Note Title 05.07.2019

6. Birkhoffscher Ergodensatz für eindeutig ergodische Systeme

<u>Erinnerung:</u>

- TDS ist (X, T)

  top. dyn. System; X: komp. top. Raum; T stetig $: X \to X$

- Satz von Krylov-Bogolyubov (Sektion I.3):

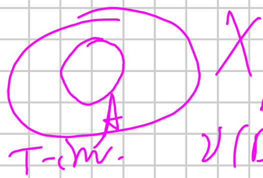
  $\forall$ TDS (X, T) $\exists$ T-inv. W'Maß μ auf X

$\boxed{\text{Def. 8}}$ Ein TDS (X, T) heißt eindeutig ergodisch, wenn es ein eindeutiges T-inv. W'Maß μ hat.

(TDS $\rightsquigarrow$ MDS)

$\boxed{\text{Bsp}}$ $(\mathbb{T}, a)$ eindeutig ergodisch $\Leftrightarrow$ a irrat. (siehe Kap. I)
(in diesem Fall gilt $\mu = Leb$)

<u>Bem.</u> Das μ ist automatisch ergodisch (Warum?)



sonst Def.: $\nu(B) := \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}$

$\boxed{\text{Thm 9}}$ Sei (X,T) ein eindeutig erg. TDS mit T-inv. W'Maß μ.

Dann gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(T^n x) \longrightarrow \int f \, d\mu \qquad \forall x \in X \quad \forall f \in C(X)$$

__Beweis__ Sei $x \in X$. Wie im Beweis von Krylov–Bogolyubov gezeigt, ist $\forall$ Teilfolgenlimes von $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \delta_{T^n x}$ ein T-inv. W'Maß

bzgl. schwach*-Top. in $(C(X))^*$

$\Rightarrow$ gleich μ,

d.h.,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \delta_{T^n x} \longrightarrow \mu \quad \text{in } C(X)'$$

Also gilt $\forall f \in C(X)$

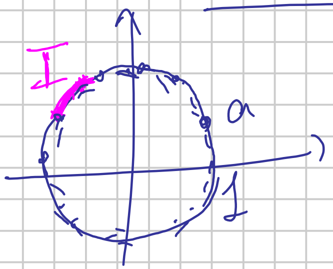
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(T^n x) \longrightarrow \int f \, d\mu. \qquad \blacksquare$$

Allgemeine Philosophie:

Wenn eine Eigenschaft für alle MDS und $\forall f \in \mathcal{L}^1$ oder $\mathcal{L}^p$ f.ü. gilt, dann gilt sie überall für gute MDS und gute Fkt'en f.

7. Erste Anwendung: Gleichverteilung

Erinnerung: $a \in \mathbb{T}$ irrat. $\Rightarrow \{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{T}$.



$\boxed{\text{Thm. 10}}$ (Weyl) Die Folge $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ist für irrat. $a \in \mathbb{T}$ gleichverteilt in $\mathbb{T}$, d.h., $\forall$ Intervall $I \subset \mathbb{T}$ gilt:

$$\frac{|\{n \in \{1, \dots, N\} : a^n \in I\}|}{N} \longrightarrow \text{Länge}(I)$$

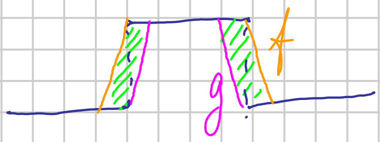
Beweis Wir wissen: $(\mathbb{T}, a)$ ist eindeutig erg. mit $\mu = \text{Leb}$ (reskaliert (W'Maß))

Thm. 9:
$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a^n x) \longrightarrow \int f \, d\mu \qquad \forall x \in \mathbb{T} \quad \forall f \in C(\mathbb{T})$$

$x = 1$:
$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a^n) \longrightarrow \int f \, d\mu. \quad \forall f \in C(\mathbb{T})$$

ZZ:
$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(a^n) \longrightarrow \mu(I) = \text{Länge}(I)$$

Idee: Appr. von $\mathbb{1}_I$ mit stet. Fkt.



Sei $\varepsilon > 0$ und def. stetige f, g mit

$$\begin{cases} g \leq \mathbb{1}_I \leq f \\ \int f - \int g < \varepsilon \end{cases}$$

Wir haben:

$$\text{da } g \text{ stetig} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(a^n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(a^n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) \quad \text{da } f \text{ stetig}$$

$$\xrightarrow{N\to\infty} \int g\,d\mu \qquad\qquad \xrightarrow{N\to\infty} \int f\,d\mu \leq \int \mathbb{1}_I + \varepsilon$$

$$\int \mathbb{1}_I - \varepsilon \leq \int g\,d\mu$$

$$\int \mathbb{1}_I - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(a^n) \leq \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(a^n) \leq \int \mathbb{1}_I + \varepsilon \qquad \int g \quad \int \mathbb{1}_I \quad \int f$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war,

$$\exists \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(a^n)}_{|\{n\in\{1,\dots,N\}:\, a^n \in I\}|} = \int \mathbb{1}_I = \text{Länge}(I).$$

■

<u>Bem.</u> 1) Da $(\mathbb{T}, a, \text{Leb})$ ergodisch (für a irrat.) ist, folgt aus dem Birkhoffschen Ergodensatz eine etwas andere Aussage, nämlich: $f := \mathbb{1}_B$

$$\forall B \subset \mathbb{T} \text{ meßbar}: \quad \frac{|\{n \in \{1,\dots,N\}:\, a^n x \in B\}|}{N} \longrightarrow \mu(B) \quad \text{für f.a. } x$$

($x=1$ unklar, aber dafür $\forall B$ meßbar, nicht nur Intervalle)

2) Wie im Beweis von Weyl kann man zeigen (Weyls Kriterium für Gleichverteilung)

$$(a_n) \subset \mathbb{T} \text{ gleichverteilt} \iff \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) \to \int f \, d\mu_{\text{Leb}} \quad \forall f \in C(\mathbb{T})$$

$$\iff \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{a_n^k}_{e^{2\pi i k \varphi_n}} \longrightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$$

$\varphi_n = \arg(a_n)$

Trick: approx. $\forall f \in C(\mathbb{T})$ mit trig. Polynomen bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ – Weierstraß.

