Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 30. 4. 2014

Übungen zur Vorlesung

# Mathematik für Physiker IV

Blatt 4

*Seit der Zeit der Griechen bedeutet "Mathematik" zu sagen, "Beweis" zu sagen.*
Nicolas Bourbaki

**Aufgabe 1.** (*Cauchykriterium und Orthonormalsysteme, 4 Punkte*)

1) Seien $(H, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Vektorraum und $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ genau dann konvergiert, wenn

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \sum_{j=n}^{m} x_j \right\| = 0.$$

2) Seien $H$ ein Hilbertraum, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ ein Orthonormalsystem und $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in l^2$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in H$ existiert mit $\alpha_j = \langle x, e_j\rangle$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. (Hinweis: Probieren Sie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ und benutzen Sie 1).)

**Aufgabe 2.** (*Beipiel, 6 Punkte*)

Betrachten Sie $H := l^2$ und das System $S = \{e_1, e_3, e_5, \ldots\} \subset H$, wobei der Vektor $e_j$ alle Koordinaten bis auf $j$ gleich Null und die $j$-te Koordinate gleich 1 hat.

1) Zeigen Sie, dass $S$ ein Orthonormalsystem ist, und berechnen Sie $S^{\perp}$.

2) Berechnen Sie $\mathrm{lin} S$ und $\overline{\mathrm{lin}} S$. Für welche Vektoren gilt $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j$?

3) Für welche Vektoren ist die Besselsche Ungleichung eine strikte Ungleichung? Für welchen Hilbertraum ist $S$ eine Orthonormalbasis?

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 7. 5. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, 30. 4. 2014

Exercises to the lecture

# Mathematics for Physicists IV

Sheet 4

*Since the time of Ancient Greeks, saying "mathematics" means saying "proof".*
NICOLAS BOURBAKI

**Exercise 1.** (*Cauchy criterion und orthonormal systems, 4 points*)

1) Let $(H, \|\cdot\|)$ be a complete normed vector space and $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Show that the series $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converges if and only if

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \sum_{j=n}^{m} x_j \right\| = 0.$$

2) Let $H$ be a Hilbert space, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ an orthonormal system and $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in l^2$. Show that there exists $x \in H$ with $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$ for every $j \in \mathbb{N}$. (Hint: Try $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ and use 1).)

**Exercise 2.** (*Example, 6 points*)
Consider $H := l^2$ and the system $S = \{e_1, e_3, e_5, \ldots\} \subset H$, where $e_j$ is the vector with every coordinate equal to 0 up to the $j$th coordinate which equals 1.

1) Show that $S$ is an orthonormal system and compute $S^{\perp}$.

2) Compute $\mathrm{lin} S$ und $\overline{\mathrm{lin}} S$. For which vectors does $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$ hold?

3) For which vectors is Bessel's inequality a strict inequality? For which Hilbert space is $S$ and orthonormal basis?

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 7. 5. 2014.