Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 15. 5. 2018

Übungen zur Vorlesung

# Funktionalanalysis II

Blatt 6

*If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.*
John von Neumann (1903–1957)

**Aufgabe 1.** (*Die Exponentialfunktion*)

a) Seien $T$ und $S$ zwei kommutierende Operatoren auf einem Banachraum $X$. Dann gilt

$$e^{T+S} = e^T e^S. \tag{1}$$

(Hinweis: Benutze die Darstellung $e^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$.)

b) Zeigen Sie, dass (1) im Allgemeinen nicht gilt, wenn $T$ und $S$ nicht kommutieren. (Hinweis: Probieren Sie $X = \mathbb{C}^2$.)

c) Berechnen Sie $e^{T_1}$ und $e^{T_2}$ für

$$T_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Benutze die Potenzreihendarstellung und a).) Wie sieht $e^T$ für eine beliebige Matrix $T$ aus?

**Aufgabe 2.** (*"T=I" für endlichdimensionale Räume*)

Sei $T \in M_{d\times d}(\mathbb{C})$ mit $\sigma(T) = \{1\}$.

a) Berechnen Sie $T^n$ in der jordanschen Normalform. (Hinweis: Beginnen Sie mit einem Jordanblock und schreiben Sie ihn als die Summe von $I$ und einer nilpotenten Matrix.)

b) Zeigen Sie, dass

$$T = I \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$$

gilt, d.h., man kann im Fall $\dim X < \infty$ im Gelfandschen "T=I" Theorem $\sup_{n\in\mathbb{Z}}$ durch $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ ersetzen.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 28. 5. 2018 besprochen.