7. Weitere Anwendungen

1 Normale Zahlen

$\boxed{\text{Def. 11}}$ Eine Zahl $x \in [0,1]$ heißt **einfach normal**, wenn in der Dezimalentwicklung

$$x = 0{,}x_1 x_2 x_3 \ldots$$

die Folge (x_n) gleichverteilt in $\{0,1,\ldots,9\}$ ist, d.h.,

$\forall k \in \{0,\dots,9\}$ $\qquad \dfrac{|\{n \in \{1,\dots,N\} : x_n = k\}|}{N} \longrightarrow \dfrac{1}{10}$

($\forall$ Ziffer kommt asymptotisch mit W'keit $\frac{1}{10}$ vor)

$\boxed{\text{Bsp}}$ $0{,}012\dots9012\dots$

$\boxed{\text{Thm 12}}$ (Borel) Fast jedes $x \in [0,1]$ ist einfach normal:

Beweis Die Dezimaldarst. ist eindeutig für ~~f~~ f.a. x

Betrachte $Tx := 10x \mod 1$ auf $[0,1]$

Wir wissen: $([0,1], \text{Leb}, T)$ ist isomorph zum Bernoullishift

$$B\left(\tfrac{1}{10},\dots,\tfrac{1}{10}\right) = \left(\{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}}, \text{Produktmaß}, \leftarrow\right)$$

durch den Isomorphismus

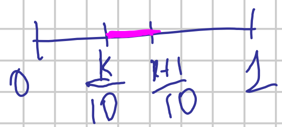
$$\Phi : \{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$$
$$(x_1 x_2 \dots) \longmapsto 0{,}x_1 x_2 x_3 \dots$$

$$\begin{array}{ccc} \{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\leftarrow} & \{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}} \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ [0,1] & \xrightarrow[T]{} & [0,1] \end{array}$$

Da $B\left(\frac{1}{10},\dots,\frac{1}{10}\right)$ ergodisch ist, ist auch $([0,1], \text{Leb}, T)$ erg

(Sei $A \subset [0,1]$ T-inv. $\underset{\text{warum}}{\Rightarrow}$ $\Phi^{-1}(A)$ shift inv. $\underset{\text{shift erg.}}{\Rightarrow}$ Maß$(\Phi^{-1}(A)) \in \{0,1\}$

φ maßerh. $\Rightarrow$ $\mu(A) \in \{0,1\}$.)

Betrachte $k \in \{0, \dots, 9\}$ und $A := \{x \in [0,1] : x_1 = k\} = \left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right)$ 

(hier nehmen wir $0,\dots 0000$ statt $0,\dots 999\dots$, falls nicht eindeutig)

Wir haben: $\text{Leb}(A) = \frac{1}{10}$ und damit

$$\frac{|\{n \in \{1, \dots, N\} : x_n = k\}|}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_A(T^n x) \xrightarrow[\text{Birkhoff}]{} \int \mathbb{1}_A \, d\mu = \frac{1}{10}$$

für f.a. x!

$\bigcap_k$ hat immer noch Lebesgue-Maß 1! ■

<u>Bem.</u> Eine Zahl heißt <u>normal</u>, wenn $\forall d$ $\forall k_1, \dots, k_d \in \{0, \dots, 9\}$ der Block $k_1 \dots k_d$ in der Dezimalentwicklung der Zahl asymptotisch mit W'keit $\frac{1}{10^d}$ vorkommt.

$\boxed{\text{Bsp}}$: $0{,}0 1 2 \dots 9 10 11 12 13 \dots$ normal zu Basis 10, aber nicht zu Basis 2

Genauso wie davor kann man beweisen: f.a. $x \in [0,1]$ sind normal sogar zu jeder Basis. Ü

Bem. $e, \pi, \log 2, \sqrt{2}$ – nicht bekannt, ob normal zu irgendeiner Basis ...

② Das starke Gesetz der großen Zahlen

$\boxed{\text{Thm}}$ (Kolmogorov) Sei (Ω, P) ein W'Raum, seien $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega, P)$ unabh. identisch verteilte (reelle) Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(X_1) \quad P\text{-f.ü.}$$

Erinnere:
- identisch verteilt: $P(X_n^{-1}(A))$ ist unabh. von n, d.h., ν def. durch $\nu(A) := P(X_n^{-1}(A))$ ist unabh. von n

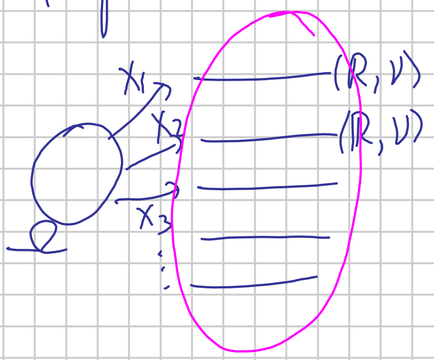
W'Maß auf $\mathbb{R}$, genannt Distribution von X_n.

