Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 16. 4. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 2

Do not worry about your difficulties in mathematics.
I can assure you mine are still greater.
Albert Einstein (1879–1955)

Aufgabe 1. (*Gewichtete Räume, 6 Extrapunkte*)

1) Seien $d \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_d > 0$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{d} a_j x_j \overline{y_j}$$

ein Hilbertraum ist. Kann man $a_j = 0$ für ein j zulassen?

2) Sei $(a_j)_{j=0}^{\infty} \subset (1, 2)$. Zeigen Sie, dass $(l^2, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \overline{y_j}$$

auch ein Hilbertraum ist. Kann man $(1, 2)$ durch (a, b) mit $0 \leq a < b$ ersetzen?

3) Betrachten Sie $C[0, 1]$ mit

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 a(s) f(s) \overline{g(s)}\, ds$$

für eine gegebene stetige Funktion $a : [0, 1] \to (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass $(C[0, 1], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum ist. Ist der Raum vollständig? Was ändert sich, wenn man $a(s) = 0$ für manche s zulässt?

Aufgabe 2. (*Orthogonalität, 4 Extrapunkte*)

Sei H ein Prähilbertraum und $M \subset X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1) $M^{\perp}$ ist stets ein abgeschlossener linearer Teilraum von H.

2) Es gilt $M^{\perp\perp} = \overline{\text{lin}} M$. (Hinweis: Für "$\subset$" zeigen Sie zuerst $M \subset M^{\perp\perp}$ und benutzen Sie 1). Für "$\supset$" benutzen Sie die Orthogonalzerlegung.)

Frohe Ostern!

Abgabe der Übungsaufgaben (freiwillig) erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 23. 4. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, 16. 4. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 2

Do not worry about your difficulties in mathematics.
I can assure you mine are still greater.
ALBERT EINSTEIN (1879–1955)

Exercise 1. (*Weighted spaces, 6 extra points*)

1) Let $d \in \mathbb{N}$ and $a_1, \dots, a_d > 0$. Show that $(\mathbb{C}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ with

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{d} a_j x_j \overline{y_j}$$

is a Hilbert space. Can one allow $a_j = 0$ for some j?

2) Let $(a_j)_{j=0}^{\infty} \subset (1,2)$. Show that $(l^2, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ with

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \overline{y_j}$$

is a Hilbert space, too. Can one replace $(1,2)$ with (a,b) for $0 \leq a < b$?

3) Consider $C[0,1]$ with

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 a(s) f(s) \overline{g(s)}\, ds$$

for a given continuous function $a : [0,1] \to (0, \infty)$. Show that $(C[0,1], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is a pre-Hilbert space. Is the space complete? What changes if ole allows $a(s) = 0$ for some s?

Exercise 2. (*Orthogonality, 4 extra points*)

Let H be a pre-Hilbert space and $M \subset X$. Show that the following hold.

1) $M^{\perp}$ is always a closed linear subspace of H.

2) $M^{\perp\perp} = \overline{\text{lin}} M$. (Hint: For "$\subset$" show $M \subset M^{\perp\perp}$ first and then use 1). For "$\supset$" use the orthogonal decomposition.)

Happy Easter!

Handing the exercises in (optionally) will take place in the lecture on Wednesday, 23. 4. 2014.