Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 30. 4. 2018

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Blatt 4

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Aufgabe 1. (*Quotientenräume*)

Seien X ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Man definiert X/Y mit $[x] = x + Y$. Zeigen Sie die folgenden Ausagen.

a) X/Y is ein Vektorraum bezüglich $[x] + [y] := [x + y]$ und $c[x] := [cx]$, $x, y \in Y$ und $c \in \mathbb{C}$ und die *Quotientennorm*

$$\|[x]\| := \inf_{y \in Y} \|x + y\|, \quad x \in X,$$

ist tatsächlich eine Norm auf X/Y.

b) Der Raum X/Y ist ein Banachraum für die Quotientennorm. (Hinweis: Benutzen Sie die folgende Charakterisierung: Ein normierter Vektorraum Z ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe in Z konvergiert, d.h., wenn für jede Folge $(x_j) \subset Z$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$ gibt es ein $s \in Z$ mit $\sum_{j=1}^{n} x_j \to s$.)

c) Der Dualraum $(X/Y)'$ von X/Y is isomorph zu

$$Y^{\perp} := \{\varphi \in X' : \varphi|_Y = 0\}$$

via $\Phi : (X/Y)' \mapsto Y^{\perp}$, $(\Phi\psi)(x) := \psi([x])$.

Aufgabe 2. (*Quotientenräume: Beispiele*)

Beschreiben Sie X/Y, die Quotientennorm $\|[x]\|$ und den Dualraum $(X/Y)'$ aus Aufgabe 1 für die folgenden X und Y.

a) $X = \mathbb{C}^{2d}$, $Y = \{(t_1, \ldots, t_{2d}) : t_1 = \ldots = t_d = 0\}$.

b) $X = l^2$, $Y = \{(t_j)_{j=1}^{\infty} : 0 = t_1 = t_3 = t_5 = \ldots\}$.

c) $X = C[0, 1]$, $Y = \{f \in X : f|_{[0,1/2]} = 0\}$.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 7. 5. 2018 besprochen.