Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, den 15. 5. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 6

Aufgabe 1. (*2 Punkte*)
Betrachtet werden die Rechtecke $Q_1 = [-1,0] \times [-1,0]$, $Q_2 = [-1,0] \times [0,1]$ und $Q_3 = [0,1] \times [-1,1]$. Man schreibe die Funktion $f = \chi_{Q_1} + 2\,\chi_{Q_2} + 3\,\chi_{Q_3}$ als Linearkombination charakteristischer Funktionen von paarweise disjunkten Rechtecken.
Unter einem Rechteck ist hier der zweidimensionale Spezialfall der in der Vorlesung definierten Quader zu verstehen. Im Ergebniss sollten auch zu Linien bzw. Punkten entartete Rechtecke vorkommen.
Hinweis: Zur Begründung und zur Veranschaulichung wird eine aussagekräftige farbige Skizze der am Ergebnis beteiligten Rechtecke anerkannt.

Aufgabe 2. (*4 Extrapunkte*)
Man zeige, dass die von allen Produkten $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ nichtentarteter beschränkter abgeschlossener Intervalle $[a_j, b_j]$ erzeugte Algebra von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ genau aus den Mengen M and ihren Komplementärmengen $\mathbb{R}^n \setminus M$ besteht, wobei M die leere Menge und alle endlichen Vereinigungen von Produkten von beschränkten Intervallen (die auch zu Punkten entartet sein können) durchläuft.

Aufgabe 3. (*4 Punkte*)
Sei (X, Σ_0, μ_0) ein Tripel bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 auf X und einem endlich-additiven Maß μ_0 auf Σ_0. Weisen Sie folgende Eigenschaften nach:

1. (Monotonie) Für $M_1, M_2 \in \Sigma_0$ mit $M_1 \subset M_2$ gilt stets $\mu_0(M_1) \leq \mu_0(M_2)$.
2. (endliche Subadditivität) Für $M_1, \ldots, M_k, M \in \Sigma_0$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^k M_j$ gilt stets $\mu_0(M) \leq \sum_{j=1}^k \mu_0(M_j)$.

Aufgabe 4. (*2 Punkte*)
Es seien $M_1, \ldots, M_k$ endlich viele nichtleere Elemente einer Algebra Σ_0 von Teilmengen einer Menge X. Man zeige, dass es endlich viele paarweise disjunkte Elemente $A_1, \ldots, A_l$ von Σ_0 so gibt, dass jede der Mengen M_j Vereinigungsmenge einiger der Mengen $A_1, \ldots, A_l$ ist.

Aufgabe 5. (*2 Extrapunkte*)
Man weise nach, dass es eine Folge (Q_j) von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ derart gibt, dass erstens jede der Mengen Q_j ein Produkt $(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$ von beschränkten halboffenen Intervallen ist und dass zweitens die von den Mengen Q_j erzeugte σ-Algebra mit der σ-Algebra der Borelschen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.
Eine Lösung der Aufgabe im Fall $n = 1$ wird auch akzeptiert.

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 21. 5. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, 15. 5. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 6

Exercise 1. (*2 points*)
Consider the rectangles $Q_1 = [-1,0] \times [-1,0]$, $Q_2 = [-1,0] \times [0,1]$ und $Q_3 = [0,1] \times [-1,1]$. Write the funktion $f = \chi_{Q_1} + 2\,\chi_{Q_2} + 3\,\chi_{Q_3}$ as a linear combination of charakteristic funktions of paarweise disjoint rectangles.
Here a rectangle is understood to be the spezial case of dimension two of a rectangular solid defined in the lecture for dimension n. The result should also contain rectangels degenerated to lines or points.
Hint: Here an informative colored sketch of the involved rectangels will be accepted as explanation and illustration.

Exercise 2. (*4 extra points*)
Show that the algebra of subsets of $\mathbb{R}^n$ generated by all products $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ of non-degenerated bounded closed intervals $[a_j, b_j]$ consits exactly of the the sets M and their comlementary sets $\mathbb{R}^n \setminus M$ where M runs through the empty set and all finite unions of products of bounded intervals (including intervals degenerated to points).

Exercise 3. (*4 points*)
Let (X, Σ_0, μ_0) be a triple consisting of a non-empty set X, an algebra of sets Σ_0 on X, and a finitely additive measure μ_0 on Σ_0. Proof the following properties:

1. (monotonicity) Whenever M_1, M_2 are elements of Σ_0 with $M_1 \subset M_2$, it follows that $\mu_0(M_1) \le \mu_0(M_2)$.
2. (finite subadditivity) Whenever $M_1, \ldots, M_k, M$ are elements of Σ_0 such that $M \subset \bigcup_{j=1}^k M_j$, it follows that $\mu_0(M) \le \sum_{j=1}^k \mu_0(M_j)$.

Exercise 4. (*2 points*)
Suppose that there is given a finite number $M_1, \ldots, M_k$ of non-empty elements of an algebra Σ_0 of subsets of a set X. Show that there exists a finite collection $A_1, \ldots, A_l$ of pairwise disjoint elements of Σ_0 such that each of the sets M_j may be written as a union of some of the sets $A_1, \ldots, A_l$.

Exercise 5. (*2 extra points*)
Show that there exists a sequence (Q_j) of subsets of $\mathbb{R}^n$ such that firstly each of the sets Q_j is a product $(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$ of bounded semi-open intervals and that secondly the σ-algebra generated by the sets Q_j coincides with the σ-algebra of all Borel subsets of $\mathbb{R}^n$. A solution in case $n = 1$ will be accepted too.

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 21. 5. 2014.