Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 23. 4. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 3

Mache die Dinge so einfach wie möglich - aber nicht einfacher.
Albert Einstein (1879–1955)

Aufgabe 1. (*Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren, 6 Punkte*)

1) Sei H ein Prähilbertraum und $(x_1, x_2, \ldots)$ eine linear unabhängige Menge. Seien $(y_1, y_2, \ldots)$ und $(e_1, e_2, \ldots)$ definiert induktiv durch
$$y_k := x_k - \langle x_k, e_1 \rangle e_1 - \ldots - \langle x_k, e_{k-1} \rangle e_{k-1} \quad \text{und} \quad e_k := \frac{y_k}{\|y_k\|}.$$
Zeigen Sie, dass $(e_1, e_2, \ldots)$ ein Orthonormalsystem ist und dass
$$\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_k\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_k\}$$
für jedes k gilt.

2) Berechnen Sie (e_j) für $H = l^2$ und $x_k := (1, \ldots, 1, 0, 0,)$, wobei 1 in x_k genau k mal vorkommt.

3) Berechnen Sie (e_1, e_2, e_3) für $H = C[0, 1]$ mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(s)\overline{g(s)}\, ds$ und (x_1, x_2, x_3) gegeben durch
$$x_1(s) = 1, \quad x_2(s) = s, \quad x_3(s) = s^2.$$

Aufgabe 2. (*Orthogonalität, 4 Punkte*)
Sei H ein Hilbertraum.

1) Ein Orthogonalsystem in H ist stets linear unabhängig. (Dabei heißt eine Menge M linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist.)

2) Für einen linearen Teilraum $Y \subset H$ gilt
$$Y \quad \text{ist dicht} \iff Y^\perp = \{0\}.$$

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 30. 4. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, 23. 4. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 3

Make the things as simple as possible – but not simpler.
Albert Einstein (1879–1955)

Exercise 1. (*Gram–Schmidt orthogonalisation procedure, 6 points*)

1) Let H be a pre-Hilbert space and $(x_1, x_2, \ldots)$ a linearly independent set. Let $(y_1, y_2, \ldots)$ and $(e_1, e_2, \ldots)$ defined inductively by

$$y_k := x_k - \langle x_k, e_1\rangle e_1 - \ldots - \langle x_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1} \quad \text{and} \quad e_k := \frac{y_k}{\|y_k\|}.$$

Show that $(e_1, e_2, \ldots)$ is an orthonormal system and that

$$\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_k\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_k\}$$

holds for every k.

2) Compute (e_j) for $H = l^2$ and $x_k := (1, \ldots, 1, 0, 0,)$,where 1 in x_k appears exactly k times.

3) Compute (e_1, e_2, e_3) for $H = C[0, 1]$ with the usual scalar product $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(s)\overline{g(s)}\, ds$ and (x_1, x_2, x_3) given by

$$x_1(s) = 1, \quad x_2(s) = s, \quad x_3(s) = s^2.$$

Exercise 2. (*Orthogonality, 4 points*)
Let H be a Hilbert space.

1) An orthogonal system in H is always linearly independent. (A set M is called linearly independent if every finite subset of M is linearly independent.)

2) For a linear subspace $Y \subset H$ show the equivalence

$$Y \quad \text{is dense} \iff Y^\perp = \{0\}.$$

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 30. 4. 2014.