Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 8. 5. 2018

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Blatt 5

Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.
David Hilbert (1862–1943)

Aufgabe 1. (*Integraloperatoren*)

Sei $X := C[0,1]$ und $k \in C([0,1]^2)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Operatoren $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X)$ kompakt sind.

a) $T_1 f(s) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt$ für $f \in X$, $s \in [0,1]$.

b) $T_2 f(s) := \int_0^s k(s,t) f(t)\, dt$ für $f \in X$, $s \in [0,1]$.

Gibt es nicht stetige Kerne k, für die T_1 und T_2 immer noch kompakt sind?

Aufgabe 2. (*Der spektrale Abbildungssatz für Polynome**)

Seien X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_d z^d$ definiere $p(T) \in \mathcal{L}(X)$ durch

$$p(T) := a_0 I + a_1 T + \ldots + a_d T^d.$$

Dann gilt

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Zeigen Sie weiter, dass die Formel gültig bleibt, wenn man σ durch $P\sigma$, $A\sigma$ oder $R\sigma$ ersetzt. (Hinweis: Betrachten Sie zuerst $p(z) = z^d$ (und beginnen mit $d = 2$). Danach betrachten Sie beliebige Polynome und schreiben Sie für "$\supset$" $\mu - p(\cdot)$ als Produkt von d Faktoren.)

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 14. 5. 2018 besprochen.