- unabhän: Die Mengen $X_n^{-1}(A_n)$ sind unabh., d.h.,
$\forall k \; \forall A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_{j_i}^{-1}(A_{j_i})\right) = P(A_{j_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{j_k})$$

Beweis (Birkhoff $\Rightarrow$ Kolmogorov)

Betrachte $\mathbb{E}(X_1) = \int_\Omega \underbrace{X_1(\omega)}_{=:t} \, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} t \, d\nu(t)$ – unabh. von n

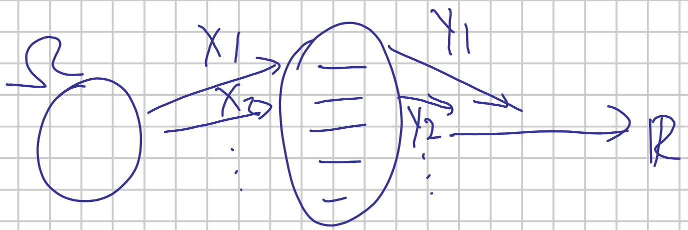
Def. den W'Raum



$$(X, \Sigma, \mu) := \Big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Borel}(\mathbb{R})}_{\text{Produkt-}\sigma\text{-Algebra}}, \overbrace{\prod_{n=1}^{\infty} \nu}^{\text{Produktmaß}}\Big)$$

$\uparrow \tau$ und $\tau : X \to X$ der Linksshift

Seien weiterhin $Y_n : X \to \mathbb{R}$ die n-ten Projektionen



Es gilt $Y_{j+1}(x) = Y_1(\tau^j x)$ und damit

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} Y_1(\tau^j x) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{nach Birkhoff, da das System ergodisch ist}} \int_X Y_1 \, d\mu$$

für f.a. x

(Warum ergodisch?)

Da $\mu(\underbrace{Y_1^{-1}(A)}_{\text{Zylinder}}) = \nu(A)$, haben wir

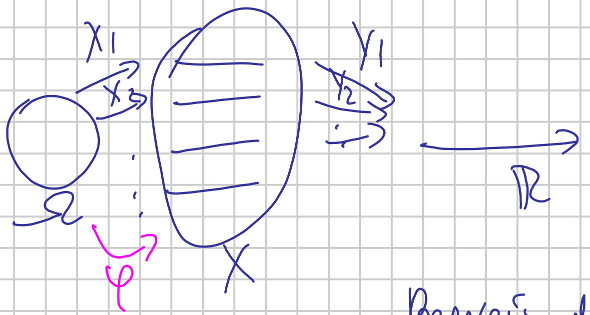
$A \subseteq \mathbb{R}$, μ Produktmaß

$$\int_X \underbrace{Y_1}_{=:t} \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} t \, d\nu(t) = \int_{\Omega} X_1 \, dP = \mathbb{E}(X_1)$$

siehe oben

Wir brauchen noch $\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ durch $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ zu ersetzen

Betr.



$\varphi : \Omega \to X$

$\varphi(\omega) := (X_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$

<u>Behaupt.</u>: φ ist maßtreu

<u>Beweis der Beh.:</u>

$$\varphi^{-1}\left(\begin{matrix}\text{Zylinder erz.}\\ \text{von } A_{j_1},\dots,A_{j_k}\end{matrix}\right) = \bigcap_{i=1}^{k} X_{j_i}^{-1}(A_{j_i}) \quad \text{und damit}$$

$$P(\varphi^{-1}(\text{—''—})) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_{j_i}^{-1}(A_{j_i})\right) \underset{\substack{\uparrow\\ (X_n) \text{ unabh.}}}{=} \nu(A_{j_1})\cdots\nu(A_{j_k}) = \mu(\text{Zylinder})$$

$\Rightarrow$ φ maßtreu $\blacksquare$ Ende der Beh.

Warum?

Es gilt:

$$X_n = Y_n(\varphi\,\cdot)$$

$$Y_n(\varphi(\omega)) = Y_n\left((X_j(\omega))_{j=1}^{\infty}\right) = X_n(\omega).$$

D.h.,

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n}(\omega) = \frac{Y_1+\dots+Y_n}{n}(\varphi(\omega))$$

und

$$\left\{\omega : \frac{X_1+\dots+X_n}{n}(\omega) \not\to \mathbb{E}(X_1)\right\} = \underbrace{\varphi^{-1}\left\{x : \frac{Y_1+\dots+Y_n}{n}(x) \not\to \overbrace{\mathbb{E}(X_1)}^{=\mathbb{E}(Y_1)}\right\}}_{\text{Nullmenge nach Birkhoff}}$$

φ maßtreu $\Rightarrow P\{w : -''- \} = 0$. ∎

Bem. 1) Es gilt auch Kolmogorov $\Rightarrow$ Birkhoff

2) Genauso folgt auch Von Neumann $\Rightarrow$ das schwache Gesetz der großen Zahlen und es gilt auch $\Leftarrow$.

