

Übungen zur Vorlesung  
**Funktionalanalysis II**  
Blatt 3

*Was wirklich zählt, ist Intuition.*  
ALBERT EINSTEIN (1879–1955)

**Aufgabe 1.** (*Eigenschaften des Spektrums*)

Seien  $X$  ein Banachraum und  $T \in \mathcal{L}(X)$ .

- Das approximative Punktspektrum  $A\sigma(T)$  ist stets abgeschlossen. Gilt dasselbe für das Punktspektrum?
- $P\sigma(T') = R\sigma(T)$ .
- $R\sigma(T') = P\sigma(T'') \supset P\sigma(T)$ , wobei “ $\subset$ ” im Allgemeinen nicht durch “ $=$ ” ersetzt werden kann. (Hinweis: Betrachten Sie den Linksschift auf  $X = c_0$  und  $\lambda = 1$ .)
- Wenn  $X$  ein Hilbertraum ist, so gelten

$$P\sigma(T^*) = \overline{R\sigma(T)} \quad \text{und} \quad R\sigma(T^*) = \overline{P\sigma(T)},$$

wobei  $\overline{A}$  die Menge  $\{\overline{\lambda} : \lambda \in A\}$  für  $A \subset \mathbb{C}$  bezeichnet.

**Aufgabe 2.** (*Spektrum von Multiplikatoren*)

Bestimmen Sie das Punktspektrum, das approximative Punktspektrum und das Residualspektrum von folgenden Operatoren.

- $X = l^2$ ,  $T(t_1, t_2, \dots) = (a_1 t_1, a_2 t_2, \dots)$  für eine gegebene beschränkte Folge  $(a_j)_{j=1}^\infty$ . Was ändert sich, wenn man  $l^2$  durch  $c_0$  oder  $l^p$  für  $1 \leq p < \infty$  ersetzt?
- $X = C[0, 1]$ ,  $(Tf)(s) = a(s)f(s)$  für eine gegebene Funktion  $g \in C[0, 1]$ . Was ändert sich, wenn man  $C[0, 1]$  durch  $L^2[0, 1]$  oder  $L^p[0, 1]$  ersetzt?

**Aufgabe 3.** (*Spektrum des Volterraoperators*)

Sei  $V$  der Volterraoperator auf  $C[0, 1]$  definiert durch

$$(Vf)(s) = \int_0^s f(t) dt.$$

- Beweisen Sie per Induktion

$$(V^n f)(s) = \int_0^s f(t) \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

- Zeigen Sie  $r(V) = 0$ . (Hinweis: Benutzen Sie a), um  $\|V^n\|$  abzuschätzen.) Liegt 0 in  $A\sigma(V)$  und  $R\sigma(V)$ ? Was ändert sich, wenn man  $C[0, 1]$  durch  $C_0[0, 1] := \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$  ersetzt?

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 30. 4. 2018 besprochen.