A) \in (0,1) \Rightarrow$ Zerlegung in 2 nichttriv. Teilsysteme

$$(A, \Sigma_A, T|_A, \mu_A) \text{ und } (X\setminus A, \Sigma_{X\setminus A}, T|_{X\setminus A}, \mu_{X\setminus A})$$

Def. 8 Ein MDS (X, μ, T) heißt ergodisch, wenn

$$A \text{ inv.} \Rightarrow \mu(A) \in \{0,1\}$$

$\forall A \in \Sigma_X$ gilt.

Bem. 1) Ergodische Systeme sind „unzerlegbar", eine Art Atome

2) $\exists$ MDS ohne ergodische Teilsysteme:

Bsp $X = [0,1]$, $\mu = \text{Leb}$, $T = id$ – $\forall A \in \Sigma_X$ ist T-inv.

Prop. 9 Für ein MDS (X, μ, T) sind äquiv.:

(i) (X, μ, T) ist ergodisch

(ii) $\forall A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$

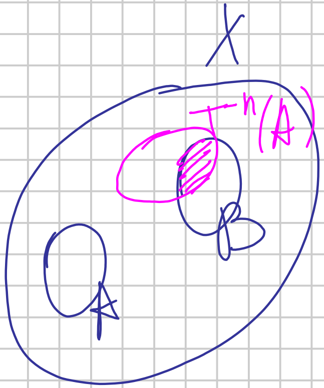
$$\underbrace{\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(A)}_{\text{= Punkte, die } \infty\text{-oft } A \text{ besuchen}} = X \quad \text{bis auf Nullm.}$$

(iii) $\forall A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) = X \quad \text{bis auf Nullm.}$$

(iv) $\forall A, B \subset X$ mit $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0.$$



__Beweis__ (i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$.

Def. $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(A)$

Es gilt:

$$T^{-1}(B_n) = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} T^{-k}(A) \subset B_n$$

Nach (i) gilt $\mu(B_n) \in \{0, 1\}$, aber $\mu(B_n) \geq \mu(T^{-n}(A)) = \mu(A) > 0$,

d.h., $\mu(B_n) = 1 \ \forall n. \Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 1$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) klar: $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \supset \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(A)$. $= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(A)$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Seien A, B mit $\mu(A)>0$, $\mu(B)>0$. Ang.: $\mu(T^{-n}(A)\cap B)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}(T^{-n}(A)\cap B)$ eine Nullmenge, aber:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(T^{-n}(A)\cap B) = B\cap\underbrace{\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}(A)\Big)}_{=X \text{ bis auf Nullm.}},$$

d.h., B ist eine Nullmenge $\lightning$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sei A inv., d.h., $T^{-1}(A)\subset A$ bis auf Nullm.

$T^{-n}(A)\subset A$ —"— $\forall n$

Für $B := X\setminus A$ haben wir:

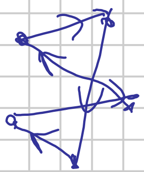
$B\cap T^{-n}(A) \underset{\text{bis auf Nullm.}}{\subseteq} B\cap A = \emptyset$, d.h., $\mu(B\cap T^{-n}(A))=0$ $\forall n$

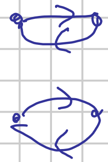
Nach (iv) gilt: $\mu(A)=0$ oder $\underbrace{\mu(B)=0}_{\mu(A)=1}$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp 10}}$ 1) Endliche Systeme: X endlich, μ resbal. Zählmaß, T bij

Dann ist T ergodisch $\iff$ $\forall$ Punkt erreicht $\forall$ anderen Punkt irgendwann

$\iff$ T zykl. Permutation

 erg.

 nicht erg.