IV Starke und schwache Mischung

1. Starke Mischung

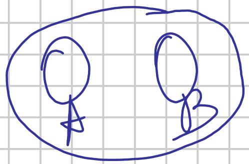
Bsp.: 

Wann gut vermischt? Empirisch

$$\frac{\mu(\text{Wein im Teilgebiet } B)}{\mu(B)} \sim \text{Anteil vom Wein im ganzen Glas} \quad \forall B$$

$\boxed{\text{Def. 1}}$ Ein MDS (X, μ, T) heißt mischend (oder starke mischend), wenn

$$\mu(T^{-n}A \cap B) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A) \cdot \mu(B) \quad \forall A, B \text{ meßbar.}$$

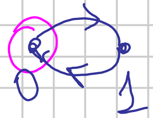


$\boxed{\text{Bsp}}$ Bernoullishifts (ein- und zweiseitig), $([0,1], \times 2 \bmod 1)$, da isom. zu $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (siehe irgendwo oben)

$\boxed{\text{Bem.}}$ (X, μ, T) mischend $\Rightarrow$ ergodisch:

Sei A T-inv. $\Rightarrow$ $\underbrace{\mu(T^{-n}A \cap A)}_{=\mu(A)} \to \mu(A)^2$, d.h., $\mu(A) \in \{0, 1\}$

$\boxed{\text{Bsp}}$ (erg. $\not\Rightarrow$ mischend)



$X = \{0, 1\}$, $\mu = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, T

(X, μ, T) ergodisch, aber nicht mischend:

$$\mu(T^{-n}(0) \cap \{0\}) = \begin{cases} 1/2, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \quad \text{- divergent}$$

$\boxed{\text{Satz 2}}$ (Charakterisierung starker Mischung)

Sei (X, μ, T) ein MDS mit Koopmanop. T auf L^2. Es sind äquiv.:

(i) (X, μ, T) ist stark mischend.

(ii) $\mu(T^{-n}A \cap A) \to \mu(A)^2$ $\forall A$ meßbar

(iii) $T^n f \to \int f \, d\mu \cdot \mathbb{1}$ schwach, d.h.,

$$\langle T^n f, g\rangle \longrightarrow \int f\,d\mu \int \bar{g}\,d\mu \qquad \forall f,g \in L^2.$$

Insbesondere gilt in diesem Fall

$$L^2(X,\mu) = \mathbb{C}\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \{f : T^n f \to 0 \text{ schwach}\}$$

<u>**Beweis**</u> Die letzte Aussage (Zerlegung) folgt aus

$$L^2(X,\mu) = \mathbb{C}\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \{f : \underbrace{f \perp \mathbb{1}}_{\int f\,d\mu = 0}\}$$

und (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) klar $(B := A)$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nimm $f := \mathbb{1}_A$, $g := \mathbb{1}_B$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei A meßbar und betr. $f := T^k \mathbb{1}_A$, $g := T^\ell \mathbb{1}_A$ für $k,\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n > \ell - k$:

$$\langle T^n f, g\rangle = \langle T^{n+k}\mathbb{1}_A, T^\ell \mathbb{1}_A\rangle \overset{T \text{ isom.}}{=} \langle T^{n+k-\ell}\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A\rangle$$

$$= \mu(T^{-(n+k-\ell)}A \cap A) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)^2 \text{ nach (ii)}$$

Da dies auch für $f = \mathbb{1}$ oder/und $g = \mathbb{1}$ gilt $\int f\,d\mu \cdot \int \bar{g}\,d\mu$ (Warum?), haben wir

$$\langle T^n f, g\rangle \longrightarrow \int f\,d\mu \cdot \int \bar{g}\,d\mu \qquad (*)$$

für $\forall f,g \in \underbrace{\mathrm{lin}\{\mathbb{1}, T^k \mathbb{1}_A, k \geq 0\}}_{} =: \overline{Y}$

$\underbrace{\text{Nach Approximation}}_{\text{da } \|T^n\| \leq 1 \ \forall n \ \text{ü}}$ gilt $(*)$ $\forall f,g \in \overline{Y}$

Sei $f \in \overline{Y}$ und $g \in \overline{Y}^{\perp}$. Dann haben wir

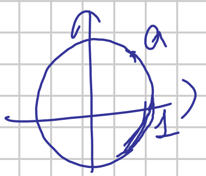
$$\langle \underbrace{T^n f}_{\in \overline{Y}}, \underbrace{g}_{\in \overline{Y}^{\perp}}\rangle = 0 = \int f \cdot \underbrace{\int \bar{g}\,d\mu}_{\langle \mathbb{1}, g\rangle = 0, \text{ da } \mathbb{1} \in Y}$$

D.h., $(*)$ gilt $\forall f \in \overline{Y}$ $\forall g$

Da A beliebig war, gilt $(*)$ $\forall$ einfache Fkt f $\forall g \in L^2$

$\Rightarrow$ $\forall f \in L^2$ nach Approx. ■

$\boxed{\text{Bsp 3}}$ (Rotationen sind nie mischend)



Betr. $(\mathbb{T}, a)$ Fall 1 a rat. $\Rightarrow$ $(\mathbb{T}, a)$ nicht erg., also nicht mischend.

Fall 2 a irrat.

Betr. $f(z) := z$, $f: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$\cdot \int_{\mathbb{T}} f = 0$ (warum?)

• $(Tf)(z) = f(az) = a\cdot z = a\,f(z)$ – Eigenfkt zum EW a.

