Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, den 28. 5. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 8

Aufgabe 1. (*Dirac-Maß, 2 Punkte*)
Mit Σ werde das System aller Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Für fest gewähltes $x \in \mathbb{R}^d$ bezeichne δ_x die Abbildung

$$\delta_x \ : \ \Sigma \ni M \to \delta_x(M) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{R}^d, \Sigma, \delta_x)$ ein Maßraum ist. Bestimmen Sie die Nullmengen für diesen Maßraum. Bestimmen Sie ferner den Raum der integrierbaren Funktionen und den Wert des Integrals $I(f)$ für diesen Maßraum auf der Grundlage der in II.1.b) durchgefürten Konstruktion des Integrals.

Aufgabe 2. (*2 Extrapunkte*)
Betrachtet werde eine endliche oder unendliche Folge (x_j) paarweise verschiedener Elemente des $\mathbb{R}^d$ sowie eine Folge (c_j) positiver reeller Zahlen. Lösen Sie die vorherige Aufgabe für das wie folgt definierte Maß μ anstelle von δ_x:

$$\mu(M) = \sum_j c_j \, \delta_{x_j}(M) .$$

Unter welcher Bedingung ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß?

Aufgabe 3. (*2 Punkte*)
Es sei f eine auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gegebene stetige komplexwertige Funktion, die außerhalb von $[a, b]$ durch $f(x) = 0$ fortgesetzt sei. Man zeige, dass f auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist und dass das Lebesgue-Integral $I(f)$ mit dem Riemann-Integral (oder dem Regelintegral) von f übereinstimmt.
Dabei ist das auf der Grundlage von II.1.a) Beispiel 5 für $n = 1$ konstruierte Lebesgue-Integral gemeint.

Aufgabe 4. (*Subadditivität, 2 Punkte*)
Sei (X, Σ_0, μ_0) ein Tripel bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 auf X und einem σ-additiven Maß μ_0 auf Σ_0. Ferner seien Elemente M_j, M von Σ_0 mit $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ gegeben. Weisen Sie nach, dass dann gilt $\mu_0(M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j)$.

Aufgabe 5. (*2 Extrapunkte*)
Betrachtet werde das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ (II.1.a) Beispiel 2). Man weise nach, dass die durch $f(n) = -n^{-2}$ gegebene Funktion zu $\mathscr{L}$, aber nicht zu $\mathscr{L}''$ gehört.

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 4. 6. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, 28. 5. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 8

Exercise 1. (*Dirac measure, 2 points*)
Let Σ be the system of all subsets of $\mathbb{R}^d$ and let $x \in \mathbb{R}^d$ be fixed. Let δ_x denote the mapping

$$\delta_x \ : \ \Sigma \ni M \to \delta_x(M) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in M \\ 0 & \text{if } x \notin M \end{cases} .$$

Show that $(\mathbb{R}^d, \Sigma, \delta_x)$ is a measure space. Determine the null sets for this measure space. Determine also the the space of integrable functions and the value $I(f)$ of the integral constructed for this measure space in II.1.b).

Exercise 2. (*2 extra points*)
Consider a finite or infinite sequence (x_j) of pairwise different elements of $\mathbb{R}^d$ and a sequence (c_j) of positive real numbers. Solve the previous exercise for the measure μ defined by

$$\mu(M) = \sum_j c_j \, \delta_{x_j}(M),$$

in place of δ_x.
Under which condition, μ is a probality measure?

Exercise 3. (*2 points*)
Let f be a complex valud function defined and continuous on the bounded closed interval $[a, b]$, which is extended to $\mathbb{R}$ by setting $f(x) = 0$ for $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Show that f is Lebesgue integrable on $\mathbb{R}$ and that the Lebesgue integral $I(f)$ coincides with the Riemann integral (or the Cauchy integral) of f.
Here the Lebesgue integral is understood to be the integral constructed on the basis II.1.a) Beispiel 5 in case $n = 1$.

Exercise 4. (*Subadditivity, 2 points*)
Let (X, Σ_0, μ_0) be a triple consisting of a non-empty set X, a set algebra Σ_0 on X and a σ-additive measure μ_0 on Σ_0. Let M_j, M be elements of Σ_0 such that $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Show that $\mu_0(M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j)$.

Exercise 5. (*2 extra points*)
Consider the counting measure on $\mathbb{N}$ (II.1.a) Beispiel 2). Show that the function f given by $f(n) = -n^{-2}$ belongs to $\mathscr{L}$, but not to $\mathscr{L}''$.

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 4. 6. 2014.