Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, den 21. 5. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 7

Aufgabe 1. (*2 Punkte*)
Man stelle die Komplementärmenge von $((-1,3] \times (3,\infty)) \bigcup ((2,4] \times (2,4]))$ als endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen vom Typ $Q_{a_1,b_1} \times Q_{a_2,b_2}$, wie sie in II.1.a), Beispiel 5 im Fall $n = 2$ betrachtet werden, dar.

Aufgabe 2. (*2 Punkte*)
Bestimmen Sie endlich viele paarweise disjunkte Mengen der Gestalt $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times (a_3, b_3]$, so dass jede der Mengen $M_1 = (2,4] \times (-1,1] \times (0,2]$ und $M_2 = (1,3] \times (0,2] \times (0,1]$ als Vereinigung einiger dieser Mengen geschrieben werden kann. Schreiben Sie die Funktion $\min\{2\,\chi_{M_1}, \frac{1}{2}\,\chi_{M_2}\}$ als Linearkombination von Indikatorfunktionen der gefundenen Mengen.

Aufgabe 3. (*6 Punkte*)
Sei (X, Σ_0, μ_0) ein Tripel bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 auf X und einem σ-additiven Maß μ_0 auf Σ_0. Weisen Sie folgende Stetigkeitseigenschaften nach:

1. Für jede aufsteigende Folge $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ in Σ_0 mit $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma_0$ gilt $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_0(M_j) = \mu_0(M)$.
2. Für jede absteigende Folge $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ in Σ_0 mit $\mu_0(M_1) < \infty$ und $M = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma_0$ gilt $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_0(M_j) = \mu_0(M)$.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die letzte Behauptung ohne die Voraussetzung $\mu_0(M_1) < \infty$ im Allgemeinen nicht stimmt.

Aufgabe 4. (*2 Extrapunkte*)
Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Weisen Sie auf der Grundlage der Definition der Nullmenge nach, dass eine Teilmenge $N \subset X$ genau dann eine μ-Nullmenge ist, wenn eine Menge $M \in \Sigma$ mit $N \subset M$ und $\mu(M) = 0$ existiert.

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 28. 5. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, 21. 5. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 7

Exercise 1. (*2 points*)
Represent the comlementary set of $((-1,3]\times(3,\infty))\bigcup((2,4]\times(2,4]))$ as a finite union of pairwise disjoint sets of the form $Q_{a_1,b_1}\times Q_{a_2,b_2}$, as considered in II.1.a), Example 5 in case $n=2$.

Exercise 2. (*2 points*)
Determine a finite collection of pairwise disjoint sets of the form $(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times(a_3,b_3]$, such that each of the sets $M_1=(2,4]\times(-1,1]\times(0,2]$ and $M_2=(1,3]\times(0,2]\times(0,1]$ may be written as union of some sets belonging to this collection. Write the function $\min\{2\,\chi_{M_1},\,\frac{1}{2}\,\chi_{M_2}\}$ as a linear combination of characteristic functions of such sets.

Exercise 3. (*6 points*)
Let (X,Σ_0,μ_0) be a triple consisting of a non-empty set X, an algebra of sets Σ_0 on X, and a σ-additive measure μ_0 on Σ_0. Proof the following continuity properties of μ_0:

1. For any increasing sequence $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ in Σ_0 with $M=\bigcup_{j=1}^{\infty}M_j\in\Sigma_0$ one has $\lim\limits_{j\to\infty}\mu_0(M_j)=\mu_0(M)$.
2. For any descending sequence $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ in Σ_0 with $\mu_0(M_1)<\infty$ und $M=\bigcap_{j=1}^{\infty}M_j\in\Sigma_0$ one has $\lim\limits_{j\to\infty}\mu_0(M_j)=\mu_0(M)$.

Give an example showing that the last assertion is not true, in general, when the assumtion $\mu_0(M_1)<\infty$ is omitted.

Exercise 4. (*2 extra points*)
Let (X,Σ,μ) be a measure space. On the basis of the definition of null sets, show that a subset $N\subset X$ is a null set w. r. t. (X,Σ,μ) if and only if there exists a set $M\in\Sigma$ with $N\subset M$ and $\mu(M)=0$.

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 28. 5. 2014.