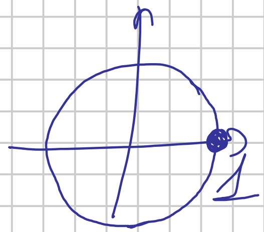
Damit:
$$\langle \underbrace{T^n f}_{a^n f}, f\rangle = a^n \|f\|^2 \not\to 0 = \int f \cdot \int \bar{f}.$$

Also ist $(\mathbb{T}, a)$ nicht mischend. Es gilt sogar viel mehr:
$$L^2(\mathbb{T}, \underset{\text{Leb.}}{\mu}) = \overline{\text{lin}}\ \underbrace{\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}}_{\text{ONB (Weierstraß)}}$$
für $e_n(z) := z^n$, und $\forall e_n$ ist eine Eigenfkt zum EW a^n,
d.h.,
$$\langle T^n f, f\rangle = a^n \|f\|^2 \not\to 0.$$

So eine Zerlegung des Raumes gilt $\forall$ Rotation auf einer komp. Gruppe (ohne Beweis). Also sind Rotationen ein „Gegenteil" von mischenden Systemen.

Wir haben gesehen:

$\boxed{\text{Prop. 4}}$ (X, μ, T) mischend $\Longrightarrow$ $\begin{cases} P_\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{1\} \\ 1 \text{ ist einfach, d.h., } \ker(1-T) = \mathbb{C}\cdot \mathbb{1} \end{cases}$



Bew. Sei f eine Eigenfkt zu λ
$\Rightarrow$ $\langle T^n f, f\rangle = \lambda^n \cdot \|f\|^2$ – div., wenn $\lambda \neq 1$

$\lambda = 1$: Ang., $f \perp \mathbb{1}$, $f \in \ker(1-T)$, dann:

$$\langle \underbrace{T^n f}_{f}, f \rangle = \|f\|^2 \xrightarrow[T \text{ misch.}]{} \underbrace{\left|\int f\right|^2}_{=0, \text{ da } f \perp \mathbb{1}}$$

$\Rightarrow \|f\| = 0$ ■

<u>Frage:</u> Gilt $\Leftarrow$? Antwort: nein, siehe nächste Sektion.

$\boxed{\text{Beobachtung}}$ Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$T^n f \to 0 \text{ schwach} \iff T^{kn} f \to 0 \text{ schwach} \quad \forall f,$$

insbesondere:

$$(X, \mu, T) \text{ mischend} \iff (X, \mu, T^k) \text{ mischend.}$$

<u>Beweis</u> „insbesondere" folgt aus Thm. 3.

„$\Rightarrow$" klar

$\Leftarrow$ Sei $j \in \{0, \dots, k-1\}$, $g \in L^2$. Wir haben:

$$\langle T^{km+j} f, g \rangle = \langle T^{km} f, \underbrace{(T^j)^* g}_{\text{feste Fkt}} \rangle \xrightarrow[m \to \infty]{\text{Voraus.}} 0$$

$\Rightarrow T^n f \to 0$ schwach (warum?) ■

2. Schwache Mischung

<u>Frage:</u> impliziert $\begin{cases} P_\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{1\} \\ 1 \text{ einfacher EW von } T \end{cases}$ starke Mischung?

Wenn nicht, welche asympt. Eigenschaft impliziert das?

$\boxed{\text{Def}}$ Für eine Menge $J \subset \mathbb{N}$ (= Teilfolge) 

ist die <u>Dichte</u> von J

$$d(J) := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{|J \cap \{1,\dots,n\}|}{n}}_{\in [0,1]},$$

wenn der Limes ex. Wenn nicht, betrachte $\overline{\lim}$ bzw. $\underline{\lim}$ (obere bzw. untere Dichte).

<u>Bem.</u> $d(J) \in [0,1]$, wenn ex., d.h., $d(J) = 1$ bedeutet, dass J asymptotisch fast alles ist.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $d(5\mathbb{N}) = \frac{1}{5}$, $d(\mathbb{P}) = 0$, $d(\{n^2, n \in \mathbb{N}\}) = 0$

Ü J mit $\overline{d}(J) = 1$, $\underline{d}(J) = 0$.

$\boxed{\text{Def. 5}}$ Ein MDS (X,μ,T) heißt **schwach mischend**, wenn $\forall A,B$ meßbar es ein $J \subset \mathbb{N}$ mit $d(J)=1$ ex. mit

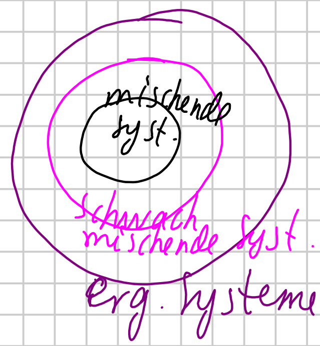
$$\mu(T^{-n}A \cap B) \xrightarrow[n \in J]{n\to\infty} \mu(A)\mu(B)$$

Kurze Bezeichnung:

$$\underset{n\to\infty}{D\text{-}\lim}\ \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Dichte

Bem. Mischung $\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow \atop \not\Longleftarrow}}$ schwache Mischung $\overset{(3)}{\underset{(4)}{\Longrightarrow \atop \not\Longleftarrow}}$ Ergodizität



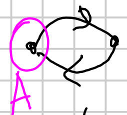
(1) klar

(3) Ang., A T-inv. Dann impliziert schwache Mischung

$$\mu(A) = \mu(T^{-n}A \cap A) \xrightarrow[n\in J]{n\to\infty} \mu(A)^2,$$

$T^{-n}A = A$ bis auf Nullm.

d.h., $\mu(A) \in \{0,1\}$.

