

Übungen zur Vorlesung  
**Funktionalanalysis II**  
Blatt 2

**Aufgabe 1.** (*Spektralradius und Verhalten von Potenzen*)

- 1) Seien  $X$  ein Banachraum und  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent.
  - (i)  $r(T) < 1$ .
  - (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0$ .
  - (iii)  $\|T^n\| < 1$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) Seien  $X$  ein Banachraum und  $T, S \in \mathcal{L}(X)$ . Zeigen Sie, dass  $r(TS) \leq r(T)r(S)$  gilt, sobald  $T$  und  $S$  kommutieren. Zeigen Sie weiterhin, dass die Ungleichung im Allgemeinen falsch ist, wenn  $T$  und  $S$  nicht kommutieren. (Hinweis: Probieren Sie  $X = \mathbb{C}^2$ .)

**Aufgabe 2.** (*Zweiseitiger Shift und sein Spektrum*)

Sei  $T$  der zweiseitige Rechtsschift auf  $l^2(\mathbb{Z})$ , d.h.,

$$T(\dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots) = (\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, \dots).$$

Sei weiterhin  $\mathbb{T}$  der Einheitskreis in  $\mathbb{C}$  und bezeichne mit  $M$  den Multiplikator auf  $L^2(\mathbb{T})$  definiert durch

$$Mf(z) := zf(z).$$

- 1) Bestimmen Sie das Punktspektrum von  $T$ .
- 2) Zeigen Sie, dass  $T$  und  $M$  ähnlich sind.
- 3) Berechnen Sie  $\sigma(M)$  und bestimmen Sie  $\sigma(T)$  (vgl. Aufgabe 2, Blatt 1).
- 4) Wie ändert sich das Spektrum und das Punktspektrum, wenn wir statt Rechtsschift den zweiseitigen Linksschift  $S$  auf  $l^2$  nehmen, d.h.,

$$S(\dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots) = (\dots, t_0, t_1, t_2, \dots)?$$

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 23. 4. 2018 besprochen.