Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 5. 6. 2018

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Blatt 8

Aufgabe 1. (*Stabilität von Multiplikatoren*)

Sei T der Multiplikator auf $L^2(\mathbb{R})$ definiert durch $(Tf)(s) := a(s)f(s)$ für eine gegebene Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) T ist stark stabil $\iff |a(s)| < 1$ für f.a. $s \in \mathbb{R}$.

b) T ist schwach stabil $\iff |a(s)| \leq 1$ für f.a. $s \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} \int_c^d a^n(s)\, ds = 0$ für alle Intervalle $[c, d] \subset \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie, dass für $a(s) = e^{is}$ der zugehörige Multiplikator T schwach, aber nicht stark stabil ist.

Aufgabe 2. (*Relativ dichte Folgen in* $\mathbb{N}$ *und schwache Stabilität*)

a) Eine Menge $M \subset \mathbb{N}$ heißt *relativ dicht*, wenn für ein $l \in \mathbb{N}$

$$\{n, n+1, \dots, n+l\} \cap M \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt. Eine Teilfolge $(n_j) \subset \mathbb{N}$ heißt relativ dicht, wenn die zugehörige Menge so ist. Geben Sie Beispiele von relativ dichten Folgen. Zeigen Sie, dass die Rückkehrmenge

$$\{n : \ \lambda^n \in I\}$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{T}$ und jedes Intervall $I \subset \mathbb{T}$ mit $\lambda \in I$ relativ dicht ist.

b) Sei X ein Banachraum und sei $T \in L(X)$ mit schwach-$\lim_{j\to\infty} T^{n_j} = 0$ für eine relativ dichte Teilfolge $(n_j) \subset \mathbb{N}$. Dann ist T schwach stabil.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 11. 6. 2018 besprochen.