(4)  $\mu(T^{-n}A \cap A) = \begin{cases} 1/2, & 2 \mid n \\ 0 & 2 \nmid n \end{cases}$ – konv. nicht in Dichte

(2) sehr schwer

1944 Halmos: Eine „typische" Transformation ist ~~mischend~~ schwach mischend

im Baire-Kategorie Sinne: (X,μ) fest, $\{T : X \to X\ \mu\text{-treu}\}$ vollst. metr. Raum für die starke Operator-top. für Koopman-Op.

1948 Rohlin: —"— nicht mischend. stark mischend

D.h., eine „typische" Transformation ist schwach, aber nicht stark mischend.

Erstes konkretes Bsp kam 10 Jahre später. Zur Zeit: mehrere Konstruktionen

$\boxed{\text{Lemma 6}}$ (Koopman – von Neumann)

Sei $(a_n) \subset [0,\infty)$ eine beschränkte Folge pos. Zahlen. Dann gilt:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \longrightarrow 0 \iff D\text{-}\lim a_n = 0.$$

Beweis Sei $c := \sup_n a_n$.

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N,\ n \in J \quad a_n < \varepsilon.$

Für $n \geq N$ haben wir

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \leq \frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n} a_j + \frac{1}{n}\cdot c\cdot N$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=N+1\\ j\notin J}}^{n} a_j + \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\varepsilon\cdot(n-N)}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\frac{1}{n}\cdot c N}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$\overbrace{\leq C}\ \frac{|\{1,\dots,n\}\setminus j|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ da } d(j)=1.$$

$$\leq 3\varepsilon \quad \text{für genügend große } n.$$

$\Longrightarrow$ Für $k \in \mathbb{N}$ def.

$$L_k := \{n : a_n \geq \tfrac{1}{k}\} \subset \mathbb{N}$$

Wir haben:

- $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots$
- $d(L_k) = 0 \ \forall k$:

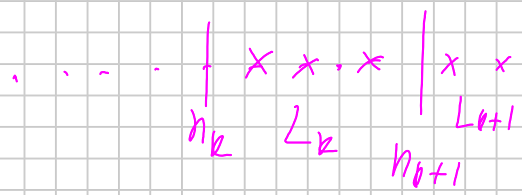
$$\frac{|L_k \cap \{1,\dots,n\}|}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k a_j = k \cdot \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{nach Voraus.}$$

$1 \leq k a_j$ für $j \in L_k$

Wähle n_k mit $\frac{|L_k \cap \{1,\dots,n\}|}{n} < \frac{1}{k} \quad \forall n \geq n_k$ und $n_k \nearrow$

Def.

$$L := \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k \cap [n_k, \infty)$$



Es gelten:

- $d(L) = 0$:

  Sei $m > n_1$, dann $\exists k$: $n_k \le m < n_{k+1}$. Wir haben: $n_k \quad m \quad n_{k+1}$

  $$L \cap \{1, \dots, m\} \underset{\text{da } m < n_{k+1}}{\subset} L_k \cap \{1, \dots, m\}, \text{ d.h.},$$

  $$\frac{|L \cap \{1, \dots, m\}|}{m} \le \frac{|L_k \cap \{1, \dots, m\}|}{m} \underset{m \ge n_k}{\le} \frac{1}{k} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

- $a_n \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ n \notin L}]{} 0$:

  Sei $n \in [n_k, n_{k+1})$, $n \notin L \underset{\text{Def. von } L}{\Longrightarrow} n \notin L_k \underset{\text{Def. von } L_k}{\Longrightarrow} a_n < \frac{1}{k}$

Die Behauptung folgt für $J = \mathbb{N} \setminus L$. ∎

$\boxed{\text{Thm. 7}}$ (Charakterisierung schwacher Mischung)

Sei (X, μ, T) ein MDS mit Koopmanop. T auf L^2. Es sind äquiv.:

(i) (X, μ, T) schwach mischend

(ii) $\forall A, B$ meßbar $\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |\mu(T^{-n} A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

(iii) $\forall f, g \in L^2$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| \langle T^n f, g\rangle - \int f \int \overline{g} \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

(iv) $\begin{cases} P\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{1\} \\ 1 \text{ einfacher EW} \end{cases}$

in diesem Fall gilt die Zerlegung

$$L^2(X,\mu) = \mathbb{C}\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \left\{ f : \exists J \subset \mathbb{N} \text{ mit Dichte } 1 : T^n f \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ n \in J}]{} 0 \text{ schwach} \right\}$$

<u>Bem.</u> Fkt'en aus ⟶ heißen schwach mischende Fkt'en.

<u>Beweis</u> (teilweise)

(i) ⟺ (ii) Koopman-v. Neumann für $a_n := |\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)|$

(ii) ⟹ (iii) ü (Zuerst f, g charakt. Fkt'en ⤳ einfache Fkt'en ⤳ $f, g \in L^2$)

Approximation

(iii) ⟹ (ii) $f := \mathbb{1}_A,\ g := \mathbb{1}_B$

(iii) ⟹ (iv) Ang., $Tf = \lambda f$. Erinnere: $|\lambda| = 1$ (T isom.)

