Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 7. 5. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 5

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Aufgabe 1. (*Orthonormalbasis, 4 Punkte*)

Sei H ein Hilbertraum mit $\dim H = \infty$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) H hat eine abzählbare Orthonormalbasis.

(ii) H ist separabel.

Aufgabe 2. (*Nicht separabler Prähilbertraum, 6 Extrapunkte*)

Seien $e_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $e_\alpha(s) := e^{i\alpha s}$ definiert für $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$Y := \operatorname{lin}\{e_\alpha,\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Bezeichnen Sie

$$\langle f, g \rangle := \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} f(s)\overline{g(s)}\, ds$$

für stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die der Limes existiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1) Y ist ein Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf Y.

2) Das System $\{e_\alpha,\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ ist ein Orthonormalsystem in $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, und es gibt überabzählbar viele paarweise disjunkte offene Kugeln in Y. (Hinweis: Berechnen Sie den Abstand $\|e_\alpha - e_\beta\|$ für die induzierte Norm $\|\cdot\|$.)

3) Jede dichte Teilmenge von Y muss überabzählbar sein. Insbesondere ist Y nicht separabel.

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 14. 5. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, 7. 5. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 5

It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment.
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Exercise 1. (*Orthonormal basis, 4 points*)

Let H be a Hilbert Spasce with $\dim H = \infty$. Then the following assertions are equivalent.

(i) H has a countable orthonormal basis.

(ii) H is separable.

Exercise 2. (*Non-separable pre-Hilbert space, 6 extra points*)

Define $e_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ by $e_\alpha(s) := e^{i\alpha s}$ for $\alpha \in \mathbb{R}$ and set

$$Y := \operatorname{lin}\{e_\alpha,\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Denote

$$\langle f, g\rangle := \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} f(s)\overline{g(s)}\, ds$$

for continuous functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, for which the limit exists. Show the following assertions.

1) Y is a vector space and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is a scalar product on Y.

2) The system $\{e_\alpha,\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ is an orthonormal system in $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ and there exist uncountably many pairwise disjoint open balls in Y. (Hint: Compute the distance $\|e_\alpha - e_\beta\|$ for the induced norm $\|\cdot\|$.)

3) Every dense subset of Y must be uncountable. In particular, Y is not separable.

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 14. 5. 2014.