<u>Fall 1</u> $\lambda \neq 1$. Dann gilt: $\langle f, \mathbb{1}\rangle \overset{T \text{ isom.}}{=} \langle Tf, T\mathbb{1}\rangle = \lambda \langle f, \mathbb{1}\rangle$,

also muss $f \perp \mathbb{1}$

(iii) für $f=g$:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle \underbrace{T^n f}_{\cancel{f}}, f\rangle| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad , \text{ d.h., } f=0.$$

-0, da $\int f = 0$

<u>Fall 2</u> $\lambda = 1$

(iii): $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| \underbrace{\langle T^n f, f\rangle}_{\|f\|^2} - \left|\int f\right|^2 \right| \longrightarrow 0 \, ,$$

d.h., $\|f\| = \left|\int f\right| = |\langle f, \mathbb{1}\rangle|$

„=" in C-S: $f = c\cdot\mathbb{1}$

(iv) ⟹ (iii) Wir beweisen diese impl. unter der <u>Annahme</u>, dass T <u>invertierbar</u> ist.

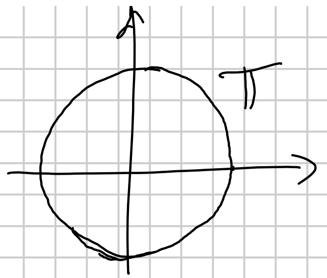
Dann ist der Koopmanop. T invert., d.h. unitär auf L^2.

Da (iii) für $f=\mathbb{1}$ gilt, bleibt es z.z.: warum?

$$f \perp \mathbb{1} \implies \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle T^n f, g\rangle| \longrightarrow 0 \quad \forall g \in L^2$$

$\boxed{\text{Fakt 1}}$ (<u>Spektralsatz für unitäre Operatoren</u>).

Sei U ein unitärer Operator auf H (Hilbert) mit



zyklischem Vektor $x \in H$, d.h.,

$$\overline{\text{lin}}\{U^n x,\ n \in \mathbb{Z}\} = H,$$

Dann $\exists$ W'Maß ν auf $\mathbb{T}$ mit

D.h., T ist isomorph zu einem Multiplikator

$$H \overset{\text{isom.}}{\simeq} L^2(\mathbb{T}, \nu)$$

$$T \sim M_z$$

unter dem isom.

$$x \sim \mathbb{1}$$

wobei M_z der Multiplikator $(M_z g)(z) := z g(z)$ ist.

Dieses ν heißt Spektralmaß von T.

Betr. $H := \overline{\text{lin}}\{T^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist f ein zyklischer Vektor für T.

Spektralsatz: $\exists$ W'Maß ν auf $\mathbb{T}$:

$$H \simeq L^2(\mathbb{T}, \nu)$$

$$T \sim M_z$$

$$f \sim \mathbb{1}$$

Wir haben also:

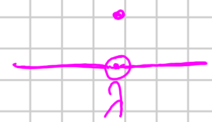
$$\langle \underbrace{T^n}_{z \mapsto z^n} f, f\rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n \, d\nu \ -\ n\text{ter Fourierkoeff. des Maßes } \nu.$$

$\boxed{\text{Fakt 2}}$ (Wiener-Lemma)

Sei ν ein W'Maß (Borel) auf $\mathbb{T}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\hat{\nu}(n)|^2 \longrightarrow \sum_{\substack{a\in\mathbb{T}\\ \text{Atom von } \nu}} \nu(\{a\})^2$$

Beobachtung: g ist eine EF von M_z $\Leftrightarrow$ $g =$  , a Atom von ν

$M_z g = \lambda g \iff z g(z) = \lambda g(z) \ \forall z \iff g(z) = \begin{cases} \lambda, & z = \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ 

Nach (iv) und $\underbrace{f \perp \mathbb{1}}_{\Rightarrow T^n f \perp \mathbb{1}\ \forall n}$ gilt $P_\sigma(T|_H) = \emptyset$

Wiener:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle T^n f, f\rangle|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\hat{\nu}(n)|^2 \longrightarrow 0$$

Koopman-v. Neumann: $D\text{-}\lim |\langle T^n f, f\rangle|^{\cancel{2}} = 0$

D.h., $D\text{-}\lim \langle T^n f, f\rangle = 0$

Wie oben: $g = T^k f$ auch ok $\forall k$ $\qquad \langle T^n f, T^k f\rangle = \langle T^{n-k} f, f\rangle$

$\rightarrow$ $g \in \operatorname{lin}\{T^k f, k\in\mathbb{Z}\}$ ok

Approx.: $g \in \overline{\operatorname{lin}}\{T^k f, k\in\mathbb{Z}\}$ Ü

Für $g \perp \overline{\text{lin}}\{T^b f,\ b \in \mathbb{Z}\}$ gilt: $\langle T^n f, g\rangle = 0 \quad \forall n$

Prop Zwei weitere äquiv. Aussagen zur schwachen Mischung sind:

(iii') $\forall f, g \in L^2\ \exists$ Teilfolge $(n_j) \subset \mathbb{N}$ mit

$$\langle T^{n_j} f, g\rangle \longrightarrow \int f \cdot \int \overline{g}$$

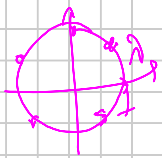
(v) $(X \times X, \mu \times \mu, T \times T)$ ist ergodisch.

__Beweis__ (iii) $\Rightarrow$ (iii') – Koopman-v. Neumann

(iii') $\Rightarrow$ (iv) Ang., $f \perp \mathbb{1}$ und $Tf = \lambda f$.

Nach (iii') $\exists (n_j) \subset \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\langle T^{n_j} f, f\rangle}_{\lambda^{n_j}\|f\|^2} \longrightarrow \underbrace{|\textstyle\int f|^2}_{=0}$$



Da $|\lambda| = 1$, muss $f = 0$.

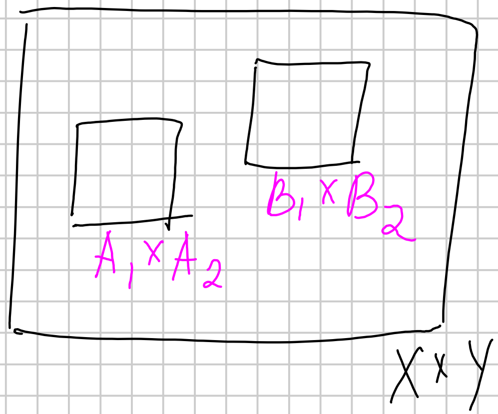
(v) $\Rightarrow$ (iv) Ang., $Tf = \lambda f$. zz: $f = \text{konst}$.

$$(T \times T)(f, \overline{f})(x,y) = \underbrace{(Tf)(x)}_{\lambda f(x)} \cdot \underbrace{T\overline{f}(y)}_{\overline{\lambda}\overline{f}(y)} = \overbrace{\lambda \cdot \overline{\lambda}}^{=1} \cdot (f, \overline{f})(x,y)$$

Nach (V) gilt $f = \text{konst}$. $((f,F) \in \text{Fix}(T \times T))$

(ii) $\Rightarrow$ (V): Wir zeigen sogar mehr:

$(X \times Y, \mu \times \nu, T \times S)$ erg. $\forall$ erg. (Y, ν, S).



(nach (ii) $\Leftrightarrow$ (i) ist (X, μ, T) erg.)

Seien $A_1, B_1 \in \Sigma_X$ (meßbar in X), $A_2, B_2 \in \Sigma_Y$ (meßbar in Y)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (\mu \times \nu)\left((T \times S)^{-n}(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(T^{-n}A_1 \cap B_1) \cdot \nu(S^{-n}A_2 \cap B_2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left[\mu(T^{-n}A_1 \cap B_1) - \mu(A_1)\mu(B_1)\right] \cdot \nu(S^{-n}A_2 \cap B_2)} +$$

$$+ \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{n=1}^{N} \nu(S^{-n}A_2 \cap B_2)} \cdot \mu(A_1)\mu(B_1).$$

$|\cdot| \leq \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} |\mu(T^{-n}A_1 \cap B_1) - \mu(A_1)\mu(B_1)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ nach (ii)

$\rightarrow \nu(A_2)\nu(B_2)$, da (Y, ν, S) erg.

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \mu(A_1) \cdot \nu(A_2) \cdot \mu(B_1) \cdot \nu(B_2) = (\mu \times \nu)(A_1 \times A_2) \cdot (\mu \times \nu)(B_1 \times B_2)$$

Da Mengen von der Form $A_1 \times A_2$ die Produkt-σ-Alg. in $X \times Y$ erzeugen, ist $(X \times Y, \mu \times \nu, T \times S)$ erg. ü $\blacksquare$

<u>Bem.</u> Aus dem Beweis folgt noch eine äquiv. Aussage:

$$(\mathrm{V}') \quad (X \times Y, \mu \times \nu, T \times S) \text{ erg. } \quad \forall \text{ erg. } (Y, \nu, S)$$

Mischung jeder Ordnung:

$\boxed{\text{Def}}$ (X, μ, T) heißt <u>mischend der Ordnung k</u>, wenn

$$\mu(A_0 \cap T^{-n_1} A_1 \cap \dots \cap T^{-n_k} A_k) \xrightarrow[\substack{n_1 \to \infty \\ n_2 - n_1 \to \infty \\ \vdots \\ n_k - n_{k-1} \to \infty}]{} \mu(A_0)\mu(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu(A_k)$$

Mischung = Mischung der Ordnung 1.

<u>Offene Frage (Furstenberg ~1970)</u>: Mischung $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Mischung jeder Ordnung

<u>Bem.</u> 1) Sogar $\mu(A \cap T^{-n} B \cap T^{-2n} C) \longrightarrow \mu(A)\mu(B)\mu(C)$ ist offen

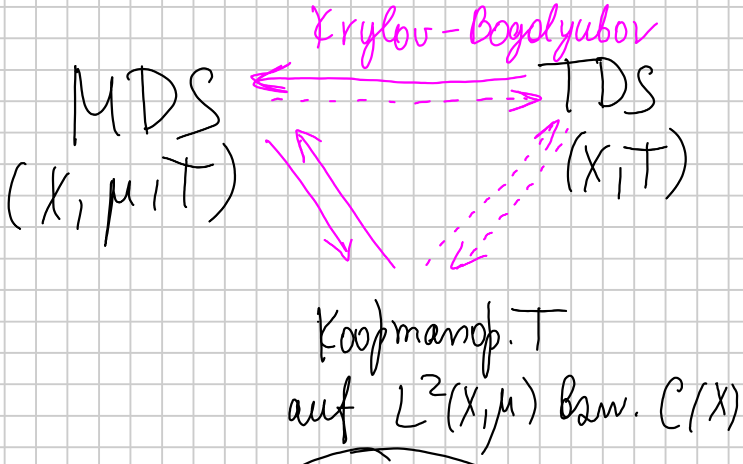
2) „Ja" für schwache Mischung

Zusammenfassung

Mischung: natürlich, aber sehr schwierig nachzuprüfen

Schwache Mischung: unnatürlich, aber leicht zu prüfen

Insgesamt:



Zusammenhänge: